

# Filtro de Kalman extendido y filtro de partículas Kalman extendido para problemas de estimación No Lineal

Luis Sánchez<sup>a</sup>, Joan Ordoñez<sup>\*b</sup>, Saba Infante<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Carabobo.*

<sup>b</sup>*Departamento de Matemática, Estudios Básicos, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela.*

<sup>c</sup>*Departamento de Matemáticas, Centro de Análisis, Modelado y Tratamiento de Datos (CAMYTD), Facultad de Ciencia y Tecnología (FACYT), Universidad de Carabobo.*

---

## Resumen.-

En este artículo se presenta una metodología basada en los algoritmos: filtro de Kalman extendido y filtro de partículas Kalman extendido para estudiar el problema de estimación de parámetros en modelos dinámicos con estructuras no lineales, pero con errores de observación Gaussianos, se plantea un modelo en la forma de espacio estado, donde los estados del sistema no observado son tratados como parámetros, se utilizan técnicas recursivas de inferencia Bayesiana para predecir y actualizar la distribución a posterior y marginal de los estados. Ilustramos la propuesta estimando y reconstruyendo los estados de los mapas de Henón y Lorenz, además se reconstruye los estados y propiedades morfológicas de las señales de un modelo sintético de un electrocardiograma. Los resultados demuestran que los filtros tienen buen comportamiento en la estimación de los estados. Finalmente se evalúa el comportamiento de los algoritmos en términos de la desviación estándar empírica y los tiempos de cómputo CPU, observándose pequeñas variaciones en los errores estimados y una rápida ejecución en tiempo real.

**Palabras clave:** Filtro de Kalman Extendido, Filtro de Partículas Kalman Extendido, Modelos no Lineales

## Extended Kalman filter and extended particle Kalman filter for non linear estimation problems

### Abstract.-

This article presents a methodology based on algorithms: filter extended Kalman and particle filter extended Kalman to study the problem of parameter estimation in dynamic models with non-linear structures, but with errors of observation Gaussian, arises in the form of State space model, where the no-observed-system States are treated as parameters recursive Bayesian inference techniques are used to predict and update distribution to rear and marginal States. We illustrate the proposal estimating and reconstructing States of Henon maps and Lorenz, was also reconstructed States and morphological properties of a synthetic model of an electrocardiogram signals. The results show that filters have good behavior in the estimation of the States. Finally it evaluates the behavior of algorithms in terms of the empirical standard deviation and the times of computer CPU, with small variations in the estimated errors and rapid execution in real time.

**Keywords:** Extended Kalman Filter, Extended Particle Kalman Filter, Non Linear Estimation Problems

Recibido: diciembre 2012

Aceptado: enero 2013.

## 1. Introducción

---

\*Autor para correspondencia

Correo-e: jordonez@uc.edu.ve (Joan Ordoñez)

Un sistema dinámico puede ser descrito por el modelo espacio estado; matemáticamente se

define como:

$$\mathbf{x}_t = \mathcal{M}_t(\mathbf{x}_{t-1}) + \mathbf{u}_t \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathcal{H}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t \quad (2)$$

La ecuaciones dada en (1) y (2) representa un sistema dinámico, donde  $\mathcal{M}_t$  y  $\mathcal{H}_t$  son operadores que obedecen la evolución del sistema, no lineales en este caso de estudio,  $\mathbf{x}_t \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  denota al vector de estados desconocidos en un tiempo  $t$ ,  $\mathbf{u}_t$  es un error aleatorio de estimación del estado,  $\mathbf{y}_t \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$  es el vector de observaciones y  $\mathbf{v}_t$  es un error aleatorio de observación. El objetivo en el problema de estimación es obtener el vector de estado desde un conjunto de observaciones. Esta estimación, en el enfoque bayesiano, implica calcular la distribución a posteriori  $P(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{y}_{1:t})$  y así su distribución marginal  $P(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ . El problema descrito recibe el nombre de problema del filtrado bayesiano, también denominado problema del filtrado óptimo. Uno de los aportes de este trabajo consiste en aplicar técnicas de filtrado de señales, se utilizaran específicamente: el filtro de partículas Kalman extendido (FPKE) y el filtro de Kalman extendido (FKE), para reconstruir sistemas dinámicos no lineales sensitivos a las condiciones iniciales, donde estos son solo previsible en términos cortos de tiempo. Para una revisión extensa de los filtros ver: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], entre otros.

El resto del artículo es como sigue: en la Sección 2 se describe el filtro de Kalman extendido; en la Sección 3 se describe el filtro de partículas Kalman extendido; en la Sección 4 se define el problema de estimación no lineal; en la Sección 5 se muestran los resultados obtenidos y una discusión de los resultados obtenidos.

## 2. Filtro de Kalman extendido (FKE)

El filtro de Kalman extendido (FKE) resuelve el problema de la estimación del estado  $\mathbf{x}_t$  generado por un sistema no lineal, utilizando la expansión de la serie de Taylor que aproxima las ecuaciones no lineales de estado y de observación, sobre el valor actual estimado del estado  $\hat{x}_t$ ; igualmente,

propvee un estimado de la varianza mínima del estado basado en la información estadística sobre el modelo (1) y (2). Supóngase que el vector de ruido es un proceso Gaussiano de media cero y matrices de varianza covarianzas dadas por:

$$E(w_j w_t^T) = \delta_{jt} Q_k$$

$$E(v_j v_t^T) = \delta_{jt} R_k$$

y

$$E(v_j w_t^T) = 0$$

para todo  $\forall j, t$ . Asimismo,  $\delta_{jt}$  es la función delta dirac.

El filtro de Kalman propaga los primeros dos momentos de la distribución  $x_t$  recursivamente; a través de la ecuación de estado y de observación, luego el FKE actualiza lo estimado del vector estado y de la covarianza. La actualización es llevada a cabo a través de la matriz de ganancia de Kalman  $\mathcal{K}$ , la cual minimiza la suma ponderada de los elementos de la diagonal principal de la matriz de covarianza (minimiza la varianza). Supóngase que se tiene el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= f_t(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{w}_{t-1}) \\ \mathbf{y}_t &= h_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t) \\ \mathbf{w}_t &\sim (0, Q_t) \\ \mathbf{v}_t &\sim (0, R_t) \end{aligned} \quad (3)$$

Linealizando la ecuación de estado alrededor de  $x_{t-1} = \hat{x}_{t-1}^+$ , y haciendo  $w_{t-1} = 0$ , se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_t &= f_{t-1}(\hat{x}_{t-1}^+, u_{t-1}, 0) + \frac{\partial f_{t-1}}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_{t-1}^+} (x_{t-1} - \hat{x}_{t-1}^+) \\ &\quad + \frac{\partial f_{t-1}}{\partial w} \Big|_{\hat{x}_{t-1}^+} w_{t-1} \\ &= f_{t-1}(\hat{x}_{t-1}^+, u_{t-1}, 0) + F_{t-1}(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1}^+) \\ &\quad + L_{t-1} w_{t-1} \\ &= F_{t-1} x_{t-1} + [f_{t-1}(\hat{x}_{t-1}^+, u_{t-1}, 0) - F_{t-1} \hat{x}_{t-1}^+] \\ &\quad + L_{t-1} w_{t-1} \\ &= F_{t-1} x_{t-1} + \tilde{u}_{t-1} + \tilde{w}_{t-1} \end{aligned} \quad (4)$$

donde:

$$F_{t-1} = \frac{\partial f_{t-1}}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_{t-1}^+}$$

y

$$L_{t-1} = \frac{\partial f_{t-1}}{\partial w} \Big|_{\hat{x}_{t-1}^+}$$

La señal conocida  $\tilde{u}_t$  y la señal de ruido  $\tilde{w}_t$  son definidas como sigue:

$$\tilde{u}_t = f_t(\hat{x}_t^+, u_t, 0) - F_t \hat{x}_t^+$$

y

$$\tilde{w}_t \sim (0, L_t Q_t L_t^T)$$

Linealizando la ecuación de observación alrededor de  $x_t = \hat{x}_t^-$  y haciendo  $v_t = 0$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} y_t &= h_t(\hat{x}_t^-, 0) + \frac{\partial h_t}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_t^-} (x_t - \hat{x}_t^-) + \frac{\partial h_t}{\partial v} \Big|_{\hat{x}_t^-} v_t \\ &= h_t(\hat{x}_t^-, 0) + H_t(x_t - \hat{x}_t^-) + M_t v_t \\ &= H_t x_t + [h_t(\hat{x}_t^-, 0) - H_t \hat{x}_t^-] + M_t v_t \\ &= H_t x_t + z_t + \tilde{v}_t \end{aligned} \quad (5)$$

donde:

$$H_t = \frac{\partial h_t}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_t^-}$$

y

$$M_t = \frac{\partial h_t}{\partial v} \Big|_{\hat{x}_t^-}$$

Las señal conocida  $z_t$  y la señal de ruido  $\tilde{v}_t$  son definidas como sigue:

$$z_t = h_t(\hat{x}_t^-, 0) - H_t \hat{x}_t^- \quad (6)$$

y

$$\tilde{v}_t \sim (0, M_t R_t M_t^T) \quad (7)$$

Entonces se tiene una representación espacio estado lineal en las ecuaciones dadas por (4) y (5). Esto implica que se pueden usar las ecuaciones estándar del filtro de Kalman para estimar los estados.

Usando las ecuación del ajuste lineal de Bayes dada en [11], se obtienen las ecuaciones para el filtro de Kalman extendido en tiempo discreto:

$$\begin{aligned} P_t^- &= F_{t-1} P_{t-1}^+ F_{t-1}^T + L_{t-1} Q_{t-1} L_{t-1}^T \\ K_t &= P_t^- H_t^T (H_t P_t^- H_t^T + M_t R_t M_t^T)^{-1} \\ \hat{x}_t^- &= f_{t-1}(\hat{x}_{t-1}^+, u_{t-1}, 0) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} z_t &= h_t(\hat{x}_t^-, 0) - H_t \hat{x}_t^- \\ \hat{x}_t^+ &= \hat{x}_t^- + K_t (y_t - H_t \hat{x}_t^- - z_t) \\ &= \hat{x}_t^- + K_t [y_t - h_t(\hat{x}_t^-, 0)] \\ P_t^+ &= (I - K_t H_t) P_t^- \end{aligned} \quad (9)$$

Entonces el FKE se resume como sigue:

**Paso 1** El sistema de ecuación de observación y ecuación de estado es dado como sigue:

$$\begin{aligned} x_t &= f_{t-1}(x_{t-1}, u_{t-1}, w_{t-1}) \\ y_t &= h_t(x_t, v_t) \\ w_t &\sim N(0, Q_t) \\ v_t &\sim N(0, R_t) \end{aligned} \quad (10)$$

**Paso 2** Se inicializa el filtro como sigue:

$$\hat{x}_0^+ = E(x_0)$$

$$P_0^+ = E[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^T]$$

**Paso 3** Para  $t = 1, 2, \dots$ , se ejecuta lo siguiente:

- Se calculan las siguientes matrices de derivadas parciales:

$$F_{t-1} = \frac{\partial f_{t-1}}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_{t-1}^+}$$

y

$$L_{t-1} = \frac{\partial f_{t-1}}{\partial w} \Big|_{\hat{x}_{t-1}^+}$$

- Se realiza la actualización del estado y la covarianza estimada como sigue:

$$P_t^- = F_{t-1} P_{t-1}^+ F_{t-1}^T + L_{t-1} Q_{t-1} L_{t-1}^T$$

$$\hat{x}_t^- = f_{t-1}(\hat{x}_{t-1}^+, u_{t-1}, 0)$$

- Luego se calculan las siguientes matrices de derivadas parciales:

$$H_t = \frac{\partial h_t}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_t^-}$$

y

$$M_t = \frac{\partial h_t}{\partial v} \Big|_{\hat{x}_t^-}$$

- Ahora se actualiza la ecuación de observación usando los estados estimados y la covarianza estimada como sigue:

$$\begin{aligned} K_t &= P_t^- H_t^T (H_t P_t^- H_t^T + M_t R_t M_t^T)^{-1} \\ \hat{x}_t^+ &= \hat{x}_t^- + K_t [y_t - h_t(\hat{x}_t^-, 0)] \\ P_t^+ &= (I - K_t H_t) P_t^- \end{aligned}$$

### 3. Filtro de partículas Kalman extendido (FPKE)

El método de filtro de partículas Kalman extendido (FPKE) consiste en considerar una distribución propuesta que se utiliza para aproximar la distribución de importancia. La técnica se basa en la expansión de series de Taylor de primer orden de la distribución de transición y de la distribución de importancia; además, supone una distribución Gaussiana para todas las variables aleatorias consideradas. En un marco recursivo propaga la aproximación Gaussiana de la distribución a posteriori durante el tiempo y combina esto en cada paso del tiempo con la nueva observación. En este sentido, el método filtro de partículas Kalman extendido puede ser resumido como sigue:

**Paso 1 Inicialización:** En un tiempo  $t = 0$

Para  $i = 1, \dots, N$ ; muestrea  $x_0^{(i)} \sim p(x_0)$ .

Para  $i = 1, \dots, N$ ; muestrea  $w_0^{(i)} \sim p(y_0|x_0^{(i)})$ .

Luego se normalizan los pesos:

$$\tilde{w}_0^{(i)} = \frac{w_0^{(i)}}{\sum_{j=1}^N w_0^{(j)}}$$

**Paso 2 Predicción y actualización:** Para  $t \geq 1$ , se tiene:

Para  $i = 1, \dots, N$ ; se actualizan las partículas con el algoritmo FKE.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t-1}^{(i)} &= f(x_{t-1}^{(i)}) \\ P_{t|t-1}^{(i)} &= F_t^{(i)} P_{t-1}^{(i)} (F_t^{(i)})^T + Q_t \\ K_t^{(i)} &= P_{t|t-1}^{(i)} (H_t^{(i)})^T [H_t^{(i)} P_{t|t-1}^{(i)} (H_t^{(i)})^T + R_t]^{-1} \\ \hat{x}_t^{(i)} &= \hat{x}_{t|t-1}^{(i)} + K_t^{(i)} [y_t - h(\hat{x}_{t|t-1}^{(i)})] \\ \hat{P}_t^{(i)} &= (I - K_t^{(i)} H_t^{(i)}) P_{t|t-1}^{(i)} \end{aligned} \quad (11)$$

Para  $i = 1, \dots, N$ ; se muestrea de la densidad de importancia como sigue:

$$x_t^{(i)} \sim N(\hat{x}_t^{(i)}, \hat{P}_t^{(i)})$$

Para  $i = 1, \dots, N$ ; se muestrea:

$$w_t^{(i)} \sim p(y_t|x_t^{(i)}) \tilde{w}_{t-1}^{(i)}$$

y luego se normalizan los pesos de importancia:

$$\tilde{w}_t^{(i)} = \frac{w_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^N w_t^{(j)}}$$

Si el tamaño de muestra efectivo  $\hat{N}_{TME}$  es menor que un cierto umbral definido por [11] como  $N_U = \frac{N}{2}$ , esto es:

$$\hat{N}_{TME} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\tilde{w}_t^{(i)})^2} < N_U$$

se remuestrea, a partir de la población  $\{x_t^{(i)}, w_t^{(i)}\}$ , y se obtiene un nuevo conjunto  $\{x_t^{(i)}, \frac{1}{N}\}$  con pesos uniformes.

**Paso 3 Salida:** El conjunto de muestras es usado para aproximar la distribución a posteriori y calcular la media y la covarianza es

$$\hat{p}(x_t|y_{1:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \delta(x_t - x_t^{(i)})$$

$$\hat{x}_t = E(x_t|y_{1:t}) \approx \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} x_t^{(i)}$$

$$\hat{P}_t = C(x_{0:t}|y_{1:t}) \approx \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} (\hat{x}_t^{(i)} - \hat{x}_t)(\hat{x}_t^{(i)} - \hat{x}_t)^T.$$

Para validar los resultados obtenidos se usará como medida de adecuación, la desviación estándar empírica, definida por:

$$\sqrt{\text{Var}(x_{t|t})} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (x_{t|t}^{(j)} - x_t^{(j)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

donde:  $x_t^{(j)}$  es el estado verdadero para la  $j$ -ésima simulación;  $x_{t|t}^{(j)} = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_{t|t}^{(i)} x_t^{j(i)}$  es el estimador Monte Carlo de  $x_{t|t} = E(x_t|y_{1:t})$  para la  $j$ -ésima señal de prueba;  $x_t^{j(i)}$  es la  $i$ -ésima trayectoria simulada asociada con la señal  $j$ ; y  $\tilde{w}_{t|t}^{(i)} = \tilde{w}_t^{(i)}$  es el peso de importancia.

#### 4. Problema de Estimación No Lineal

El escenario considerado a demostrar la estimación usando el FKE y FPKE, es reconstruir los estados de los siguientes modelos:

##### 1. Mapa de Henon [12]

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= y_t + 1 - ax_t^2 + u_t \\ y_{t+1} &= bx_t + v_t \end{aligned} \quad (13)$$

donde:  $a, b$ , son parámetros,  $u_t \sim N_p(0, \sigma_u^2)$ , y  $v_t \sim N_p(0, \sigma_v^2)$  son mutuamente independiente.

##### 2. Mapa de Lorenz [13]: es un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales no lineales para explicar la dinámica del flujo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= s(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (14)$$

donde:  $s, r, b$  son parámetros y  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ,  $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ . El vector de estado  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$  representa una posición de las partículas en el espacio de fase.

##### 3. Modelo Sintético del Electrocardiograma (ECG) ([14] es un modelo definido por un conjunto de tres ecuaciones diferenciales

ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \omega \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha y + \omega x \\ \frac{dz}{dt} &= - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) - (z - z_0) \end{aligned} \quad (15)$$

donde:  $\alpha = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\Delta \theta_i = (\theta - \theta_i) \text{mod} 2\pi$ ,  $\theta = \text{atan2}(y, x)$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,  $\omega = 2\pi f$  es la velocidad angular de la trayectoria, y  $f$  es la frecuencia entre latidos del ritmo cardíaco.

#### 5. Resultados

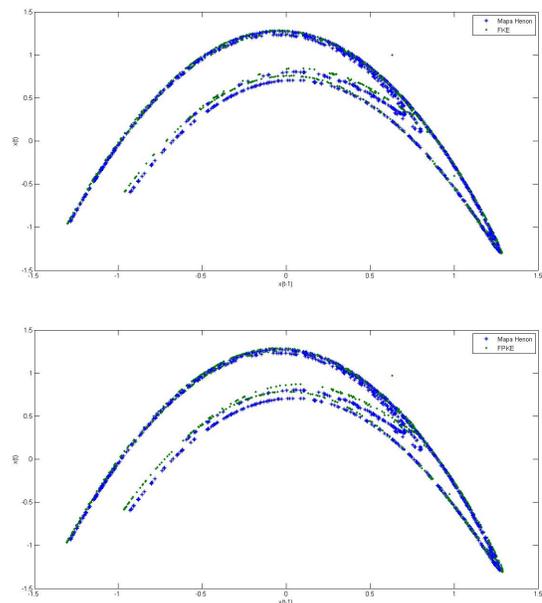


Figura 1: Algoritmos FKE y FPKE para el modelo de Henon

En este trabajo se implementaron los siguientes algoritmos: FKE y FPKE, en dos modelos caóticos de: Henon y Lorenz, además se adaptaron algunas estrategias de computo para filtrar las señales que se generan de un electrocardiograma sintético; es decir, estimar y reconstruir la morfología de las ondas generadas por el modelo sintético. También

se reconstruyen las ondas generadas por señales de un electrocardiograma real tomada de un individuo sano. En primer lugar, se consideró el modelo dado en (13); suponiendo  $\theta = (a, b, \sigma_u^2, \sigma_v^2)$  conocidos y los estados  $\mathbf{x}_{0:t}$  desconocidos. En este estudio no se posee información sobre las observaciones reales del sistema  $\mathbf{y}_{1:t}$  (variables observadas), entonces se supone que los datos se obtienen usando el modelo lineal  $y_{t+1} = 0.3x_t + \eta_t$  (Bremer y Kaplan (2001)), con  $x_0 = 1, y_1 = 0, \eta_t \sim N(0, 0.001)$ . Una vez obtenida la muestra observada, se procede con la inicialización de los parámetros requeridos por los distintos algoritmos propuestos. Para inicializar los filtros se tomaron las especificaciones a priori: para el FKE  $\hat{x}_0^+ = 0.6314, P_0^+ = 1, Q_t = 0.01, R_t = 0.01$  y para el FPKE  $\hat{x}_0^+ = 0.6314, P_0^+ = 1, Q_t = 0.49, R_t = 0.01$ . Los parámetros fueron elegidos como:  $a = 1.4$  y  $b = 0.3$ , para hacer más sencillo el trabajo (ellos también pueden estimarse mediante esta metodología). También se evaluó la eficacia de cada algoritmo, a través de la desviación estándar empírica (DEE); y el tiempo de ejecución (TE) de cada filtro. Los algoritmos fueron implementados en el ambiente de programación **Matlab** en un **Pentium Dual-Core** 2,8 GHz. En el Figura (1), se muestra el mapa verdadero de Henon conjuntamente con las medias a posteriori estimadas por el FKE y el FPKE. Se observa que los filtros se ajustan casi perfectamente al mapa original.

Tabla 1: Comparación de la desviación estándar empírica: modelo Henon.

$\sqrt{\text{Var}(x_{t t})}$	FKE	FPKE
N=50	1.0232	0.8732
N=100	1.0176	0.8596
N=150	1.0247	0.8617
N=200	1.0149	0.8603
CPU Time (seg)	0.010310	1.597840

En la Tabla (1) se muestra un resumen de la desviación estándar empírica de 1000 simulaciones de longitud  $N = 50, 100, 150, 200$  y el tiempo de ejecución de los algoritmos para el modelo de Henon, no se observa diferencias significativas en los errores estimados para los distintos tamaños de

muestras, pero si en los tiempos de ejecución.

En segundo lugar, se consideró el modelo dado en (14). El modelo fue discretizado por el método de Euler de primer orden, considerado  $x_t = x_{t-1} + hf(x_{t-1})$ , con un paso de tamaño  $h = 0,009$ . La ecuación de evolución discretizada es:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t + h(s(y_t - x_t)) + u_t \\ y_{t+1} &= y_t + h(rx_t - y_t - x_t z_t) + v_t \\ z_{t+1} &= z_t + h(x_t y_t - bz_t) + w_t \end{aligned} \quad (16)$$

donde:  $\mathbf{u}_t \sim N(0, \sigma_u^2)$ ,  $\mathbf{v}_t \sim N(0, \sigma_v^2)$  y  $\mathbf{w}_t \sim N(0, \sigma_w^2)$ . En cada paso del tiempo  $t$ , las observaciones se generan a través de una ecuación de observación lineal ([9])

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t + \eta_t$$

donde:  $\mathbf{y}_t = (x_t^+, y_t^+, z_t^+)^T$ ,  $\mathbf{x}_t = (x_t, y_t, z_t)^T$ , y  $\eta_t \sim N(\mathbf{0}, \sigma_\eta^2 \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{0}$  es un vector de ceros, e  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. Para inicializar los filtros, se tomaron las especificaciones a priori: para el FKE

$$\hat{x}_0^+ = \begin{pmatrix} 0.2294 \\ 1.6360 \\ 20.81 \end{pmatrix}, \quad P_0^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_t = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix},$$

$$R_t = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

y para el FPKE:

$$\hat{x}_0^+ = \begin{pmatrix} 0.2294 \\ 1.6360 \\ 20.81 \end{pmatrix}, \quad P_0^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_t = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

En la Figura (2) se muestra el verdadero modelo de Lorenz, conjuntamente con las medias

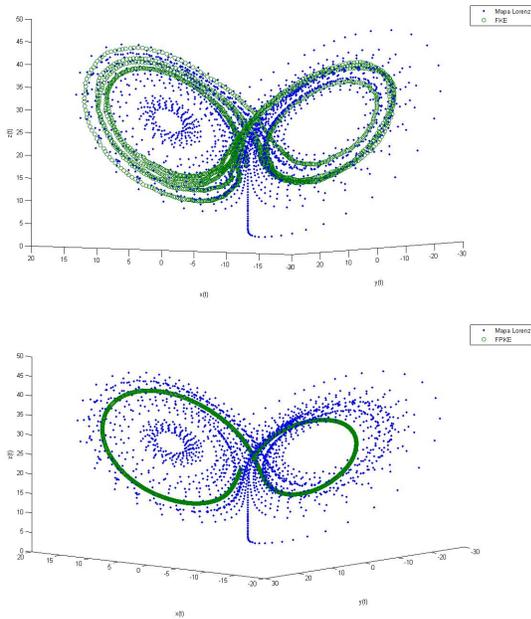


Figura 2: Algoritmos FKE y FPKE para el modelo de Lorenz

Tabla 2: Comparación de la desviación estándar empírica: modelo de Lorenz.

$\sqrt{\text{Var}(x_{it})}$	FKE	FPKE
$N = 50$	7.7864	7.7954
$N = 100$	7.7984	7.7949
$N = 150$	7.7866	7.7956
$N = 200$	7.8004	7.7955
CPU Time (seg)	0.015159	3.278230

a posteriori de los estados estimados por FKE y el FPKE, en los casos se observa buena aproximación de los algoritmos en la reconstrucción del modelo caótico verdadero.

En la Tabla (2) se muestra un resumen de la desviación estándar empírica de 1000 simulaciones de longitud  $N = 50, 100, 150, 200$  y los tiempos de ejecución de los algoritmos en la estimación a posteriori de los estados  $x_{0:t}$  para el modelo de Lorenz; en la tabla no se observan diferencias significativas en los errores, pero si en los tiempos de ejecución.

En tercer lugar, se consideró el modelo dado en (15) para la reconstrucción de una señal de ECG

sintético de [14]. El modelo sintético considerado fue discretizado por el método de Euler de primer orden, considerando  $x_{t+1} = x_t + hf(x_t)$ , con un paso de tamaño  $h = 0.003$ . La ecuación de estado o de evolución discretizada resultante es:

$$\begin{aligned}
 x_{t+1} &= x_t + h(\alpha x_t - \omega y_t) + u_{1t} \\
 y_{t+1} &= y_t + h(\alpha y_t + \omega x_t) + v_{1t} \\
 z_{t+1} &= z_t \\
 &+ h \left( - \sum_{i \in P, Q, R, S, T} a_i \Delta \theta_i \exp \left( - \frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2} \right) - (z_t - z_0) \right) \\
 &+ e_t
 \end{aligned} \tag{17}$$

donde:  $\mathbf{u}_{1t} \sim N(0, \sigma_{\mathbf{u}_1}^2)$ ,  $\mathbf{v}_{1t} \sim N(0, \sigma_{\mathbf{v}_1}^2)$ , y  $\mathbf{e}_t \sim N(0, \sigma_e^2)$ . Por lo general no se disponen de las observaciones experimentales del sistema dinámico que se quiere estudiar, entonces las observaciones requeridas para evolucionar se generan a través de una ecuación de observación lineal sintético (ecuación de observación) como lo señala [9]; es decir

$$\mathbf{r}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \zeta_t,$$

donde:  $\mathbf{r}_t = (x'_t, y'_t, z'_t)^T$ ,  $\mathbf{x}_t = (x_t, y_t, z_t)^T$ , y  $\zeta_t \sim N(\mathbf{0}, \sigma_{\zeta}^2 \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{0}$  es un vector de ceros, y donde la matriz  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. Para inicializar los filtros, los valores iniciales para FPKE fueron los siguientes:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = (1, 0, 0.04)$$

$$P_0^+ = \begin{pmatrix} 0,00001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00001 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00001 \end{pmatrix}$$

$$Q_t = \begin{pmatrix} 0,000001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,000001 & 0 \\ 0 & 0 & 0,000001 \end{pmatrix}$$

$$R_t = \begin{pmatrix} 0,000001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,000001 & 0 \\ 0 & 0 & 0,000001 \end{pmatrix},$$

Los valores iniciales para FKE fueron, los siguientes:

$$\hat{x}_0^+ = (1, 0, 0.04),$$

$$P_0^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_t = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{pmatrix},$$

$$R_t = \begin{pmatrix} 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 \end{pmatrix}.$$

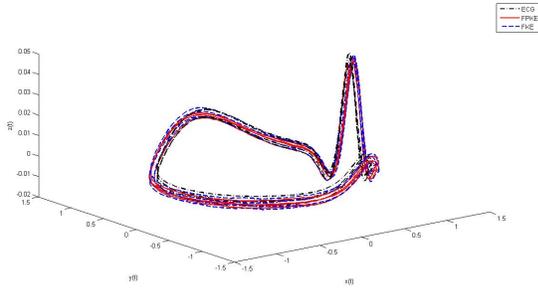


Figura 3: Reconstrucción de trayectorias: ECG sintético, FPKE y FKE.

En la Figura (3), se muestra la morfología que describe los cinco extremos de las ondas P, Q, R, S, y T en el círculo unitario generado por el modelo sintético dado en (17), conjuntamente con los valores estimados por los algoritmos FKE y FPKE, observándose similitud entre picos simulados y los picos estimados.

En la Figura (4) se muestra el electrocardiograma generado por el modelo sintético verdadero, conjuntamente con las medias a posteriori de los estados estimados por el FKE y FPKE, en el gráfico se observa una buena aproximación de los algoritmos propuestos con respecto al modelo sintético.

En la Tabla (3) se muestra un resumen de la desviación estándar empírica para  $N = 5000$

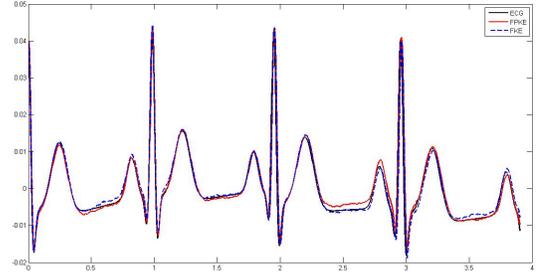


Figura 4: ECG sintético y medias a posteriori estimadas por FPKE y FKE

Tabla 3: Comparación de la desviación estándar empírica: modelo sintético simulado.

Filtros	FPKE	FKE
DEE(z)	0.0026	0.0024
CPU Time (seg)	52.701691	0.472046

partículas de longitud  $M = 200$  usando el modelo sintético del ECG y se estimó la desviación estándar empírica del estado de la variable de interés  $z$ , en la tabla no se observan diferencias significativas en los errores estimados, es decir; la diferencia entre el valor real y el valor estimado es mínima.

Posteriormente y para validar los resultados simulados, se ajusto el modelo sintético ECG, pero ahora usando datos reales tomados sobre un individuo sano disponible en la base de datos physionet que se encuentra en <http://www.physionet.org/physiobank/database/nsrdb/> donde la frecuencia de muestreo fue de 125Hz, la frecuencia cardíaca media fue de 1.2Hz o 72 latidos por minutos. Para inicializar los filtros, los valores iniciales a priori para FPKE fueron los siguientes

$$\hat{x}_0^+ = (1, 0, 0.04), \quad P_0^+ = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$Q_t = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad R_t = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

Los valores iniciales a priori para FKE fueron

$$\hat{x}_0^+ = (1, 0, 0.04), \quad P_0^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_t = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad R_t = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

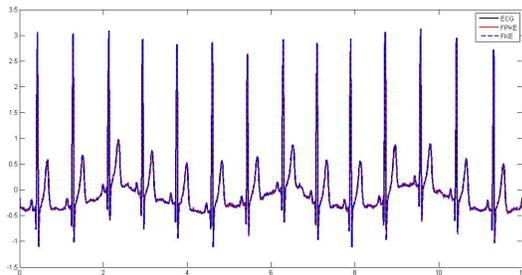


Figura 5: ECG real, FPKE y FKE

En la Figura (5) se muestra una representación de la señal generada por el modelo sintético con datos reales, conjuntamente con las medias a posteriori de los estados estimados por los algoritmos FKE y FPKE se observa que los valores estimados y valores reales tienen el mismo patrón.

Tabla 4: Comparación de la desviación estándar empírica: modelo sintético individuo sano.

Filtros	FPKE	FKE
DEE(z)	0.3176	0.3166
CPU Time (seg)	73.973548	0.568541

En la Tabla (4) se muestra un resumen de la desviación estándar empírica para el modelo sintético con datos reales del ECG, no se observan diferencias significativas en los errores estimados.

## 6. Conclusiones

En este artículo se implementaron los algoritmos: filtro de Kalman extendido y filtro de partículas Kalman extendido para tratar los problemas de

estimación de parámetros (estados) en problemas que tienen comportamientos no lineales. En particular, se consideraron tres estructuras conocidas como: el mapa de Henon, el modelo de Lorenz y el modelo sintético de un electrocardiograma. Se estimaron los estados y se reconstruyeron los atractores generados por los dos primeros sistemas, para el modelo sintético se reconstruyó la morfología de las ondas P, Q, R, S y T, se comparó el modelo sintético simulado y con datos reales. En este estudio se demuestra que los filtros propuestos son una alternativa válida para la estimación de los estados en sistemas dinámicos no lineales. Adicionalmente se estimó la desviación estándar empírica como medida de calidad de estimación de los filtros, observándose poca variabilidad. También se estimó el tiempo de ejecución de los algoritmos obteniéndose diferencias significativas entre FPKE y el FKE.

## Agradecimientos

Esta investigación fue parcialmente financiada por el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad de Carabobo, proyecto CDCH-UC, proyecto 0462-10.

## Referencias

- [1] Einicke, G.A. (2012). *Smoothing, Filtering and Prediction: Estimating the Past, Present and Future*. Rijeka, Croatia: Intech. ISBN 978-953-307-752-9.
- [2] Gelb, A. (1974). *Applied Optimal Estimation*. MIT Press.
- [3] Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering* 82 (1): 35–45. Retrieved 2008-05-03.
- [4] Kalman, R.E.; Bucy, R.S. (1961). *New Results in Linear Filtering and Prediction Theory*. Retrieved 2008-05-03.
- [5] Harvey, A.C. (1990). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press.
- [6] Roweis, S.; Ghahramani, Z. (1999). "A Unifying Review of Linear Gaussian Models". *Neural Computation* 11 (2): 305–345. doi:10.1162/089976699300016674. PMID 9950734.

- [7] Chui, C, and Chen, G. (2009). Kalman Filtering With Real-Time Applications. Springer Ser. Info.Sci., Fourth Edition. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [8] Liu, W.; Principe, J.C. and Haykin, S. (2010). Kernel Adaptive Filtering: A Comprehensive Introduction. John Wiley.
- [9] Moriya, N. (2011). Primer to Kalman Filtering: A Physicist Perspective. New York: Nova Science Publishers, Inc. ISBN 978-1-61668-311-5.
- [10] Spivey, Ben; Hedengren, J. D. and Edgar, T. F. (2010). Constrained Nonlinear Estimation for Industrial Process Fouling. *Industrial and Engineering Chemistry Research* 49 (17): 7824–7831. doi:10.1021/ie9018116.
- [11] Sánchez, L.; and Infante, S. (2013) Reconstruction of Chaotic Dynamic Systems Using Non-Linear Filters. *Chilean Journal of Statistics*. Vol. 4, No. 1, April 2013, 35-54.
- [12] Hénon, M. 1976. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics* 50 (1): 69–77.
- [13] Lorenz, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, volumen 20, January 7.
- [14] McSharry, P; Clifford, G; Tarassenko, L; and Smith, L. (2003). A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 50, 3, 289 – 294.