

UNIVERSIDAD DE CARABOBO

Facultad de Experimental de Ciencias y Tecnología

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

*Influencia de la topología en la distribución de riqueza
en un modelo determinista de intercambio económico*

*Transition from Pareto to Boltzmann-Gibbs behavior in
a deterministic economic model*

*Synchronization induced by intermittent versus partial drives
in chaotic systems*

Global interactions, information flow, and chaos synchronization

Producción Intelectual Acreditada presentada ante la Ilustre

Universidad de Carabobo

como mérito para ascender a la categoría de:

Profesor Titular

DR. ORLANDO ALVAREZ LLAMOZA



Valencia, Abril de 2014



ACTA

VEREDICTO DEL TRABAJO DE ASCENSO PRESENTADO POR EL Prof. ORLANDO ALVAREZ COMO CREDENCIAL DE MERITO PARA EL ASCENSO A LA CATEGORIA DE PROFESOR TITULAR.

Quienes suscribimos, Profesores Dra. Luciana Scarioni, Dr. Saba Infante y Dr. Rolando Gaitan, miembros del jurado designado por el Consejo de Facultad de la Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología FACyT de la Universidad de Carabobo, según oficio N° CF-126-2014, de fecha 21.05.2014 y recibido el 02.06.2014, para evaluar la validez cualitativa y cuantitativa de los productos presentados por el **Prof. ORLANDO ÁLVAREZ CI: 7.088.947**, como credencial de mérito para el ascenso a la categoría de Prof. **TITULAR**, dejamos constancia de lo siguiente:

Leído el trabajo por cada uno de los suscritos, procedimos a constituirnos formalmente en jurado el 09 de Junio de 2014 y convinimos en evaluar la validez cualitativa y cuantitativa de los productos presentados como credencial de mérito para el ascenso a la categoría de **Prof. TITULAR**, de acuerdo a lo establecido en el Estatuto del Personal Docente y de Investigación de la Universidad de Carabobo.

El Trabajo de Ascenso presentado esta constituido por los siguientes cuatro (4) productos de investigación, que se citan a continuación:

- Artículo: *"Influencia de la topología en la distribución de riqueza en un modelo determinista de intercambio económico"*, publicado en la Revista Científica de la UNET (Universidad Nacional del Táchira), en el volumen 23, número 1, 2011, págs 61-68. La Revista Científica de la UNET está indizada en: Latindex-Catálogo, Latindex-Directorio y Revenicyt.
- Artículo: *"Transition from Pareto to Boltzmann-Gibbs behavior in a deterministic economic model"*, publicado en la Revista Physica A en el volumen 388, número 17, 2009, págs 3521-3526. La Revista Physica A está indizada en: Science Citation Index. Science Index Expanded, El

Compédex Plus, INSPEC, Copus, Astrophysics Data System y Current Contents/Physics, Chemical & Earth Sciences.

- Artículo: "*Synchronization induced by intermittent versus partial drives in chaotic systems*", publicado en la Revista International Journal of Bifurcation and Chaos, en el volumen 20, número 2, 2010, págs 323-330. La Revista International Journal of Bifurcation and Chaos, está indizada en: Science Citation Index, Sience Citation Index Expanded, Compendex, INSPEC, Scopus y Current Contents/Physics, Chemical & Earth Siences.
- Artículo: "*Global interactions, information flow and chaos synchronization*" , publicado en la Revista Physical Review E, en el volumen 88, 042920, 2013, págs 042920-1 hasta 042920-8. La Revista Physical Review E, está indizada en: Science Citation Index Expanded, INSPEC, Medline y Physics Abstracts.

En virtud de lo expuesto, emitimos el presente veredicto aprobatorio del trabajo de Ascenso sometido a nuestra consideración.

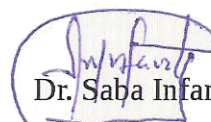
En fé de todo lo cual levantamos y firmamos la presente acta en Valencia, a los 9 días del mes de Junio del año 2014



Dr. Rolando Gaitan

Miembro Principal del Jurado

FACyT UC



Dr. Saba Infante

Miembro Principal del Jurado

FACyT UC



Dra. Luciana Scarioni

Coordinadora

FACyT UC

*Hay quien se pasa la vida entera leyendo sin conseguir nunca ir más allá de la lectura,
se quedan pegados a la página, no entienden que las palabras son sólo piedras puestas
atravesando la corriente de un río, si están allí es para que podamos llegar a la otra
margen, la otra margen es lo que importa.*

JOSÉ SARAMAGO

*Ningún hombre es una isla, algo completo en sí mismo;
todo hombre es un fragmento del continente, una parte
de un conjunto.*

JOHN DONNE

Agradecimientos

Mi desarrollo académico e intelectual y en especial, la producción intelectual acreditada presentada a continuación y toda la elaborada a lo largo de mi permanencia en la Universidad de Carabobo, no se hubiera podido realizar sin el apoyo de personas e instituciones, que de una u otra manera me han brindado su respaldo en estos años de vida universitaria.

Agradezco a mi familia, mi esposa Manuela y a mi hijo Adrián, que me han apoyado y estado siempre conmigo, en mis estudios y en mi trabajo. A mi madre, mis herman@s, mis ti@s, mi abuela† y a mi suegra. A mis segundas familias los Lopes-Moura, Echeverría-Calderón, González-Méndez, Alvarez-Suescun, Mariño-Antunes y Lopes-Mackenzie. Puedo decir que a mi familia le debo todo, desde mis fracasos hasta mis triunfos.

Agradezco a mis amigos y colaboradores del grupo de los “caóticos” de la ULA, a mi tutor eterno Mario Cosenza, a mi compadre Carlos Echeverría, mi buen amigo Javier González, a Gilberto Paredes, Kay Tucci, Antonio Parravano, Juan Carlos González, José Luis Herrera, Miguel Pineda y Miguel Escalona. Citando a John Bardeen “ la ciencia es un esfuerzo de colaboración. Los resultados combinados de varias personas que trabajan juntas es a menudo mucho más eficaz de lo que podría ser el de un científico que trabaja solo ”

Agradezco a mis compañeros de la Universidad de Carabobo, los del Departamento de Física Eber Orozco, Damarys Serrano, Luciana Scarioni, Rolando Gaitan, Miguel Angel Suarez, José J. Rodríguez, Juan Mateu, Richard Barrios, Miguel Rodríguez, Otto Rendón, Angel Rivas, Rafael Muñoz, Aaron Muñoz, José Albornoz, Alfredo Macías, Freddy Narea, Oscar Sucre y Nelson Falcón. Y a los que no son del Departamento, Nancy Salinas, José Marcano, Saba Infante, José Guaregua, Pedro Linares, Carolina Corao, Renny Pacheco, Eucandis Fuentes, y a muchos otros que por no estar en ésta breve lista debido a mi descuido y/o mala memoria no implica que les tenga unas palabras de agradecimiento, ya que todos, de una u otra forma colaboraron e influyeron en mi desempeño en la UC.

Al personal administrativo del Departamento, Luis Matos, Jower Ruiz y Dayana Parra. Al personal del decanato en especial de la Oficina de Asuntos Profesorales, al personal de Control de Estudios y al de Telemática

Y finalmente dentro de las personas debo reconocer a mis estudiantes, sobre todo a mis tesisistas David Romero, Vianney Gimenez, Wilder Iglesias, Aquilez González, José Luis Casa Diego, Gustavo HArgenis López, Linmar Piña y Douglas Avendaño. “Con mis maestros he aprendido mucho; con mis colegas, más; con mis alumnos todavía más” proverbio hindú.

Dentro de las instituciones agradezco a mi Alma Mater, La ilustre Universidad de Los Andes, gracias a ella soy profesionalmente lo que soy hoy. Mi paso por esa institución, desde mi Licenciatura, Maestría y Doctorado cambió mi forma de ver y apreciar el mundo y me dio las herramientas para ser un profesional competitivo y cabal.

Por último agradezco a la ilustre Universidad de Carabobo, que me acogió dándome trabajo y proporcionó el campo para aplicar lo que he aprendido y sigo aprendiendo en el mundo académico. Dicha institución me apoyó económicamente en mis estudios doctorales, conjuntamente con la OPSU, y son responsables también de mi desarrollo intelectual.

A tod@s ell@s muchas gracias!

El científico encuentra su recompensa en lo que Henri Poincare llama el placer de la comprensión, y no en las posibilidades de aplicación que cualquier descubrimiento pueda conllevar.

ALBERT EINSTEIN

Presentación

La siguiente Producción Intelectual Acreditada presentada como credencial de mérito para el ascenso a la categoría de Profesor Titular, consta de cuatro publicaciones tipo **A**, según el artículo 196 del *Estatuto del Personal Docente y de Investigación* de la Universidad de Carabobo (EPDI-UC). Estos trabajos de investigación están enmarcados dentro de las líneas de investigación del Departamento de Física, Grupo de Física Computacional, en el área de Sistemas Dinámicos y Sistemas Complejos.

Todos los trabajos fueron publicados luego de mi ascenso a la categoría de Profesor Asociado, realizado el 06 de octubre de 2008 y no han sido utilizados para otro fin académico, según reza el artículo 190 del EPDI-UC.

Las publicaciones fueron realizadas conjuntamente con algunos de los siguientes colaboradores; Dr. Mario Cosenza, Universidad de Los Andes, Mérida; Dr. Javier González, Universidad Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal; Gilberto Paredes, Universidad Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal y Ricardo López Ruiz, Universidad de Zaragoza, España.

Para los artículos publicados en revistas internacionales en idioma inglés, se presenta un condensado en idioma castellano, según ordena el artículo 198 del EPDI-UC. Estos condensados, si bien no son una traducción completa de los trabajos, van más allá de un simple resumen y representan casi todo el contenido del trabajo original. Al final de cada condensado se incluye el artículo original publicado.

En el capítulo 1 se presenta el trabajo *Influencia de la topología en la distribución de riqueza en un modelo determinista de intercambio económico*, publicado en la **Revista Científica de la UNET** (Universidad Nacional del Táchira), en el volumen 23, número 1, desde la página 61 hasta la 68, en el año 2011. La **Revista Científica de la UNET** está indexada en Latindex-Catálogo, Latindex-Directorio y Revencyt (Registro de Publicaciones Científicas y Tecnológicas Venezolanas).

El capítulo 2 corresponde al artículo *Transition from Pareto to Boltzmann-Gibbs behavior in a deterministic economic model*, publicado en la revista **Physica A**, en el

volumen 388, número 17, desde la página 3521 hasta la 3526, en el año 2009. La revista **Physica A** está indizada en Science Citation Index, Science Citation Index Expanded, El Compendex Plus, INSPEC, Scopus, Astrophysics Data System, y Current Contents/Physics, Chemical & Earth Sciences, entre otros.

En el capítulo 3 se presenta el trabajo *Synchronization induced by intermittent versus partial drives in chaotic systems*, publicado en la Revista **International Journal of Bifurcation and Chaos**, en el volumen 20, número 2, desde la página 323 hasta la 330, en el año 2010. La revista **International Journal of Bifurcation and Chaos** está indizada en Science Citation Index, Science Citation Index Expanded, Compendex, Scopus, INSPEC, y Current Contents/Physics, Chemical & Earth Sciences, entre otros.

Finalmente, en el capítulo 4 se presenta el artículo *Global interactions, information flow and chaos synchronization*, publicado en la revista **Physical Review E**, en el volumen 88, 042920, desde la página 042920-1 hasta la 042920-8, en el año 2013. La revista **Physical Review E** está indizada en Current Physics Index, INSPEC, Medline, Physics Abstracts y Science Citation Index Expanded entre otros.

Índice

Agradecimientos	I
Presentación	III
1. Influencia de la topología en la distribución de riqueza en un modelo determinista de intercambio económico	1
Artículo publicado	2
2. Transition from Pareto to Boltzmann-Gibbs behavior in a deterministic economic model	10
2.1. Modelo determinístico económico es una red bidimensional	11
2.2. Transición de comportamiento Pareto a Boltzmann-Gibbs	13
2.3. Conclusiones	14
Artículo publicado	15
3. Synchronization induced by intermittent versus partial drives in chaotic systems	21
3.1. Sistema de mapas forzados intermitentemente	22
3.2. Sistema de mapas forzados parcialmente	24
3.3. Redes dinámicas	25
3.4. Conclusiones	25
Artículo publicado	26
4. Global interactions, information flow and chaos synchronization	34
4.1. Campos globales de interacción	35
4.1.1. Estados sincronizados	36
4.2. Interacción global homogénea	37

4.2.1. Sincronización completa	37
4.2.2. Sincronización generalizada	38
4.3. Interacciones globales heterogéneas	39
4.3.1. Sincronización completa	39
4.4. Conclusiones	40
Artículo publicado	41

*¿No es extraño? Los mismos que se ríen de los adivinos
se toman en serio a los economistas.*

ANÓNIMO



Influencia de la topología en la distribución de riqueza en un modelo determinista de intercambio económico

Artículo publicado en La Revista Científica de la UNET (Universidad Nacional del Táchira), en el volumen 23, número 1, desde la página 61 hasta la 68, año 2011.

La Revista Científica de la UNET, ISSN 1316-869X, es una publicación periódica semestral que se encuentra indizada en Latindex-Catálogo, Latindex-Directorio y Revencyt (Registro de Publicaciones Científicas y Tecnológicas Venezolanas).
<http://www.latindex.unam.mx/buscador/ficRev.html?opcion=1&folio=15384>.
Ver apéndice.

INFLUENCIA DE LA TOPOLOGÍA EN LA DISTRIBUCIÓN DE RIQUEZA EN UN MODELO DETERMINISTA DE INTERCAMBIO ECONÓMICO

(Influence of topology on the wealth distribution in a deterministic model of economic exchange)

^{1,2}González-Estévez, J.; ²Cosenza, M. G.; ³López-Ruiz, R.; ^{4,2}Alvarez-Llamoza, O.

¹Laboratorio de Física Aplicada y Computacional,

Universidad Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal, Venezuela,

²Centro de Física Fundamental, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela,

³DIIS y BIFI, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, España,

⁴Departamento de Física, FACyT, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela,

Correo Electrónico: jgonzale@unet.edu.ve

RESUMEN

Se investiga un modelo determinista de mapas acoplados en redes de una y de dos dimensiones para describir la interacción económica de un conjunto de agentes. La dinámica de cada mapa o agente está controlada por dos parámetros. El primero está asociado con la capacidad de crecimiento del agente y el otro es un término de control que representa la presión del ambiente local que evita un crecimiento exponencial. Se calcula la probabilidad de distribución de riqueza en el sistema en función de estos parámetros. Se encuentran distribuciones de tipo exponencial (Boltzmann-Gibbs) o de tipo de ley de potencia (Pareto) en diferentes regiones de parámetros. Estas distribuciones son típicas de sistemas económico reales. Se encuentra que las distribuciones de probabilidad también dependen de la dimensionalidad de la red y del número de vecinos que participan en la interacción local. Se calcula el coeficiente de Gini para caracterizar la desigualdad en la distribución de la riqueza en el sistema en función de los parámetros. Nuestros resultados muestran que procesos completamente deterministas pueden dar lugar a fenomenologías observadas en sociedades reales.

Palabras Clave: Econofísica, modelos computacionales, redes de mapas acoplados, distribuciones de Pareto y Boltzmann-Gibbs.

ABSTRACT

We investigate a deterministic model of coupled maps lattices in one and two dimensions to describe the economic interaction of a set of agents. The dynamics of each map or agent is controlled by two parameters. The first one is associated to an agent's growth capacity and the other is a control term that represents the local environment pressure that inhibits an exponential increase. The probability distribution of wealth in the system is calculated as a function of these parameters. It is found that these distributions can exhibit an exponential (Boltzmann-Gibbs) or a power-law (Pareto) behavior in different regions of parameters. Such distributions are typical of real economic systems. These probability distributions also depend on the dimensionality of the lattice and on the number of neighbors that participate in the local interactions. To characterize the inequality of the wealth distribution in the system, we calculate the Gini coefficient as a function of the parameters. Our results show that entirely deterministic processes can lead to the phenomenology observed in real societies.

Key Words: Econophysics, computational models, coupled map lattices, Pareto and Boltzmann-Gibbs distributions.

Recibido: 19/05/2008
Aprobado: 07/07/2009
Versión Final: 15/07/2009

VOL.23(1):61-68. 2011.

161

INTRODUCCIÓN

La desigualdad en la distribución de la riqueza es un hecho bien documentado de la actividad económica. El origen de este fenómeno está relacionado con la interacción de la macroeconomía en la microeconomía, lo que conlleva, en muchos casos, la intervención de circunstancias aleatorias fuera del control de los agentes económicos. Así, está reportado que el ingreso de alrededor del 95% del total de la sociedad, justamente aquel colectivo conformado por agentes con ingresos medios y bajos, siguen una distribución exponencial (comportamiento Boltzmann-Gibbs; BG para abreviar de aquí en adelante), mientras que el 5% restante de la sociedad, asociada a los altos ingresos, se distribuye según una función potencial, que en el contexto económico se conoce como ley de Pareto (Dragulescu y Yakovenko, 2003; Yakovenko, 2007). Diferentes modelos (Dragulescu y Yakovenko, 2000; Chakraborti y Chakraborti, 2000; Chatterjee *et al.* 2004; Angle, 2006) con ingredientes aleatorios han sido propuestos para reproducir estas distribuciones de ingresos que se encuentran comunmente en datos económicos reales (Levy y Solomon, 1997, Dragulescu y Yakovenko 2001a; Dragulescu y Yakovenko, 2001b; Souma, 2001).

Por otro lado, en muchos casos no es suficiente invocar mecanismos aleatorios para la distribución de la riqueza en las sociedades humanas, puesto que éste no es un proceso completamente fortuito, sino que presenta elementos de racionalidad y determinismo. El objeto de este trabajo consiste en demostrar la viabilidad de este punto de vista determinista y, por tanto, presentar una alternativa frente a la aleatoriedad como característica predominante en la dinámica de intercambio económico que conduce a las distribuciones de riqueza observadas en las sociedades. Específicamente, estudiamos un modelo determinista y conceptualmente simple basado en agentes interactivos donde la interacción de cada agente se realiza con sus vecinos más próximos en el espacio. El modelo dispone de pocos parámetros, los cuales al variar pueden conducir a distribuciones de probabilidad de riqueza de tipo BG o Pareto.

MÉTODO

El modelo consiste en un sistema dinámico espacio temporal representado por N mapas ubicados en una red (unidimensional o bidimensional), con interacciones locales y con condiciones de contorno periódicas. Cada mapa representa un agente económico: una compañía, un país u otra entidad económica. El estado de cada agente, identificado por un coeficiente ($i = 1, 2, \dots, N$),

está caracterizado por un grado de libertad, $x_t^i \in [0, \infty)$ denotando la fuerza, abundancia o riqueza del agente en el tiempo discreto t . El sistema evoluciona en el tiempo de forma síncrona, es decir, los estados de todos los agentes se actualizan simultáneamente en cada paso de tiempo.

Cada agente actualiza su estado de acuerdo a su estado presente y a los estados de su vecindad. De esta forma, el valor del estado x_{t+1}^i está dado por el producto de dos factores: 1) el crecimiento natural del agente $r_i x_t^i$ con un tasa local positiva r_i (cuyo valor es igual o mayor a 1, para garantizar el crecimiento de este término), y 2) un término de control que limita el crecimiento del agente con respecto al ambiente o su entorno local, Ψ_t^i . De esta manera, la dinámica del sistema esta descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$x_{t+1}^i = r_i x_t^i \exp(-|x_t^i - a_i \Psi_t^i|),$$

$$\Psi_t^i = \frac{1}{n(i)} \sum_{j \in v(i)} x_t^j. \quad (1)$$

El sistema (1) corresponde a una red de mapas acoplados, donde $x_t^i \geq 0$ indica el estado del agente i para el tiempo discreto t , $j \in v(i)$ es el conjunto de agentes en la red acoplados con el agente i y $n(i)$ es la cardinalidad de este conjunto; el parámetro a mide la intensidad del acoplamiento del agente i con su vecindad; que también puede ser interpretado como la presión ambiental local ejercida sobre el agente i (Ausloos *et al.* 2003). La función exponencial negativa actúa como un inhibidor que limita este crecimiento con respecto al campo local (Sánchez y López-Ruiz, 2005; Sánchez *et al.* 2007; López-Ruiz *et al.* 2007a; López-Ruiz *et al.* 2007b; González *et al.* 2008).

Por motivos de simplicidad, estudiaremos escenarios con distribución homogénea de los parámetros. Así, reescribimos los parámetros como r (suponiendo que los agentes poseen la misma capacidad de crecimiento) y a (que corresponde a una presión de selección local homogénea). Consideramos un sistema descrito por las Ecs. (1) y (2), formado por $N=10^5$ mapas con condiciones iniciales completamente aleatorias distribuidas uniformemente en el intervalo $x_0^i (1, 100)$.

En general, el comportamiento colectivo del sistema puede ser caracterizado mediante el campo medio instantáneo de la red o actividad del sistema, H_t definido como:

$$H_t = \frac{1}{N} \sum_i^N x_t^i. \quad (2)$$

Adicionalmente, el coeficiente de Gini (Rodríguez-Achach y Huerta-Quintanilla, 2006),

$$G_t = \frac{1}{2N^2 H_t} \sum_{i,j=1}^N |x_i^t - x_j^t| \quad (3)$$

mide el grado de desigualdad relativa en la distribución de riqueza en el instante t . Este coeficiente está acotado entre los valores $G_t = 0$ (todos los elementos tienen la misma riqueza; esto es, perfecta equidad, $x_i^t = x_j^t, \forall i, j$) y $G_t = 1$ (un elemento posee toda la riqueza del sistema $\sum_{i=1}^N x_i^t$; es decir, máxima desigualdad). En consecuencia, cuanto menor es el valor del coeficiente Gini, menor es la desigualdad y viceversa (Bouchaud y Potters, 2000; Mantegna y Stanley, 2000; Voit, 2002).

Para examinar las condiciones en que el sistema puede exhibir los comportamientos estadísticos tipo BG o Pareto, son realizadas cien simulaciones para cada valor de barrido en el parámetro a , con el fin de disminuir las fluctuaciones estadísticas en los cálculos (Reed, 2002).

RESULTADOS

Régimen Boltzmann-Gibbs y Régimen Pareto

Una distribución de probabilidad tipo exponencial, o Boltzmann-Gibbs (BG), de una variable x presenta la

forma funcional $P(x) \sim e^{-\mu x}$, donde μ es el exponente que caracteriza esta distribución. Por otro lado, una distribución de probabilidad tipo ley de potencia, o Pareto (P), se comporta como $P(x) \sim x^{-\alpha}$ donde α es un exponente característico.

La figura 1 muestra las distribuciones de probabilidad $P(x)$ resultantes para el sistema (1) unidimensional en un tiempo asintótico donde el sistema es estadísticamente estacionario, para distintos valores de los parámetros a y r . Encontramos ambos tipos de distribuciones, con exponentes característicos calculados a partir de las pendientes de las gráficas por el método de mínimos cuadrados en una regresión semilogarítmica o bilogarítmica, según corresponda.

Para garantizar la confiabilidad de los resultados obtenidos para las distribuciones tipo BG o P, requeriremos que el valor de la correlación β en el cálculo de las pendientes correspondientes satisfaga el criterio $|\beta| \geq 0,96$.

Las figuras 2 y 3 muestran los valores de la correlación del ajuste exponencial y potencial β , en función del parámetro a , para distintos tipos de redes en una y en dos dimensiones, para un valor fijo $r = 10$. Esto permite seleccionar aquellas regiones de parámetros con distribuciones tipo BG y Pareto, que satisfagan el criterio $|\beta| \geq 0,96$.

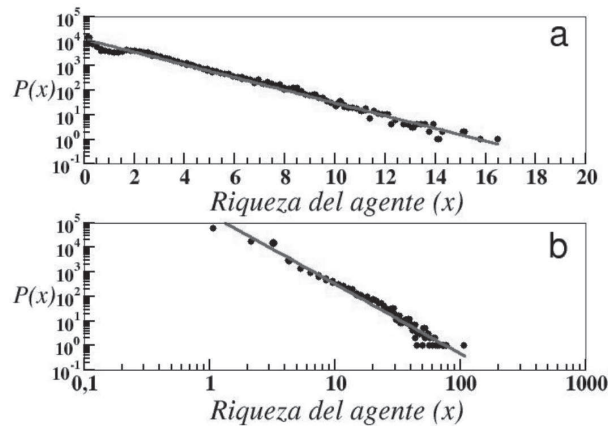


Figura 1. Distribuciones de probabilidad $P(x)$ para diferentes valores de parámetros en un sistema (1) unidimensional con $N = 10^5$, para $t = 10000$. (a) Comportamiento BG, con $a = 0,60$ y $r = 4$; el exponente es $\mu = -0,2593$ y coeficiente de correlación es $\beta = -0,9943$. (b) Ley de potencia (P), con $a = 0,92$ y $r = 8$; el exponente es $\alpha = -2,8469$, con $\beta = -0,9849$.

En el caso unidimensional con interacción con los dos vecinos más cercanos, se encuentra una región BG $a \in (0,179 - 0,342)$ y dos regiones Pareto $a \in (0,434 - 0,993)$ y $a \in (1,025 - 1,893)$. En el caso bidimensional con cuatro vecinos (o vecindad de Von Neumann) existe una región BG $a \in (0,219 - 0,546)$ con dos regiones Pareto $a \in (0,611 - 0,994)$ y $a \in (1,015 - 1,887)$. Finalmente, en el caso bidimensional, pero con ocho vecinos (vecindad tipo Moore) se encuentra una zona BG $a \in (0,300 - 0,800)$ y una región Pareto para $a \in (0,962 - 2,1)$. Estos valores son el resultado de haber promediado cien realizaciones en cada barrido del parámetro a , de tal forma que nos referimos a valores promedios.

Una vez delimitadas las regiones de parámetros que exhiben comportamientos tipo BG y Pareto, según el criterio establecido, mostramos en la figura 4 los valores de los exponentes característicos α y μ en función del parámetro a .

En datos reales se ha encontrado que la economía del Reino Unido presenta una distribución de Pareto para un rango de ingresos altos con un valor de $\alpha = 1,9$ en el año 1996; mientras que para la economía de EE.UU. se obtiene $\alpha = 1,7$ para 1997. Pareto, en su obra clásica (Pareto 1897), estableció este exponente como $\alpha = 1,5$ para varios países, siendo este el valor promedio de los resultados obtenidos en su trabajo. Levy y Solomon, 1997; Klass *et al.* 2006; Klass *et al.* 2007 indican un valor promedio $\alpha = 1,49$, tomando los datos de la lista “Forbes 400” (las cuatrocientas personas más ricas sobre el planeta) durante los años 1988 al 2003; y Souma reporta un valor de $\alpha = 2,05$ dentro de los ingresos más altos en Japón (Souma, 2001; Souma, 2002). Los resultados de la figura 4 muestran que es posible obtener un amplio rango de valores de este exponente, incluyendo valores realistas, mediante la variación continua de un parámetro en nuestro modelo determinista de mapas acoplados.

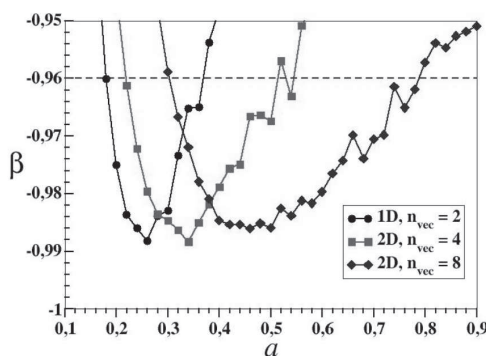


Figura 2. Coeficiente de correlación β en función del parámetro a en la región de comportamiento BG para distintos tipos de redes, con $N = 10^5$ y $r = 10$ fijo. El cálculo corresponde a $t = 10000$. La línea punteada horizontal corresponde al valor $\beta = -0,96$.

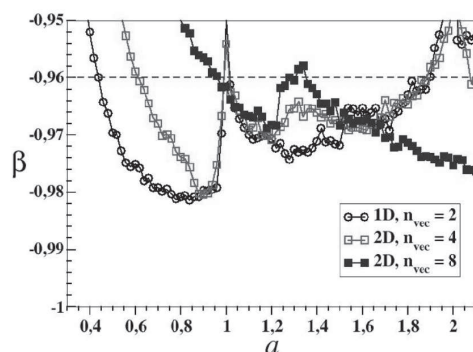


Figura 3. Coeficiente de correlación β en función del parámetro a en la región de comportamiento tipo ley de potencia (Pareto) para distintos tipos de redes, con $N = 10^5$ y $r = 10$ fijo. El cálculo corresponde a $t = 10000$. La línea punteada horizontal corresponde al valor $\beta = -0,96$.

Riqueza promedio

El campo medio H_t ofrece información acerca del valor medio promedio de la riqueza en el sistema. En la figura 5 encontramos que los valores máximos y mínimos en las regiones BG son para el caso unidimensional: $H_t(\text{mín})=2,471$ y $H_t(\text{máx})=2,597$, en el caso bidimensional con cuatro vecinos se obtiene que $H_t(\text{mín})=2,222$ y $H_t(\text{máx})=2,644$ y finalmente en dos dimensiones y un entorno local de ocho vecinos se presenta un $H_t(\text{mín})=1,901$ y $H_t(\text{máx})=2,640$.

Para las regiones cuyo comportamiento sigue la ley de Pareto, y tomando como referencia dicha zona antes de $a=1$, en el caso unidimensional se tiene que $H_t(\text{mín})=1,294$ y $H_t(\text{máx})=2,339$ y con dos dimensiones

y una interacción local de 4 vecinos, se obtiene $H_t(\text{mín})=1,223$ y $H_t(\text{máx})=2,136$. Posterior a $a=1$ en el caso unidimensional se tiene que $H_t(\text{mín})=1,213$ y $H_t(\text{máx})=1,393$ y con dos dimensiones y una interacción local de cuatro vecinos, se obtiene $H_t(\text{mín})=1,109$ y $H_t(\text{máx})=1,200$.

En contraste, para el modelo bidimensional con vecindad de Moore (8 vecinos), se encuentra únicamente una región tipo Pareto cuya riqueza mínima promedio es $H_t(\text{mín})=1,041$ y la riqueza máxima promedio encontrada es $H_t(\text{máx})=1,701$.

Nótese que la riqueza promedio en el sistema puede ser afectada, tanto por los valores de los parámetros, como por la geometría del sustrato espacial donde ocurren las interacciones.

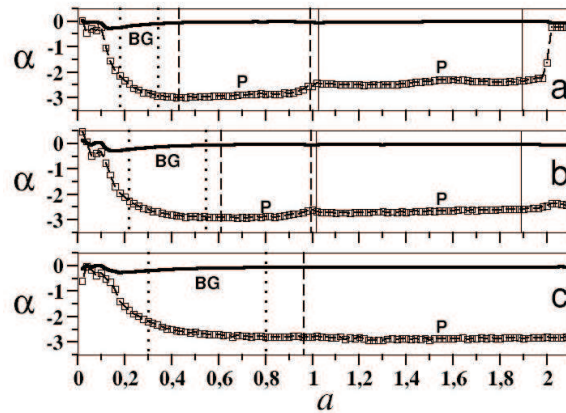


Figura 4. Exponentes característicos en las distribuciones tipo BG (línea continua) y tipo P (línea punteada) en función del parámetro a . (a) red unidimensional; (b) red bidimensional con 4 vecinos; (c) red bidimensional con 8 vecinos. En todos los casos $r=10$, $N=10^5$, $t=10000$. Las regiones BG y Pareto que no cumplen con el criterio $|\beta| \geq 0,96$ están acotadas.

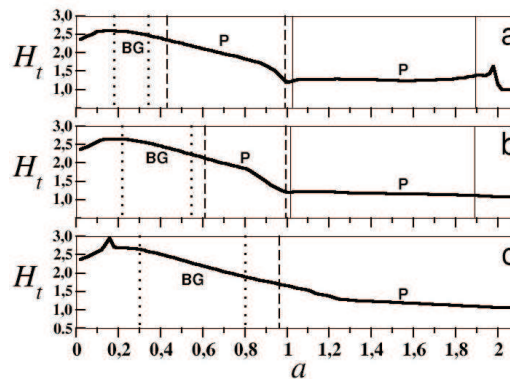


Figura 5. Campo medio H_t en función del parámetro a . (a) red unidimensional; (b) red bidimensional con 4 vecinos; (c) red bidimensional con 8 vecinos. En todos los casos $r=10$, $N=10^5$, $t=10000$. Las regiones BG y Pareto que no cumplen con el criterio $|\beta| \geq 0,96$ están acotadas.

Coefficiente de Gini

La figura 6 muestra el coeficiente de Gini, G_t , calculado con la ecuación (3), en función del parámetro a , para distintas redes. Se aprecia que el comportamiento del coeficiente de Gini es cualitativamente muy similar en el rango $a \in (0 - 0,82)$.

Separando la influencia de la topología en las distintas redes, se observa en la figura 7 que los valores máximos y mínimos del coeficiente de Gini, G_t , en las regiones BG son para el caso unidimensional: $G_t(\text{mín}) = 0,479$ y $G_t(\text{máx}) = 0,633$, en el caso bidimensional con cuatro vecinos se obtiene que $G_t(\text{mín}) = 0,507$ y $G_t(\text{máx}) = 0,723$ y finalmente en dos dimensiones y un entorno local de ocho vecinos se presenta un $G_t(\text{mín}) = 0,576$ y $G_t(\text{máx}) = 0,783$.

Para las regiones cuyo comportamiento sigue la ley de Pareto, y tomando como referencia dicha zona antes de $a=1$, en el caso unidimensional se tiene que $G_t(\text{mín}) = 0,688$ y $G_t(\text{máx}) = 0,703$ y, con dos dimensiones y una interacción local de cuatro vecinos, se obtiene

$G_t(\text{mín}) = 0,678$ y $G_t(\text{máx}) = 0,742$. Posterior a $a = 1$ en el caso unidimensional se tiene que $G_t(\text{mín}) = 0,691$ y $G_t(\text{máx}) = 0,780$ y con dos dimensiones y una interacción local de cuatro vecinos, se obtiene $G_t(\text{mín}) = 0,683$ y $G_t(\text{máx}) = 0,714$.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

De la figura 2 se obtiene una distribución exponencial $P(x) \sim e^{-\mu x}$ del tipo BG, con un exponente característico $\mu = 0,2593$. Haciendo una analogía termodinámica para este tipo de comportamiento exponencial, se puede definir una especie de “temperatura”, $T = 1/\mu$, que para este caso particular, toma el valor $T = 3,84$.

Como ya se ha mostrado en la figura 3, es posible encontrar regiones cuyo comportamiento obedece a una ley de potencia $P(x) \sim x^{-\alpha}$ en el espacio de parámetros (a, r). El exponente α de esta distribución, para este caso en concreto, resulta ser $\alpha = 2,84$, el cual está en acuerdo con los exponentes característicos de Pareto derivados de datos económicos reales.

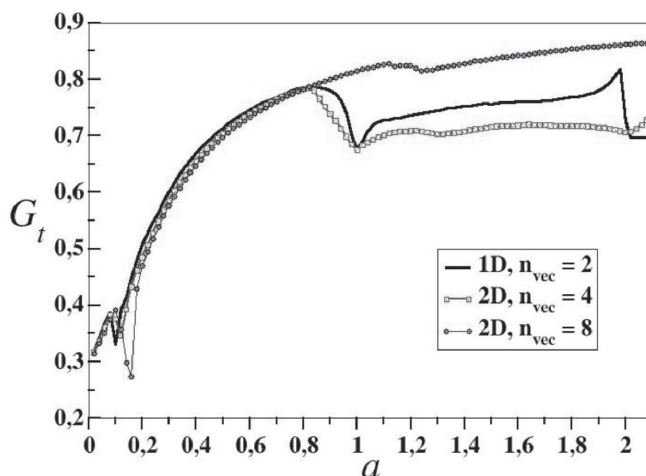


Figura 6. Coeficiente de Gini vs. a para $t = 10^4$, calculado sobre el promedio de 100 realizaciones para cada valor de a , para distintas redes, con $r = 10$, $N = 10^5$.

Se observa en términos cualitativos que la riqueza media promedio (Figura 5) y el coeficiente de Gini (Figura 7) están relacionados. En las regiones de comportamiento BG se manifiesta que la riqueza media promedio es mayor con respecto a las zonas Pareto, y los correspondientes coeficientes de Gini indican que la riqueza está mejor distribuida en las regiones BG que en su contraparte, resultado que está acorde con lo reportado en la literatura. En lo que respecta a la dimensionalidad, se encuentra en la distribución tipo BG, un desplazamiento de esta región hacia valores mayores del parámetro a , y un ensanchamiento en la medida que la dimensionalidad y el número de vecinos interactivos aumenta.

Nuestros resultados muestran que es posible, con un modelo determinista de mapas acoplados, obtener distribuciones de probabilidad de riquezas similares a las encontradas en sociedades reales.

CONCLUSIONES

Hemos estudiado un modelo determinista, local y homogéneo, conceptualmente simple y con ingredientes mínimos, que permite capturar la fenomenología básica de interacciones económicas y que conduce de un modo natural a las distribuciones de riqueza observadas en sociedades reales. Este modelo consiste en un sistema dinámico espaciotemporal descrito por una red de mapas acoplados en una o dos dimensiones.

En contraste con modelos previos que involucran aleatoriedad y heterogeneidad en los agentes económicos, en nuestro modelo las interacciones locales (la “microeconomía”) determina completamente las características macroscópicas del sistema; es decir, la macroeconomía constituye un comportamiento colectivo emergente. Como consecuencia, fenómenos como la desigualdad en la distribución de riqueza en el sistema surgen como resultado de procesos dinámicos que tienen lugar a nivel local.

Nuestros resultados sugieren que en sistemas de agentes económicos interactivos se pueden conseguir distintas regiones de parámetros en las cuales la distribución de riqueza manifiesta comportamientos tipo exponencial (BG) o leyes de potencia (Pareto), los cuales han sido observados en sistemas económicos reales. Por otro lado, se evidencia el rol que juega la conectividad de cada agente con su entorno en el surgimiento de comportamientos colectivos en el sistema.

Entre las futuras extensiones de este modelo está la posibilidad de modificar la regla de acoplamiento entre los mapas para encontrar los dos tipos de distribución de riqueza coexistiendo para los mismos valores de parámetros, con una distribución exponencial BG para los agentes con ingresos bajos y medios, y una distribución de Pareto para aquellos con ingresos altos, tal como se observa en datos económicos reales (Yakovenko, 2007).

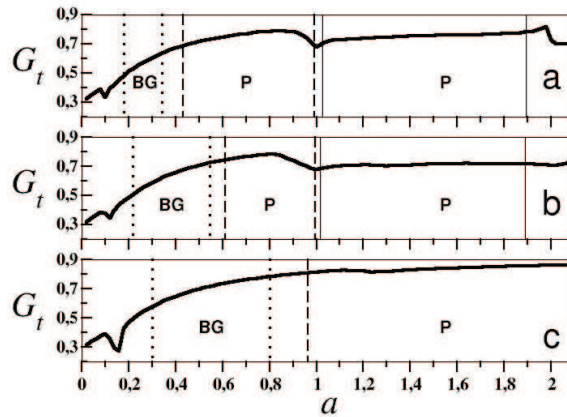


Figura 7. Coeficiente de Gini vs. a , indicando las regiones BG y Pareto. (a) red unidimensional; (b) red bidimensional con 4 vecinos; (c) red bidimensional con 8 vecinos. En todos los casos $r = 10$, $N = 10^5$. Las regiones BG y Pareto que no cumplen con el criterio $|\beta| \geq 0,96$.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Decanato de Investigación de la Universidad Nacional Experimental del Táchira (UNET), mediante los proyectos 04-001-2006 y 04-002-2006. J.G.-E. agradece al Decanato de Investigación y Vicerrectorado Académico de la UNET por el financiamiento obtenido para viajes. J.G.-E. y R.L.-R. agradecen el apoyo del BIFI, Universidad de Zaragoza, y de la Asociación Iberoamericana de Postgrado (AUIP), y del proyecto DGICYTFIS2006-12781-C02-01, España. M.G.C agradece el apoyo del Consejo de Desarrollo, Científico, Tecnológico y Humanístico y de las Artes, Universidad de los Andes, Mérida, a través del proyecto C-1692-10-05-B.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANGLE, J. The inequality process as a wealth maximizing process, *Physica A*. 367, 388-414, 2006.
- AUSLOOS, M.; CLIPPE, P. y PEKALSKI, A. *Physica A*. 324, 330-337, 2003.
- BOUCHAUD, J. P. y POTTERS, M. *Theory of Financial Risk*, Cambridge Univ. Press, 2000.
- CHAKRABORTI, A. y CHAKRABARTI, B. Statistical mechanics of money: How saving propensity affects its distribution, *Eur. Phys. J. B* 17:167-170. 2000.
- CHATTERJEE, A., CHAKRABARTI, B. y MANNA, S. Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity, *Physica A*. 335:155-163. 2004.
- DRAGULESCU, A. y YAKOVENKO, V. Modeling of Complex Systems: Seventh Granada Lectures, AIP Conference Proceedings 661, New York. pp. 180-183. 2003.
- DRAGULESCU, A. y YAKOVENKO, V. Statistical mechanics of money, *Eur. Phys. J. B*. 17. 723-729, 2000.
- DRAGULESCU, A. y YAKOVENKO, V. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States, *Physica A*. 299. 213-221. 2001a.
- DRAGULESCU, A. y YAKOVENKO, V. Evidence for the exponential distribution of income in the USA, *Eur. Phys. J. B*. 20. 585-589. 2001b.
- GONZÁLEZ-ESTÉVEZ, J.; COSENZA, M.; LÓPEZ-RUIZ, R. y SÁNCHEZ, J. Pareto and Boltzmann-Gibbs behaviors in a deterministic multiagent system, *Physica A*. 238/18 pp. 4637-4642. 2008.
- KANEKO, K. Ed., Coupled map lattices, focus issue of *Chaos* 2. 279-407. 1992.
- KLASS, O.; BIHAM, O.; LEVY, M.; MALCAI, O. y SOLOMON, S. The Forbes 400 and the Pareto wealth distribution, *Econ. Lett.* 90:290-295. 2006.
- KLASS, O.; BIHAM, O.; LEVY, M.; MALCAI, O. y SOLOMON, S. The Forbes 400, the Pareto power-law and efficient markets, *Eur. Phys. J. B* 55:143-147. 2007.
- LEVY, M. y SOLOMON, S., New evidence for the power-law distribution of wealth, *Physica A* 242, 90-94, 1997.
- LÓPEZ-RUIZ, R.; SAÑUDO, J. y CALBET, X. Geometrical derivation of the Boltzmann factor, arXiv:0707.4081, para aparecer en *Am. J. Phys* 76, 780-781. 2008.
- LÓPEZ-RUIZ, R.; GONZÁLEZ-ESTÉVEZ, J.; COSENZA, M. y SÁNCHEZ, J. An economic model of coupled exponential maps, *Proceedings of the NOMA'07 Conference*, Organizer LATTIS-INSa, Toulouse University. pp. 54-56, 2007b.
- MANTEGNA, R. y STANLEY, H. *An introduction to Econophysics*, Cambridge Univ. Press, 2000.
- PARÉTO, V. *Cours d'Economie Politique*, Vol. 2, F. Pichou, Lausanne, 1897.
- REED, W. *Econ. Lett.* 74. 15-19. 2001.
- RODRÍGUEZ-ACHACH y HUERTA QUINTANILLA, R. The distribution of wealth in the presence of altruism in simple economic models, *Physica A*. 361:309-318. 2006.
- SÁNCHEZ, J. y LÓPEZ-RUIZ, R. A model of coupled maps for economic dynamics, *Arxiv.nlin*. 0507054, 2005.
- SÁNCHEZ, J.; GONZÁLEZ-ESTÉVEZ, J.; LÓPEZ-RUIZ, R. y COSENZA, M. A model of coupled maps for economic dynamics, *Eur. Phys. J. Special Topics*. 143: 241-243. 2007.
- SOUMA, W. Universal structure of the personal income distribution, *Fractals* 9:463-470, 2001.
- SOUMA, W. *Physics of Personal Income*. In: Takayasu, H. (Ed.) *Empirical Science of Financial Fluctuations: The Advent of Econophysics*. Springer-Verlag, Tokyo. pp. 343-352. 2002.
- VOIT, J. *The statistical mechanics of Financial Markets*, Springer Verlag. 2002.
- YAKOVENKO, V. *Econophysics, statistical mechanics approach to*, preprint Arxiv:0709.3662. 2007.

La igualdad de la riqueza debe consistir en que ningún ciudadano sea tan opulento que pueda comprar a otro, ninguno tan pobre que se vea necesitado de venderse.

JEAN JACQUES ROUSSEAU

2

Transition from Pareto to Boltzmann-Gibbs behavior in a deterministic economic model

Transición de comportamiento tipo Pareto a comportamiento Boltzmann-Gibbs en un modelo económico determinístico

Artículo publicado en la Revista *Physica A*, en el volumen 388, número 17, desde la página 3521 hasta la 3526, año 2009. doi: [10.1016/j.physa.2009.04.031](https://doi.org/10.1016/j.physa.2009.04.031)

La Revista *Physica A*, ISSN 0378-4371, de Elsevier Science, se encuentra indizada en Science Citation Index, Science Citation Index Expanded, El Compendex Plus, INSPEC, Scopus, Astrophysics Data System, y Current Contents/Physics, Chemical & Earth Sciences, entre otros.

Resumen

El modelo determinístico económico unidimensional recientemente estudiado por González-Estévez et al. es considerado sobre una red bidimensional cuadrada con condiciones de fronteras periódicas. En este modelo, la evolución de cada agente es descrita por un mapa acoplado con sus vecinos más cercanos. El mapa tiene 2 factores: un término lineal que da cuenta a la tendencia propia del agente a crecer económicamente y un término exponencial que satura su crecimiento a través de un efecto de control del entorno. Las regiones en el espacio de los parámetros donde el sistema exhibe estadísticas de Pareto y Boltzmann-Gibbs son calculadas para los casos de vecindad von

Newmann y vecindad de Moore. Se encuentra que, cuando los parámetros en el sistema se mantienen fijos, una transición desde el comportamiento tipo Pareto a Boltzmann-Gibbs puede ocurrir cuando el número de vecinos de los agentes se incrementa.

2.1. Modelo determinístico económico es una red bidimensional

El sistema consiste en N agentes colocados en los nodos de una red. Aquí la red es una malla cuadrada con condiciones de contorno periódicas. Cada agente representando un individuo, compañía, país u otra entidad económica se identifica por un par de índices (i, j) , con $i, j = 1, \dots, N$. La dinámica de cada agente es descrita por un mapa u aplicación de tiempo discreto que expresa la competencia entre su tendencia individual de crecer y la influencia de un medio ambiente que controla su crecimiento. La dinámica del sistema es descrita por las ecuaciones de mapas acoplados

$$\begin{aligned} x_{t+1}^{i,j} &= r_{i,j} x_t^{i,j} \exp(-|x_t^{i,j} - a_{i,j} \Psi_t^{i,j}|), \\ \Psi_t^{i,j} &= \frac{1}{\eta(i,j)} \sum_{i,j \in \nu(i,j)} x_t^{i,j}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $x^{i,j} \geq 0$ da el estado del agente (i, j) en el tiempo discreto t , y puede representar la riqueza de este agente; el factor $r_{i,j} x_t^{i,j}$ representa la capacidad de auto-crecimiento del agente (i, j) , caracterizado por el parámetro $r_{i,j}$; $\Psi_t^{i,j}$ representa la acción del campo local actuando en el sitio (i, j) , en el tiempo t ; $\nu(i, j)$ es el conjunto de agentes en la red que están acoplados con el agente (i, j) y $\eta(i, j)$ es la cardinalidad de este conjunto; y finalmente $a_{i,j}$ mide el acoplamiento del agente (i, j) con su vecindad; ello puede ser interpretado como la presión ambiental local ejercida sobre el agente (i, j) . La función exponencial negativa actúa como un factor de control que limita este crecimiento con respecto al campo local. Con la dinámica descrita por la ecuación (2.1), la más grande posibilidad de crecimiento para el agente (i, j) es obtenida cuando $x^{i,j} \simeq a_{i,j} \Psi_t^{i,j}$, es decir, cuando el agente ha alcanzado algún tipo de adaptación con su ambiente local. Así nuestro modelo implícitamente conecta el crecimiento individual con la prosperidad social, un dilema encontrado comúnmente en modelos de teoría de juegos evolutiva.

Se consideran dos tipos de interacción de primeros vecinos en la malla rectangular. Una vecindad von Neumann de 4 vecinos y otra de vecindad de Moore de 8 vecinos.

Nos enfocamos en un sistema homogéneo donde todos los agentes poseen la misma capacidad de crecimiento, $r_{i,j} = r$, y están sujetos a una presión uniforme de su ambiente $a_{i,j} = a$. El valor $a = 1$ implica una tendencia a estar totalmente balanceado con la vecindad. El caso $a < 1$ corresponde a un bajo nivel de expectación entre los agentes que restringe las posibilidades para mejorar su riqueza relativa. Cuando $a > 1$ los agentes poseen un gran estímulo para superar a sus vecinos locales.

Se estudia el comportamiento colectivo del sistema descrito por las ecuaciones (2.1) en el espacio de parámetros (a, r) . Para todas las simulaciones mostradas el tamaño del sistema es 316×316 ($N \simeq 10^4$) y los valores de las condiciones iniciales fueron distribuidas aleatoriamente de manera uniforme en el intervalo $x_0^{i,j} \in [1, 100]$. También, un transitorio de 10^4 iteraciones fueron descartadas llegando al régimen asintótico, donde todos los cálculos fueron llevados a cabo. Cuando es indicado, los promedios temporales fueron hechos sobre las 100 iteraciones siguientes a los transitorios, y este resultado es nuevamente promediado sobre 100 realizaciones con diferentes condiciones iniciales con los mismos valores de los parámetros.

La figura 1 del artículo muestra la probabilidad de distribución $P(x)$ que exhibe comportamiento de Boltzmann-Gibbs (BG), $P(x) \sim e^{-\mu x}$, y comportamiento de Pareto, $P(x) \sim x^{-\alpha}$, en el espacio de parámetros (a, r) para el sistema dado por la ecuación (2.1). Los parámetros a y r son variados en intervalos de tamaño $\Delta a = 0.02$ y $\Delta r = 1$, respectivamente. Para cada par (a, r) y después de someterse al proceso de promedio arriba descrito, regresiones lineales semilog y log-log fueron usadas para calcular los exponentes μ y α para las distribuciones correspondientes, y solamente aquellos resultados que tienen un coeficiente de correlación mayor que 0.96 son mostrados en la figura 1.

En comparación con el caso unidimensional (referencia [14] del artículo), las regiones BG y las de Pareto en el espacio de los parámetros son más grandes para la malla cuadrada. En ambos casos, el comportamiento BG ocurre para valores pequeños del parámetro a , pero en 2 dimensiones hay también una región BG angosta para grandes valores de a . En general, cuando el valor de a se incrementa, la población entra en un régimen competitivo que provoca la aparición del comportamiento de Pareto. Los exponentes de escala obtenidos para ambas regiones son similares al caso unidimensional. Esos exponentes, que corresponden al comportamiento de Pareto, están en el rango $\alpha \in [2.4, 3.0]$, en concordancia con la data económica actual encontrada (referencias [7],[17] y [13] del artículo).

La figura 2(a) y 2(c) del artículo muestra un valor asintótico del campo medio o promedio de la riqueza del sistema H_t en el espacio de parámetros (a, r) , donde el comportamiento BG y el de Pareto son observados para 4 y 8 vecinos. Aunque los valores iniciales de la riqueza están distribuidos en el intervalo $[0, 100]$, el sistema evoluciona a un estado asintótico de H_t toma valores pequeños en el intervalo $[0.6, 3.25]$. Se observa que la región de BG presenta un promedio de riqueza más alto que la región de Pareto, esto significa que en este modelo la distribución BG sería más deseable para el beneficio general del grupo. En la misma línea, las regiones BG y las de Pareto con 8 vecinos exhiben una media de riqueza ligeramente más grande que para la vecindad de 4 celdas y el caso unidimensional.

Aparte de calcular la desviación estándar del sistema (figuras 2(b) y 2(d)) de la riqueza en los sistemas, se determinó el coeficiente de Gini para caracterizar el grado de desigualdad en distribución de la misma. El coeficiente de Gini viene dado por la

ecuación

$$G_t = \frac{1}{2N^2 H_t} \sum_{i,j,k,l=1}^N |x^{i,j} - x^{k,l}|. \quad 2.2$$

Una distribución equitativamente perfecta de riqueza en un tiempo t , donde $x^{i,j} = x^{k,l} \forall i, j, k, l$ conduce a un valor de $G_t = 0$. La situación opuesta, donde un agente tiene toda la riqueza tiene un valor $G_t = 1$. La figura 3 del artículo muestra el valor asintótico del coeficiente de Gini en el plano de parámetros (a, r) . Note que el coeficiente de Gini alcanza grandes valores, es decir, $G_t \in [0.65, 0.85]$ y $G_t \in [0.7, 1]$ para vecindades de 4 y 8 vecinos, respectivamente, en las regiones asociadas al régimen de Pareto, mientras que toma valores pequeños $G_t \in [0.35, 0.65]$ en la región correspondiente al comportamiento de BG.

2.2. Transición de comportamiento Pareto a Boltzmann-Gibbs

Como se evidenció en la realización unidimensional de este modelo económico estudiado en la referencia [14], es posible producir una transición de comportamiento de Pareto a BG (o viceversa) manteniendo la configuración estructural y haciendo solamente variaciones en los parámetros (a, r) del sistema. En los casos bi-dimensionales, como se puede apreciar en la figura 1, es posible realizar tal transición, por ejemplo, cambiando r y manteniendo un valor fijo de a . Llamamos a la transición de Pareto a BG (o viceversa) inducida por cambios en los parámetros la *estrategia de transición I*.

La figura 4 revela otro mecanismo capaz de provocar un cambio en las propiedades estadísticas de este modelo económico. Lo denominamos *estrategia de transición II*. Ello consiste en desarrollar una reconfiguración de la conexión local de los agentes. La figura 4(a) muestra la región en el espacio de los parámetros (a, r) donde un cambio en la topología del sistema desde un arreglo unidimensional a una red cuadrada en 2 dimensiones con 4 vecinos lleva al sistema de Pareto a una distribución asintótica de BG. La misma transición puede ser alcanzada en la región graficada en la figura 4(b) transformando un arreglo unidimensional a una red bidimensional de 8 vecinos. La figura 4(c) muestra la región en el espacio de parámetros donde una modificación del número de vecinos, de 4 vecinos a 8 vecinos, genera una transición Pareto-BG en el arreglo bidimensional.

La figura 4(d) muestra que la transición en comportamiento estadístico logrado a través de ambos tipos de estrategias producen una disminución del coeficiente de Gini y, por lo tanto, una distribución más equitativa de la riqueza en el sistema.

2.3. Conclusiones

Actualmente, el comportamiento estadístico exponencial y el de ley de potencias en las economías de países del oeste están bien documentadas. Diferentes modelos para la interacción de agentes económicos han sido reportados en la literatura. La mayoría de los modelos con una inspiración probabilista deben aplicar una reconfiguración fuerte en las propiedades estructurales del sistema para poder obtener una transición de la distribución de BG a una distribución de Pareto en su estado asintótico.

En este artículo se ha caracterizado en detalle un modelo económico determinista implementado en un red cuadrada con condiciones de frontera periódicas. El sistema depende solamente de dos parámetros: el parámetro a da información acerca de la presión ambiental local, mientras r expresa la capacidad de auto-crecimiento de cada agente. Variando los valores de esos parámetros, el modelo puede exhibir distribuciones de riqueza asintóticas de BG o de Pareto. El hecho llamativo es que solamente un cambio en cualquiera de esos parámetros es suficiente para hacer que el sistema experimente un cambio desde un tipo de comportamiento estadístico a otro diferente. Se ha llamado a este proceso *Estrategia de Transición I*.

Otra situación que puede producir una transición de comportamiento de Pareto a BG ha sido encontrada en este trabajo. Se ha llamado a ésta, *Estrategia de Transición II*. En este escenario, una variación de los valores de los parámetros no es necesaria; la transición en el tipo de comportamiento estadístico asintótico es una consecuencia de la nueva disposición de los vecinos de cada agente. En particular, se observa que un incremento del número de vecinos de cada agente conduce al sistema a través de un estado asintótico donde la riqueza es distribuida más equitativamente, ésto es, con un valor menor del coeficiente de Gini. Las regiones específicas en el espacio de parámetros donde esta transición puede tomar lugar han sido delimitadas.

Para nuestro conocimiento, esta es la primera vez en el campo de los sistemas económicos donde este tipo de transición es reportada. Se espera que este trabajo pueda ayudar al esclarecimiento del mecanismo que opera en el complejo mundo de las transacciones económicas entre individuos, compañías, países u otras entidades económicas.



Contents lists available at ScienceDirect

Physica A

journal homepage: www.elsevier.com/locate/physa

Transition from Pareto to Boltzmann–Gibbs behavior in a deterministic economic model

J. González-Estévez^{a,b,*}, M.G. Cosenza^b, O. Alvarez-Llamoza^{b,c}, R. López-Ruiz^d

^a Laboratorio de Física Aplicada y Computacional, Universidad Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal, Venezuela

^b Centro de Física Fundamental, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

^c Departamento de Física, FACYT, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela

^d DIIIS and BIFI, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, E-50009 Zaragoza, Spain

ARTICLE INFO

Article history:

Received 6 November 2008

Received in revised form 25 February 2009

Available online 3 May 2009

PACS:

89.75.-k

87.23.Ge

05.90.+m

Keywords:

Multi-agent systems

Economic models

Pareto and Boltzmann–Gibbs distributions

ABSTRACT

The one-dimensional deterministic economic model recently studied by González-Estévez et al. [J. González-Estévez, M.G. Cosenza, R. López-Ruiz, J.R. Sanchez, Physica A 387 (2008) 4637] is considered on a two-dimensional square lattice with periodic boundary conditions. In this model, the evolution of each agent is described by a map coupled with its nearest neighbors. The map has two factors: a linear term that accounts for the agent's own tendency to grow and an exponential term that saturates this growth through the control effect of the environment. The regions in the parameter space where the system displays Pareto and Boltzmann–Gibbs statistics are calculated for the cases of the von Neumann and the Moore neighborhood. It is found that, even when the parameters in the system are kept fixed, a transition from Pareto to Boltzmann–Gibbs behavior can occur when the number of neighbors of each agent increases.

© 2009 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

In the last few years, different probabilistic models [1–5] have been proposed to explain wealth distribution in western societies [6–10], namely the Boltzmann–Gibbs distribution grouping about 95% of individuals, corresponding to those belonging to the low and middle economic classes, and the Pareto distribution consisting of 5% of individuals possessing the highest wealth. The majority of these models explain wealth distribution as a consequence of random processes. For example, coexistence of Gamma and Pareto distributions has been found in a probabilistic kinetic exchange model [11]. Other works assume that economic agents often make irrational, although not random choices, rather based on physiological factors [12]. However, most classical economic theories assume that economic transactions are carried out under the rationale force of some interest or some final profit, and only occasionally this is conducted by chance. Thus, in order to shed light on the problem of how wealth is distributed in human society, it is important to dispose of other economic models incorporating different degrees of determinism in the interaction among the agents.

One of these models was recently proposed [13] and studied in detail for the one-dimensional case in Ref. [14]. This is a completely deterministic model that reproduces realistic wealth distributions, i.e., the Pareto and the Boltzmann–Gibbs (BG) distributions, for different values of parameters. Moreover, it is possible to produce a transition from Pareto to BG behavior by only modifying one parameter. This means that it is possible to bring the system from a particular wealth distribution to another one with a lower inequality by making only a small change in the system configuration. This is an advantage with respect to other random models where it is necessary to perform a structural reconfiguration of the system in order to get this type of transition [2,3].

* Corresponding author at: Laboratorio de Física Aplicada y Computacional, Universidad Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal, Venezuela.
E-mail address: jgonzale@unet.edu.ve (J. González-Estévez).

In this paper, we ask whether some other strategies can be implemented in this model [13,14] in order to induce a transition in its asymptotic statistical behavior. We proceed to affirmatively answer this question by showing that different local groupings of the agents that occur, for instance, by changing the topology of the lattice or the number of neighbors of each agent, can lead to a transition from the Pareto to BG behavior even when the parameters of the system are kept fixed. Hence, the first step we undertake in Section 2 is the characterization of the statistical behaviors that this model exhibits on its space of parameters when it is implemented on a two-dimensional lattice. Particularly, the cases of the von Neumann and the Moore neighborhood are studied in detail. Then, in Section 3, the results obtained for these configurations are compared with those previously found for the one-dimensional case. The regions in the parameter space where a transition between different statistical behaviors can take place, are identified in this section. Section 4 contains our conclusions.

2. The deterministic economic model on a two-dimensional lattice

The system [13,14] consists of N agents placed at the nodes of a network. Here, the network is a square lattice with periodic boundary conditions. Each agent, representing an individual, a company, a country or other economic entity, is identified by a pair of indices (i, j) , with $i, j = 1, \dots, N$. The dynamics of each agent is described by a discrete-time map that expresses the competition between its own tendency to grow and an environmental influence that controls this growth. The dynamics of the system is described by the coupled map equations

$$\begin{aligned} x_{t+1}^{ij} &= r_{ij} x_t^{ij} \exp(-|x_t^{ij} - a_{ij} \Psi_t^{ij}|), \\ \Psi_t^{ij} &= \frac{1}{\eta(i, j)} \sum_{i, j \in v(i, j)} x_t^{ij}, \end{aligned} \quad (1)$$

where $x_t^{ij} \geq 0$ gives the state of the agent (i, j) at discrete time t , and it may denote the *wealth* of this agent; the factor $r_{ij} x_t^{ij}$ expresses the *self-growth capacity* of agent (i, j) , characterized by a parameter r_{ij} ; Ψ_t^{ij} represents the local field acting at the site (i, j) at time t ; $v(i, j)$ is the set of agents in the network coupled to agent (i, j) and $\eta(i, j)$ is the cardinality of this set; and a_{ij} measures the coupling of agent (i, j) with its neighborhood; it can also be interpreted as the *local environmental pressure* exerted on agent (i, j) [15]. The negative exponential function acts as a *control factor* that limits this growth with respect to the local field. With the dynamics given by Eqs. (1) the largest possibility of growth for agent (i, j) is obtained when $x_t^{ij} \simeq a_{ij} \Psi_t^{ij}$, i.e., when the agent has reached some kind of adaptation to its local environment. Thus our model implicitly links individual growth with social prosperity, a dilemma commonly found in models of evolutionary game theory [16].

We consider two different nearest-neighbor interactions: the 4-cell von Neumann neighborhood,

$$\Psi_t^{ij} = \frac{1}{4} (x_t^{i-1,j} + x_t^{i+1,j} + x_t^{i,j-1} + x_t^{i,j+1}); \quad (2)$$

and the 8-cell Moore neighborhood,

$$\Psi_t^{ij} = \frac{1}{8} (x_t^{i-1,j} + x_t^{i+1,j} + x_t^{i,j-1} + x_t^{i,j+1} + x_t^{i-1,j-1} + x_t^{i-1,j+1} + x_t^{i+1,j-1} + x_t^{i+1,j+1}). \quad (3)$$

We focus on a homogeneous system where all agents possess the same growth capacity, $r_{ij} = r$, and are subject to a uniform selection pressure from their environment, $a_{ij} = a$. Thus, the parameter a can be interpreted as a homogeneous social constraint on the agents to reach a wealth level proportional to that of their environment. The value $a = 1$ implies a tendency towards being totally balanced with the neighborhood. The case $a < 1$ corresponds to a lower level of expectation among agents that restricts the possibilities for improving their relative wealth. When $a > 1$ the agents possess a greater stimulus for overcoming their local neighbors.

We study the collective behavior of the system described by Eqs. (1) in the space of parameters (a, r) . For all the simulations shown, the system size is 316×316 ($N \simeq 10^4$) and the values of the initial conditions are uniformly distributed at random in the interval $x_0^{ij} \in [1, 100]$. Also, a transient of 10^4 iterations is discarded before arriving at the asymptotic regime where all the calculations are carried out. When indicated, time averages are done over the next 100 iterations after the transient, and this result is newly averaged over 100 different realizations of the initial conditions with the same parameter values.

Fig. 1 shows the regions where the probability distribution $P(x)$ displays BG behavior, $P(x) \sim e^{-\mu x}$, and Pareto behavior, $P(x) \sim x^{-\alpha}$, in the space of parameters (a, r) for the system equations (1). The parameters a and r are varied in intervals of size $\Delta a = 0.02$ and $\Delta r = 1$, respectively. For each pair (a, r) , and after undergoing the averaging process described above, semilog and log-log linear regressions are used to calculate the exponents μ and α for the corresponding distributions, and only those results yielding a correlation coefficient greater than 0.96 are shown in Fig. 1.

In comparison with the one-dimensional case [14], the BG and Pareto regions in the space of parameters are larger for the square lattice. In both cases, the BG behavior occurs for the lower values of the parameter a , but in two dimensions there is also a narrow BG region for greater values of a . In general, when the value of a increases, the population enters a competitive regime that provokes the appearance of the Pareto behavior. The scaling exponents obtained for both regions are similar to the one-dimensional case. Those exponents that correspond to the Pareto behavior are in the range $\alpha \in [2.4, 3.0]$, in agreement with those found in actual economic data [7,17,18].

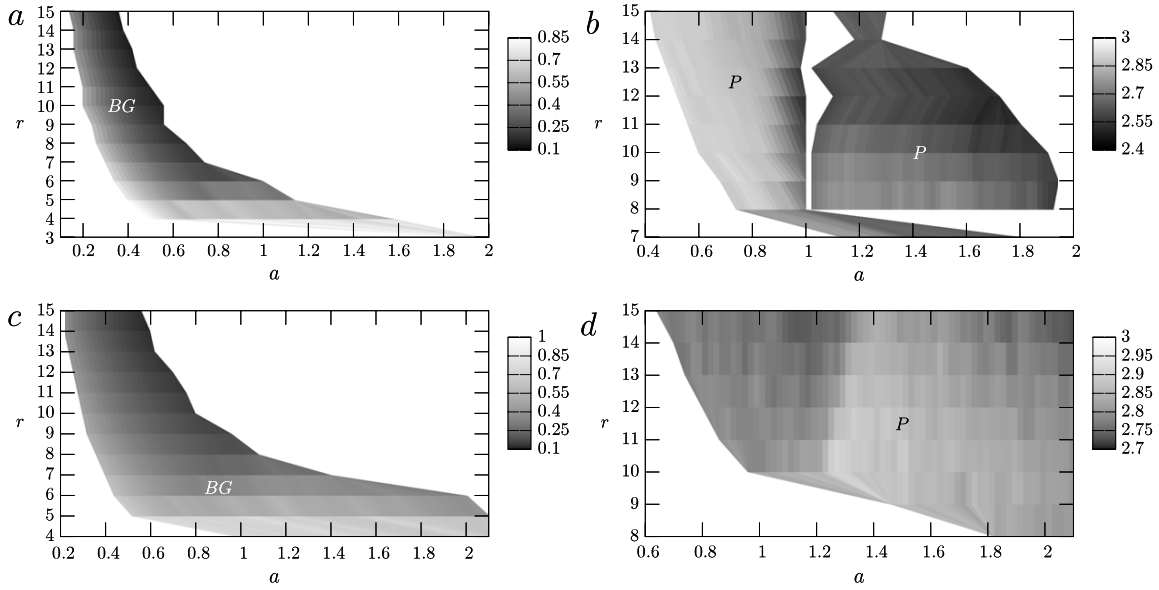


Fig. 1. Left panels: Regions where Boltzmann–Gibbs behavior $P(x) \sim e^{-\mu x}$ appears on the space of parameters (a, r) , indicated by the label BG, for the (a) 4-cell and (c) 8-cell neighborhood cases. The grey code on the right indicates the values of the scaling exponent μ . Right panels: Regions where Pareto behavior $P(x) \sim x^{-\alpha}$ occurs on the plane (a, r) , labeled by P, for the (b) 4-cell and (d) 8-cell neighborhood cases. The grey code on the right indicates the values of the exponent α .

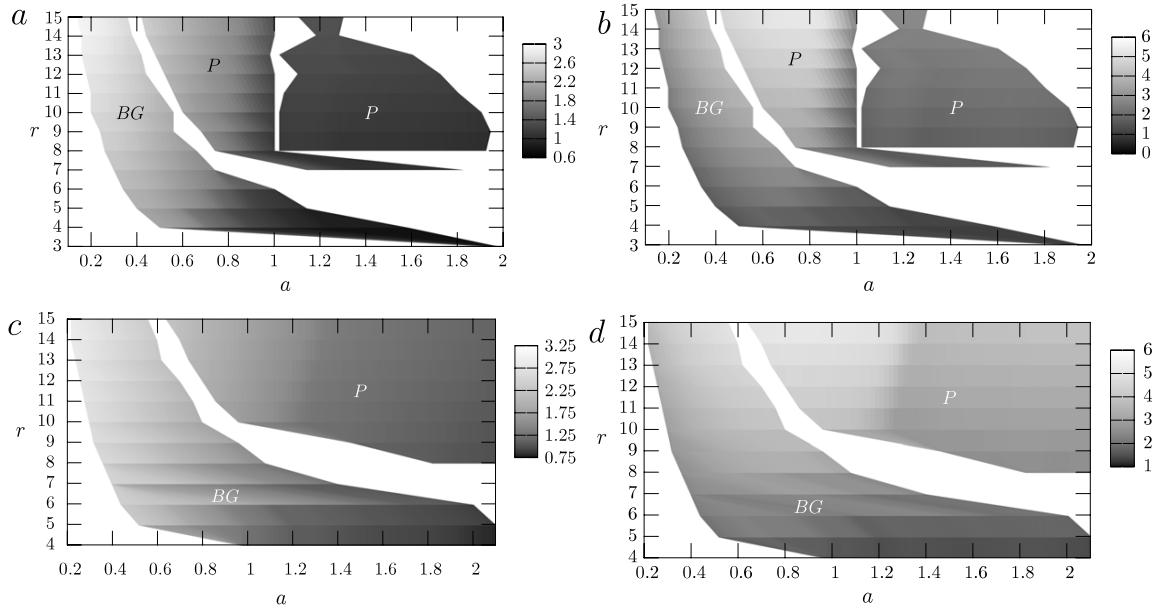


Fig. 2. Left panels: Mean field H_t of the system at $t = 10^4$ for the Boltzmann–Gibbs (BG) and Pareto (P) regions for the (a) 4-cell and (c) 8-cell neighborhood cases. The grey code on the right indicates the values taken by H_t . Right panels: The quantity $\langle \sigma \rangle$ on the space of parameters (a, r) , for the (b) 4-cell and (d) 8-cell neighborhood cases, with the grey code indicated on the right.

The mean field of the system or average wealth per agent at a time t is defined as

$$H_t = \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N x_t^{i,j}. \quad (4)$$

Similarly to the results reported in Ref. [14] for the one-dimensional case, Fig. 2(a–c) shows the asymptotic value of the global mean field for the regions where BG and Pareto behaviors are observed on the space of parameters (a, r) , for the 4-cell

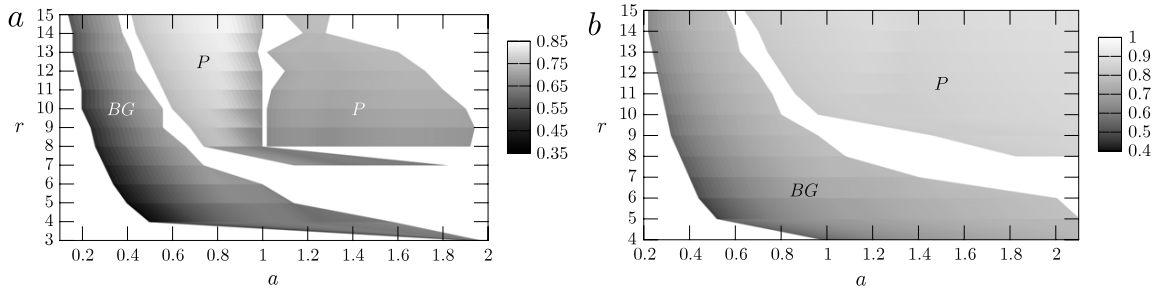


Fig. 3. (a) The Gini coefficient at $t = 10^4$ as a function of the parameters a and r for the (a) 4-cell and (b) 8-cell neighborhood cases. The labels BG and P indicate the regions with Boltzmann–Gibbs and Pareto behaviors. The grey code on the right indicates the values taken by the Gini coefficient.

and 8-cell neighborhood cases. Note that, although the values of the initial states of the agents are randomly distributed on the interval $[1, 100]$, the system evolves to an asymptotic state where H_t takes values on the smaller interval $[0.6, 3.25]$. Let us observe that the BG region presents a higher mean wealth than the Pareto one, telling us that in this model the BG behavior would be desirable for the general benefit of the ensemble. In the same line, the BG and Pareto regions with 8-cell neighborhood display a slightly bigger mean wealth than the 4-cell neighborhood and the one-dimensional cases. This seems to indicate that the increasing number of the local neighbors of each agent can generate more richness in the system.

On the other hand, for some values of the parameters a and r , the states of agents in the system at a given time exhibit a large dispersion. For those parameters, the values of the state of any agent present large fluctuations over long times. To characterize these fluctuations, we define the instantaneous standard deviation of the mean field as

$$\sigma_t = \left(\frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N [x_t^{i,j} - H_t]^2 \right)^{1/2}. \quad (5)$$

After discarding 10^4 transients, we calculate the mean value of σ_t over 100 iterations, and then average this result over 100 realizations of initial conditions. The resulting average dispersion, denoted by $\langle \sigma \rangle$, is shown in Fig. 2(b–d) on the plane (a, r) . Note that for some regions of parameters the quantity $\langle \sigma_t \rangle$ can be much greater than the value of the mean field.

The large dispersions observed in Fig. 2 (b–d) reflect the inequality in wealth distribution among agents in this system. To characterize the degree of inequality in wealth distribution we use the Gini coefficient defined at a time t as [19]

$$G_t = \frac{1}{2N^2 H_t} \sum_{i,j,k,l=1}^N |x_t^{i,j} - x_t^{k,l}|. \quad (6)$$

A perfectly equitable distribution of wealth at time t , where $x_t^{i,j} = x_t^{k,l} \forall i, j, k, l$, yields a value $G_t = 0$. The opposite situation, where one agent has the total wealth $\sum_{i,j=1}^N x_t^{i,j}$, has a value of $G_t = 1$. Fig. 3 shows the asymptotic value of the Gini coefficient on the plane of parameters (a, r) . Note that the Gini coefficient reaches larger values, i.e. $G_t \in [0.65, 0.85]$ and $G_t \in [0.7, 1]$ for the 4-cell and the 8-cell neighborhood, respectively, in the regions associated to Pareto regimes, while it takes lower values, i.e. $G_t \in [0.35, 0.65]$, in the region corresponding to BG behavior. These results agree with our qualitative understanding that equity is more favored in the presence of a larger middle economic class in a society, as expressed by a BG distribution.

3. Transition from Pareto to Boltzmann–Gibbs behavior

As was evident in the one-dimensional realization of this economic system studied in Ref. [14], it is possible to produce a transition from a Pareto to a BG behavior (or vice versa) maintaining its structural configuration and making only a variation in the parameters (a, r) of the system. In the two-dimensional case, as can be seen in Fig. 1, it is also possible to make such transition, for example, by changing r with a fixed value of a . We call the transition from Pareto to BG behavior (or vice versa) induced by varying the parameters the *Transition Strategy I*.

Fig. 4 reveals another mechanism capable of provoking a change in the statistical properties of this economic model. We call it the *Transition Strategy II*. It consists in performing a reconfiguration of the local connectivity of the agents. Fig. 4(a) shows the region of the parameter space (a, r) where a change in the topology of the system from a one-dimensional array to a two-dimensional square lattice with 4-cell neighborhood takes the system from a Pareto to a BG asymptotic distribution. The same transition can be reached in the region plotted in Fig. 4(b) by transforming the one-dimensional array to a two-dimensional lattice with 8-cell neighborhood. Fig. 4(c) displays the region of parameter space where a modification of the number of neighbors, from a 4-cell von Neumann neighborhood to an 8-cell Moore neighborhood, generates a Pareto–BG transition in the two-dimensional array.

As shown in Fig. 4(d), the transitions in statistical behaviors achieved through either type of strategy produce a decrease of the Gini coefficient and, therefore, a more equitable wealth distribution in the system.

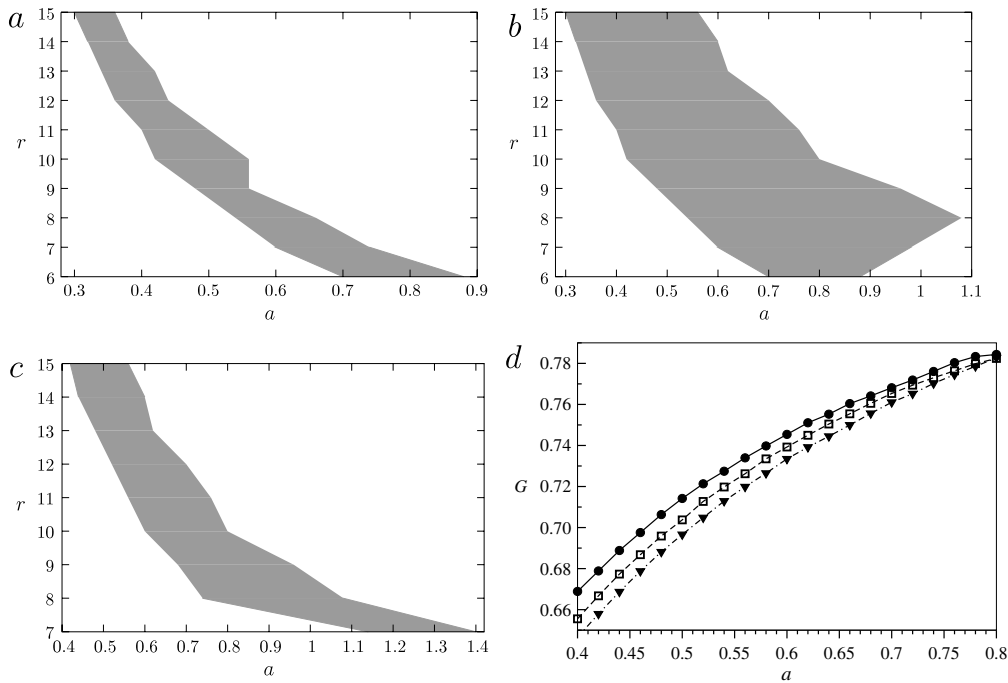


Fig. 4. Regions in the parameter space (a, r) where the deterministic model displays a transition from Pareto to Boltzmann–Gibbs statistical behavior through a reconfiguration of the local neighborhood. (a) The system changes its topology from a one-dimensional array to a two-dimensional square lattice with a 4-cell neighborhood. (b) The topology changes from a one-dimensional array to a two-dimensional square lattice to an 8-cell neighborhood. (c) Changing from a 4-cell neighborhood to an 8-cell neighborhood in a two-dimensional square lattice. (d) Graphical evidence that the Gini coefficient decreases in the transitions described in (a), (b), and (c): one-dimensional array (circle points, upper line); two-dimensional lattice with 4-cell neighborhood (square points, middle line); 8-cell neighborhood (triangle down points, lower line). Fixed $r = 10$.

4. Conclusions

Nowadays, both the exponential and power law statistical behaviors in the economies of western countries are well documented [10]. Different models for the interaction of the economic agents have been reported in the literature. Most models with a probabilistic inspiration must apply a strong reconfiguration in the structural properties of the system in order to obtain a transition from a BG to a Pareto distribution in its asymptotic state.

In this paper we have characterized in detail a deterministic economic model implemented on a two-dimensional square lattice with periodic boundary conditions. The system depends only on two parameters; the parameter a gives information about the local environmental pressure while r expresses the self-growth capacity of each agent. By varying the values of these parameters, the model can exhibit asymptotic BG or Pareto distributions of wealth. The striking fact is that only a change in either one of these parameters is enough to make the system undergo a change from one type of statistical behavior to a different one. We have called this process Transition Strategy I.

Another situation that can produce a transition from Pareto to BG behavior in this system has been found in this work. We have called it Transition Strategy II. In this scenario, a variation of the values of the parameters is not necessary; the transition in the type of asymptotic statistical behavior is a consequence of the rearrangement of the neighborhood of each agent. In particular, it is observed that an increase in the number of neighbors of each agent drives the system toward asymptotic states where wealth is distributed more equitably, that is, with a lower value of the Gini coefficient. The specific regions of the parameter space where this transition can take place have been delimited.

To our knowledge this is the first time in the field of economic systems where this kind of transition is reported. We hope that this work can help in enlightening the mechanisms that operate in the complex world of economical transactions among individuals, companies, countries or other economic entities.

Acknowledgments

This work was supported in part by Decanato de Investigación of the Universidad Nacional Experimental del Táchira (UNET), under grants 04-001-2006 and 04-002-2006. R.L.-R. acknowledges financial support from Postgrado de Física Fundamental, Universidad de Los Andes (ULA), Venezuela, and by grant DGICYT-FIS2006-12781-C02-01, Spain. He also wants to thank ULA and UNET for their kind hospitality during his stay there in July 2008. M.G.C. and O.A.-L. acknowledge support from Consejo de Desarrollo, Científico, Tecnológico y Humanístico, ULA, under grant C-1579-08-05-B.

References

- [1] A. Dragulescu, V.M. Yakovenko, Eur. Phys. J. B 17 (2000) 723.
- [2] A. Chakraborti, B.K. Chakrabarti, Eur. Phys. J. B 17 (2000) 167.
- [3] A. Chatterjee, B.K. Chakrabarti, S.S. Manna, Physica A 335 (2004) 155.
- [4] J. Angle, Physica A 367 (2006) 388.
- [5] R. López-Ruiz, J. Sañudo, X. Calbet, Amer. J. Phys. 76 (2008) 780.
- [6] A. Dragulescu, V.M. Yakovenko, Eur. Phys. J. B 20 (2001) 585.
- [7] A. Dragulescu, V.M. Yakovenko, Physica A 299 (2001) 213.
- [8] A. Chatterjee, S. Yarlagadda, B.K. Chakrabarti (Eds.), *Econophysics of Wealth Distributions*, Springer Verlag, Milan, 2005.
- [9] B.K. Chakrabarti, A. Chakraborti, A. Chatterjee (Eds.), *Econophysics and Sociophysics*, Wiley-VCH, Berlin, 2006.
- [10] V.M. Yakovenko. Preprint [arXiv:0709.3662](https://arxiv.org/abs/0709.3662), 2007. Review article for Encyclopedia of Complexity and System Science, to be published by Springer, 2009.
- [11] A. Chatterjee, B.K. Chakrabarti, Eur. Phys. J. B 60 (2007) 135.
- [12] D. Kahneman, A. Tversky, Econometrica 47 (1979) 263.
- [13] J.R. Sánchez, J. González-Estévez, R. López-Ruiz, M.G. Cosenza, Eur. Phys. J. ST 143 (2007) 241.
- [14] J. González-Estévez, M.G. Cosenza, R. López-Ruiz, J.R. Sanchez, Physica A 387 (2008) 4637.
- [15] M. Ausloos, P. Clippe, A. Pekalski, Physica A 324 (2003) 330.
- [16] G. Szabó, G. Fáth, Phys. Rep. 446 (2007) 97.
- [17] M. Levy, S. Solomon, Physica A 242 (1997) 90.
- [18] W. Souma, Fractals 9 (2001) 463.
- [19] M. Rodríguez-Achach, R. Huerta-Quintanilla, Physica A 361 (2006) 309.

La ciencia natural, no se limita a describir y explicar la naturaleza, sino que es parte de la interacción entre la naturaleza y nosotros mismos.

WERNER HEISENBERG

3

Synchronization induced by intermittent versus partial drives in chaotic systems

Sincronización inducida por forzamiento intermitente frente a forzamiento parcial en sistemas caóticos

Artículo publicado en la Revista International Journal of Bifurcation and Chaos, en el volumen 20, número 2, desde la página 323 hasta la 330, año 2010.
doi: [10.1142/S0218127410025776](https://doi.org/10.1142/S0218127410025776)

La Revista International Journal of Bifurcation and Chaos, ISSN edición impresa: 0218-1274, ISSN edición online: 1793-6551, de World Scientific, se encuentra indexada en Science Citation Index, Science Citation Index Expanded, Compendex, Scopus, INSPEC, y Current Contents/Physics, Chemical & Earth Sciences, entre otros.

Resumen

Se demuestra que los estados sincronizados de dos sistemas de mapas caóticos idénticos, uno sujeto a un forzamiento común que actúa con una probabilidad p en el tiempo, u otro sujeto al mismo forzamiento actuando sobre una fracción p de los mapas del sistema, son similares. El comportamiento de sincronización de ambos sistemas puede ser inferido considerando la dinámica de un mapa solo forzado con una probabilidad p en el tiempo. El estado sincronizado para estos sistemas está caracterizado sobre su espacio común de parámetros. Los resultados demuestran que la presencia de un forzamiento

externo común en todo momento no es esencial para alcanzar la sincronización en un sistema de osciladores caóticos, ni tampoco aplicar dicho forzamiento simultáneamente a todos los elementos en el sistema. Más bien, una condición crucial para obtener sincronización es compartir una mínima información promedio por los elementos del sistema para tiempos largos.

3.1. Sistema de mapas forzados intermitentemente

Nuestro objetivo es investigar las condiciones mínimas para la ocurrencia de sincronización de caos usando modelos de mapas acoplados. Se considera un sistema de N mapas forzados uniformemente e intermitentemente, definido como

$$\begin{aligned} \forall i, x_{t+1}^i &= \begin{cases} s(x_t^i, y_t), & \text{con probabilidad } p \\ f(x_t^i), & \text{con probabilidad } (1 - p) \end{cases} \\ y_{t+1} &= g(y_t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde x_t^i ($i = 1, 2, \dots, N$) da el estado del i -ésimo mapa en el tiempo discreto t . Cada mapa está sujeto a la misma influencia externa (o escasez de ella) en cualquier tiempo. La función de acoplamiento es escogida para tener la forma difusiva

$$s(x_t^i, y_t) = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon g(y_t), \tag{3.2}$$

donde ϵ es la intensidad del forzamiento $g(y_t)$.

Se asume un forzamiento con dinámica caótica dada por el mapa singular que pertenece a la familia $f(x_t) = b - |x_t|^z$, donde $|z| < 1$, b es un parámetro real y $x_t \in (-\infty, \infty)$. Los mapas singulares exhiben caos robusto, sin ventanas periódicas en un intervalo finito del parámetro b [Alvarez-Llamoza *et al.*, 2008]. La “robustez” es una propiedad importante en aplicaciones que requieren operaciones confiables bajo dinámicas caóticas, en el sentido que comportamientos colectivos caóticos no pueden ser destruidos por pequeñas perturbaciones de los parámetros del sistema. En particular empleamos el valor $z = -0.5$, para el cual el mapa correspondiente exhibe dinámica de caos robusto en el rango de $b \in [0.62996, 1.88988]$.

Un estado de sincronización completa en el sistema Ec. (3.1) está dado por $x_t^i = x_t = y_t, \forall i$, y puede ocurrir cuando $g = f$. Por otro lado, si $g \neq f$, sincronización generalizada, caracterizada por la condición $x_t^i = x_t \neq y_t, \forall i$, puede surgir en este sistema para $p \leq 1$. Un estado sincronizado puede ser caracterizado por el promedio asintótico en el tiempo $\langle \sigma \rangle$ (después de descartar estados transitorios) de la desviación estándar instantánea σ_t de los estados de los elementos x_t^i del sistema. La sincronización estable corresponde a $\langle \sigma \rangle = 0$. Aquí usamos el criterio numérico de $\langle \sigma \rangle < 10^{-7}$.

Para valores dados del parámetro de acoplamiento ϵ hay un valor umbral de la probabilidad p requerido para alcanzar uno de los tipos de sincronización. La figura 2 del

artículo muestra las regiones para los estados de sincronización completa en el sistema dado por la Ec. (3.1), dentro del espacio de los parámetros del sistema (p, ϵ) , para diferentes órbitas de un forzamiento $g = f$. En particular, cuando $g = f$, sincronización completa en una órbita inestable de período m del mapa f , definida por $f^{(m)}(\bar{x}_n)$ y satisfaciendo $\prod_{n=1}^m |f'(\bar{x}_n)| > 1$, donde $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ son el conjunto de puntos consecutivos de la órbita, pueden ser también logrados en el sistema dado por la Ec. (3.1), como se muestra en la figura 2.

La figura 3 del artículo muestra las regiones para los estados de sincronización generalizada del sistema dado por la Ec. (3.1), dentro del espacio de parámetros (p, ϵ) , con un forzamiento $g \neq f$.

Puesto que cada mapa en el sistema forzado intermitentemente, Ec. (3.1), experimenta la misma influencia externa (o ninguna) en algún tiempo, las propiedades de este sistema puede ser analizado por el comportamiento de la dinámica local individual. Así, consideramos un solo mapa intermitentemente forzado

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \begin{cases} s(x_t, y_t), & \text{con probabilidad } p \\ f(x_t), & \text{con probabilidad } (1 - p) \end{cases} \\ y_{t+1} &= g(y_t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde x_t es la variable forzada, y_t es el forzamiento y $s(x_t, y_t)$ tiene la misma forma funcional de la Ec. (3.2). El enfoque de sistema auxiliar [Abarbanel *et al.*, 1996] implica que un mapa forzado puede sincronizarse en órbitas idénticas con otro mapa forzado idéntico.

El mapa forzado dado la Ec. (3.3) puede ser considerado como un sistema bidimensional. La condición de estabilidad lineal para la sincronización requiere del conocimiento del exponente de Lyapunov. Estos son definidos por $\Lambda_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln L_x$ y $\Lambda_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln L_y$, donde L_x y L_y son las magnitudes de los autovalores de $[\prod_{t=0}^{T-1} \mathbf{J}(x_t, y_t)]^{1/T}$ y $\mathbf{J}(x_t, y_t)$ es la matriz Jacobiana para el sistema de la Ec. (3.3), calculado a lo largo de una órbita.

La sincronización ocurre si el exponente de Lyapunov correspondiente al mapa forzado es negativo [Rulkov *et al.*, 1995], es decir, $\Lambda_x < 0$. La figura 4 del artículo muestra a Λ_x y Λ_y como función de p para el mapa forzado Ec. (3.3) para diferentes g .

Cuando $g = f$, la condición $\Lambda_x < 0$ implica sincronización completa, donde $x_t = y_t$. En este caso se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda_y &= \lambda_y \\ \Lambda_x &= p \ln |1 - \epsilon| + \lambda_y, \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde λ_y es el exponente de Lyapunov del mapa f . La figura 2 muestra las fronteras de estabilidad, dadas por $\Lambda_x = 0$, para los estados de sincronización completa del sistema Ec. (3.3) dentro del espacio de los parámetros (p, ϵ) para diferentes órbitas del forzamiento.

Por otro lado, si $g \neq f$, la condición $\Lambda_x < 0$ corresponde a sincronización generalizada, caracterizado por $x_t \neq y_t$. La figura 3 muestra las fronteras de estabilidad, dadas por $\Lambda_x = 0$, para los estados de sincronización generalizada del sistema Ec. (3.3) dentro del espacio de los parámetros (p, ϵ) para diferentes forzamientos $g(y_t)$. En ambos casos, Figuras 2 y 3, las curvas $\Lambda_x = 0$ coinciden con las fronteras de estabilidad de sincronización completa y generalizada, respectivamente, para el sistema extendido Ec. (3.1).

3.2. Sistema de mapas forzados parcialmente

La equivalencia entre un solo mapa y un sistema de mapas similares forzados demuestra que, bajo algunas circunstancias, el comportamiento colectivo de un sistema extendido de elementos interactuantes puede ser inferido considerando la dinámica de un solo mapa a nivel local. Como una aplicación de esta idea, consideramos un sistema de mapas parcialmente forzado, definido como

$$\begin{aligned} x_{t+1}^i &= \begin{cases} s(x_t^i, y_t), & \text{con probabilidad } p \\ f(x_t^i), & \text{con probabilidad } (1 - p) \end{cases} \\ y_{t+1} &= g(y_t). \end{aligned} \tag{3.5}$$

El parámetro p es la probabilidad de interacción de un mapa con el forzamiento g en el tiempo t . Los elementos forzados son escogidos aleatoriamente con una probabilidad p , así, no todos los mapas reciben la misma influencia externa al mismo tiempo. De esta manera la fracción promedio de elementos forzados en el sistema (3.5) en cualquier momento dado es p .

Cuando el sistema de la ecuación (3.5) alcanza la sincronización, se tiene $x_t^i = x_t$. Sin embargo, la solución sincronizada existe solamente si $g = f$. De esta forma, solo sincronización completa puede ocurrir en este sistema.

A nivel local, cada mapa en el sistema parcialmente acoplado Ec. (3.5), está sujeto en promedio, a un forzamiento externo g con una probabilidad p . Así, el comportamiento de este sistema puede también ser estudiado por el comportamiento del mapa solo, intermitentemente forzado de la Ec. (3.3). La condición $\Lambda_x < 0$ para la sincronización completa en el mapa forzado de la Ec. (3.3), que implica sincronización estable en el sistema intermitente de la Ec. (3.1), es también equivalente a la condición de estabilidad de sincronización completa del sistema parcialmente forzado dado por Ec. (3.5). Esto se demuestra adicionalmente con el empleo de la matriz de acoplamiento $\mathbf{G}_t$, que surge de expresar el sistema de la Ec. (3.5) en forma vectorial.

Aunque la sincronización completa de caos en ambos casos, ecuaciones (3.1) y (3.5), puede ser caracterizada por el conocimiento de la dinámica de un solo mapa forzado, el comportamiento transitorio para alcanzar tal estado es diferente en cada caso. La figura

5 del artículo muestra el tiempo promedio T_s requerido para alcanzar la sincronización como función de p en ambos casos. Los tiempos T_s son más grandes en el segundo caso, es decir, el forzamiento uniforme es más eficiente que el no uniforme para alcanzar la sincronización completa.

3.3. Redes dinámicas

Por último se corroboran estos resultados al extender el sistema a redes de mapas en una dimensión más un forzamiento aplicado uniformemente sobre todo el sistema con probabilidad p y una red de mapas en una dimensión más un forzamiento aplicado a una fracción p de mapas del sistema elegidos aleatoriamente en un tiempo t .

3.4. Conclusiones

En resumen, hemos demostrado que el comportamiento sincronizado en un sistema de mapas caóticos sujetos a un forzamiento externo puede ser inferido desde el comportamiento de un solo elemento del sistema. La dinámica local puede ser vista como un solo mapa forzado; cuando éste sistema máster-esclavo alcanza sincronización, el enfoque del sistema auxiliar implica que un grupo de mapas idénticos sujetos a un forzamiento similar debería también sincronizarse. Hemos demostrado que las regiones de sincronización completa estable en el espacio de parámetros de dos sistemas de mapas caóticos idénticos sujetos al mismo forzamiento, uno actuando intermitentemente en el tiempo, y el otro parcialmente en el espacio, coinciden. A nivel local, las dinámicas locales de ambos sistemas, para grandes tiempos, pueden ser caracterizados por un solo mapa caótico forzado con una probabilidad p . En adición, hemos demostrado que la sincronización completa en redes de elementos interactuantes sujetos a forzamiento intermitente, o parcial, pueden también ser similares. Este resultado sugiere que esos sistemas poseen la propiedad de ergodicidad.

Para el sistema forzado intermitentemente, el compartir de la influencia externa por los elementos toma lugar solamente una fracción del tiempo. En el caso del sistema parcialmente forzado, la influencia externa es compartida solamente por una fracción de los elementos en algún tiempo. Así, ni la presencia de una influencia común todo el tiempo, ni el compartir simultáneo de la misma influencia por todos los elementos, parece esencial para alcanzar la sincronización en un sistemas de osciladores caóticos. Lo que se es crucial para establecer la sincronización en ambos sistemas es compartir algún mínimo de información promedio por los elementos sobre largos tiempos. Extensiones futuras de este trabajo deberían incluir la investigación de alguna cantidad, tal como la entropía transferida [Schreiber, 2000], para medir la cantidad mínima de información requerida para ambos tipos de sincronización, y la consideración de otras formas de comportamiento colectivo observado en redes dinámicas además de la sincronización.



SYNCHRONIZATION INDUCED BY INTERMITTENT VERSUS PARTIAL DRIVES IN CHAOTIC SYSTEMS

O. ALVAREZ-LLAMOZA* and M. G. COSENZA

*Centro de Física Fundamental,
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela*

**Departamento de Física, FACYT,
Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela*

Received November 11, 2008; Revised March 18, 2009

We show that the synchronized states of two systems of identical chaotic maps subject to either, a common drive that acts with a probability p in time or to the same drive acting on a fraction p of the maps, are similar. The synchronization behavior of both systems can be inferred by considering the dynamics of a single chaotic map driven with a probability p . The synchronized states for these systems are characterized on their common space of parameters. Our results show that the presence of a common external drive for all times is not essential for reaching synchronization in a system of chaotic oscillators, nor is the simultaneous sharing of the drive by all the elements in the system. Rather, a crucial condition for achieving synchronization is the sharing of some minimal, average information by the elements in the system over long times.

Keywords: Generalized synchronization; chaotic dynamical systems; coupled map lattices.

Chaos synchronization has attracted much interest from both scientists and engineers by providing insights into natural phenomena and motivation for practical applications in communications and control [Pecora & Carroll, 1990; Boccaletti *et al.*, 2002; Uchida *et al.*, 2005; Argyris *et al.*, 2005; Pikovsky *et al.*, 2002]. This phenomenon is commonly observed in unidirectionally coupled systems, where a distinction can be made between a drive or forcing subsystem and another driven or response subsystem that possesses chaotic dynamics [Pikovsky *et al.*, 2002]. Complete synchronization occurs when the state variables of the driving and the response subsystems converge to a single trajectory in phase space. On the other hand, generalized synchronization of chaos arises when a functional relation different from the identity is established between the drive and the response subsystems [Rulkov *et al.*, 1995; Abarbanel *et al.*, 1996; Kapitaniak *et al.*, 1996; Hunt *et al.*, 1997; Parlitz & Kokarev, 1999; Zhou & Roy, 2007].

Periodic, chaotic, or stochastic drives have been shown to induce generalized synchronization in chaotic systems [Maritan & Banavar, 1994; Pikovsky *et al.*, 2002]. The auxiliary system approach [Abarbanel *et al.*, 1996] shows that when a response and a replica subsystems are driven by the same signal, then the orbits in the phase spaces of the response and replica subsystems become identical and they can evolve on identical attractors, if their initial conditions lie on the same basin of attraction of the driven-response system. By extension, an ensemble of identical chaotic oscillators can also be synchronized by a common drive. The specific functional form of the drive is not essential; the basic mechanism that leads to synchronization is the sharing of the same information by the oscillators for all times. In fact, it has recently been shown that the source of the common influence being received by the elements in an extended system is irrelevant; it could consist of an external drive, or an autonomous global interaction field

[Alvarez-Llamoza & Cosenza, 2008]. At the local level, each element in the system is subject to a source that eventually induces complete or generalized synchronization between the source and the element.

In this paper, we explore another mechanism for synchronization of a system of driven chaotic elements. We consider a system of chaotic elements where the external drive acts intermittently on all the elements with a probability p . From the analysis of the dynamics at the local level, we extend the auxiliary system approach to a situation where the drive is applied only to a fraction p of randomly chosen elements in a system. We show that the complete synchronized states in both, the intermittently and the partially driven systems, are equivalent. Our results show that the presence of a common drive for all times is not indispensable for reaching synchronization in an extended system of chaotic oscillators, nor is the simultaneous sharing of the drive by all the elements in the system. Our work is motivated by the practical aspect of searching for minimal requirements for the emergence of synchronization in dynamical systems.

We search for minimal conditions for the occurrence of synchronization of chaos by using models of coupled maps. Let us consider a system of N uniformly, intermittently driven maps, defined as

$$\forall i, x_{t+1}^i = \begin{cases} s(x_t^i, y_t), & \text{with probability } p \\ f(x_t^i), & \text{with probability } (1-p) \end{cases} \quad (1)$$

$$y_{t+1} = g(y_t),$$

where x_t^i ($i = 1, 2, \dots, N$) gives the state of the i th map at discrete time t , ϵ is the strength of the coupling to the drive $g(y_t)$. Each map is subject to the same external influence (or lack of it) at any time. The coupling function is chosen to have the diffusive form

$$s(x_t^i, y_t) = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon g(y_t). \quad (2)$$

We assume a chaotic driven dynamics given by a singular map belonging to the family $f(x_t) = b - |x_t|^z$, where $|z| < 1$, b is a real parameter and $x_t \in (-\infty, \infty)$. These singular maps exhibit robust chaos, with no periodic windows in a finite interval of the parameter b [Alvarez-Llamoza *et al.*, 2008]. Robustness is an important property in applications that require reliable operation under chaos in the sense that the chaotic behavior cannot be destroyed by small perturbations of the system

parameters. In particular, we employ the value $z = -0.5$ for which the corresponding map displays robust chaotic dynamics in the range $b \in [0.62996, 1.88988]$.

A completely synchronized state in the system Eq. (1) is given by $x_t^i = x_t = y_t, \forall i$, and it can occur when $g = f$. On the other hand, if $g \neq f$, generalized synchronization, characterized by the condition $x_t^i = x_t \neq y_t$, may also arise in this system for $p \leq 1$. A synchronized state can be characterized by the asymptotic time-average $\langle \sigma \rangle$ (after discarding a number of transients) of the instantaneous standard deviations σ_t of the distribution of map variables x_t^i , defined as

$$\sigma_t = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_t^i - \langle x_t \rangle)^2 \right]^{1/2}, \quad (3)$$

where $\langle x_t \rangle$ is the instantaneous mean of the values $x_t^i, \forall i$. Stable synchronization corresponds to $\langle \sigma \rangle = 0$. Here we use the numerical criterion $\langle \sigma \rangle < 10^{-7}$. Figure 1 shows σ_t as a function of time for

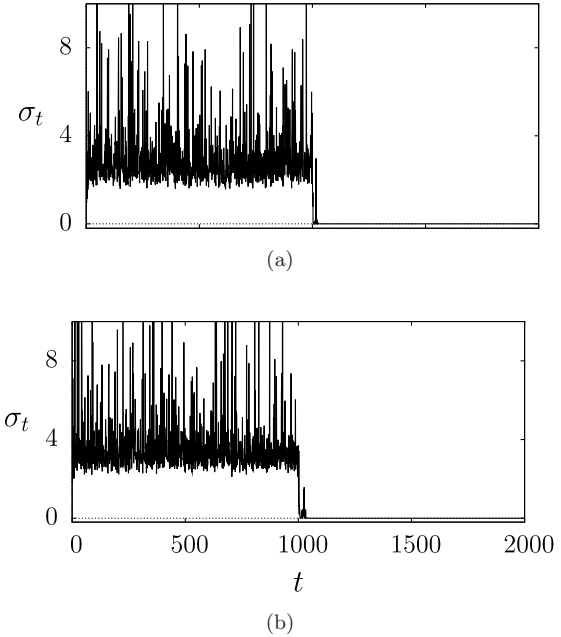


Fig. 1. σ_t versus t for the system of driven maps Eq. (1) with $N = 10^4$ and $f(x) = 1.2 - |x|^{-0.5}$, for different forms of the drive $g(y_t)$. Initial conditions were randomly and uniformly distributed such that $x_0^i \in [0, 10]$. The drive $g(y_t)$ is applied with probability p starting at $t = 1000$. (a) $g(y_t) = 1.2 - |y_t|^{-0.5}$, $\epsilon = 0.7$, $p = 0.6$ (complete synchronization). (b) $g(y_t) = 1 - 2y_t^2$, $\epsilon = 0.8$, $p = 0.8$ (generalized synchronization).

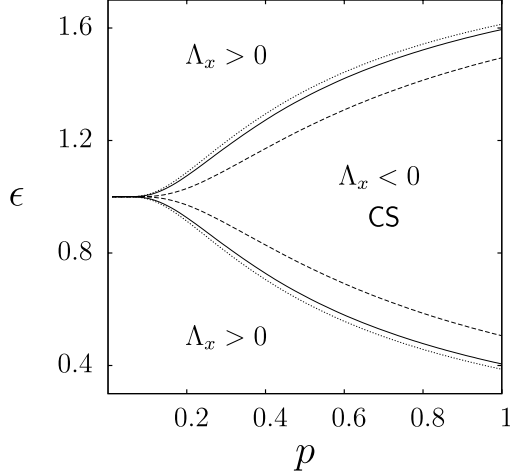


Fig. 2. Regions for completely synchronized (CS) states ($\langle \sigma \rangle < 10^{-7}$, after discarding 10^4 iterates) on the plane (p, ϵ) for the system of intermittently driven maps, Eq. (1) with $f(x) = 1.2 - |x|^{-0.5}$, $N = 10^4$. Dashed line: $g(y_t) = \bar{x}_1 = -0.393713$; solid line: $g(y_t) = 1.2 - |y_t|^{-0.5}$; dotted line: $g(y_t) = \{\bar{x}_1 = 0.204805, \bar{x}_2 = -1.00968\}$. The boundaries also indicate the onset of stability of those same complete synchronized states in the partially driven system, Eq. (9). The boundaries that separate the stable from the unstable regions are given by the corresponding curve $\Lambda_x = 0$ [Eq. (8)] for the driven single map, Eq. (4).

the intermittently driven system Eq. (1) subject to different chaotic drives g .

For a given value of the coupling strength ϵ , there is a threshold value of the probability p required to reach either type of synchronization. Figure 2 shows the regions for the complete synchronized states of the system [Eq. (1)] within the space of parameters (p, ϵ) for different orbits of a drive $g = f$. In particular, when $g = f$, complete synchronization into an unstable period- m orbit of the map f , defined by $f^{(m)}(\bar{x}_n) = \bar{x}_n$ and satisfying $\prod_{n=1}^m |f'(\bar{x}_n)| > 1$, where $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ are the set of consecutive points on this orbit, can also be achieved in the system Eq. (1), as shown in Fig. 2.

Figure 3 shows the regions for the generalized synchronized states of the system Eq. (1) within the space of parameters (p, ϵ) , with a drive $g \neq f$.

Since each map in the intermittently driven system Eq. (1) experiences the same external influence (or none) at any time, the properties of this system can be analyzed from the behavior of the individual local dynamics. Thus, we consider a single, intermittently driven map

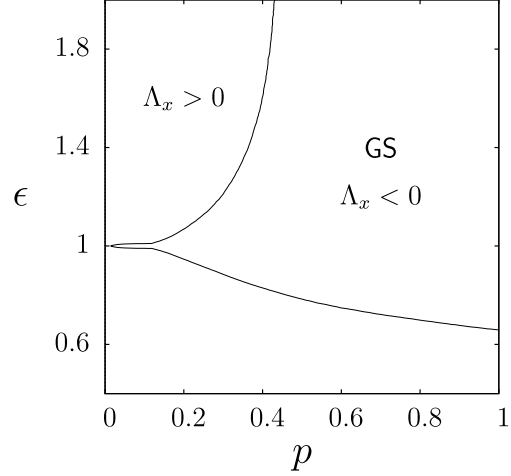


Fig. 3. Region for generalized synchronized (GS) states ($\langle \sigma \rangle < 10^{-7}$, after discarding 10^4 iterates) for the system of maps Eq. (1), with $f(x) = 1.2 - |x|^{-0.5}$, $N = 10^4$, subject to the intermittent drive $g(y_t) = 1 - 2y_t^2$, on the plane (p, ϵ) . This same region corresponds to generalized synchronization (satisfying $\Lambda_x < 0$) for the single driven map Eq. (4) with $g(y_t) = 1 - 2y_t^2$.

$$x_{t+1} = \begin{cases} s(x_t, y_t), & \text{with probability } p \\ f(x_t), & \text{with probability } (1 - p), \end{cases} \quad (4)$$

$$y_{t+1} = g(y_t),$$

where x_t is the driven or response variable, y_t is the drive and $s(x_t, y_t)$ has the same functional form as in Eq. (2). The auxiliary system approach [Abarbanel *et al.*, 1996] implies that a driven map can synchronize on identical orbits with another, identically driven map. Thus, the occurrence of stable synchronization in the single map Eq. (4) should lead to synchronization in the extended system of maps Eq. (1), even when the drive acts intermittently in both cases.

The single driven map Eq. (4) can be regarded as a two-dimensional system. The linear stability condition for synchronization requires the knowledge of the Lyapunov exponents for such a system. These are defined as $\Lambda_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln L_x$ and $\Lambda_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln L_y$, where L_x and L_y are the magnitude of the eigenvalues of $[\prod_{t=0}^{T-1} \mathbf{J}(x_t, y_t)]^{1/T}$, and $\mathbf{J}(x_t, y_t)$ is the Jacobian matrix for the system Eq. (4), calculated along an orbit. A given orbit $\{x_t, y_t\}$ from $t = 0$ to $t = T - 1$ can be separated in two subsets, according to the source of the x_t variable, either coupled or uncoupled to the drive, that we respectively denote as

$A = \{\{x_t, y_t\} : x_t = s(x_{t-1}, y_{t-1})\}$ possessing pT elements, and $B = \{\{x_t, y_t\} : x_t = f(x_{t-1})\}$ having $(1-p)T$ elements. We get

$$\left(\prod_{t=0}^{T-1} \mathbf{J}\right)^{1/T} = \begin{pmatrix} \prod_{t: x_t \in A} s_x & \prod_{t: x_t \in B} f'(x_t) & K \\ 0 & \prod_{t=0}^{T-1} g'(y_t) \end{pmatrix}^{1/T}, \quad (5)$$

where $s_x = \partial s / \partial x = (1 - \epsilon)f'(x)$, and K is a polynomial whose terms contain products of s_x , ϵ , and $g'(y_t)$ to be evaluated along time. Then $L_x = [\prod_{x_t \in A} s_x \prod_{x_t \in B} f'(x_t)]^{1/T}$ and $L_y = [\prod_{t=0}^{T-1} g'(y_t)]^{1/T}$. Thus, we get

$$\Lambda_x = p \ln |1 - \epsilon| + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\ln \prod_{x_t \in A} |f'(x_t)| + \ln \prod_{x_t \in B} |f'(x_t)| \right] \quad (6)$$

$$\Lambda_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |g'(y_t)| = \lambda_g, \quad (7)$$

where λ_g is the Lyapunov exponent of the map $g(y_t)$. Synchronization occurs if the Lyapunov exponent corresponding to the driven map is negative [Rulkov *et al.*, 1995]; i.e. $\Lambda_x < 0$. For a given set of parameter values, there is a definite value of the probability p at which the exponent Λ_x changes its sign, from positive to negative, signaling the onset of synchronization in the dynamics of the two-dimensional system Eq. (4).

Figure 4 shows Λ_x and Λ_y as a function of p for the driven map Eq. (4) for different drives g .

When $g = f$, the condition $\Lambda_x < 0$ implies complete synchronization, where $x_t = y_t$. In this case we get

$$\begin{aligned} \Lambda_y &= \lambda_f, \\ \Lambda_x &= p \ln |1 - \epsilon| + \lambda_f, \end{aligned} \quad (8)$$

where λ_f is the Lyapunov exponent of the map f . Figure 2 shows the stability boundaries, given by $\Lambda_x = 0$, for the completely synchronized states of the system Eq. (4) within the space of parameters (p, ϵ) for different orbits of a drive $g(y_t)$.

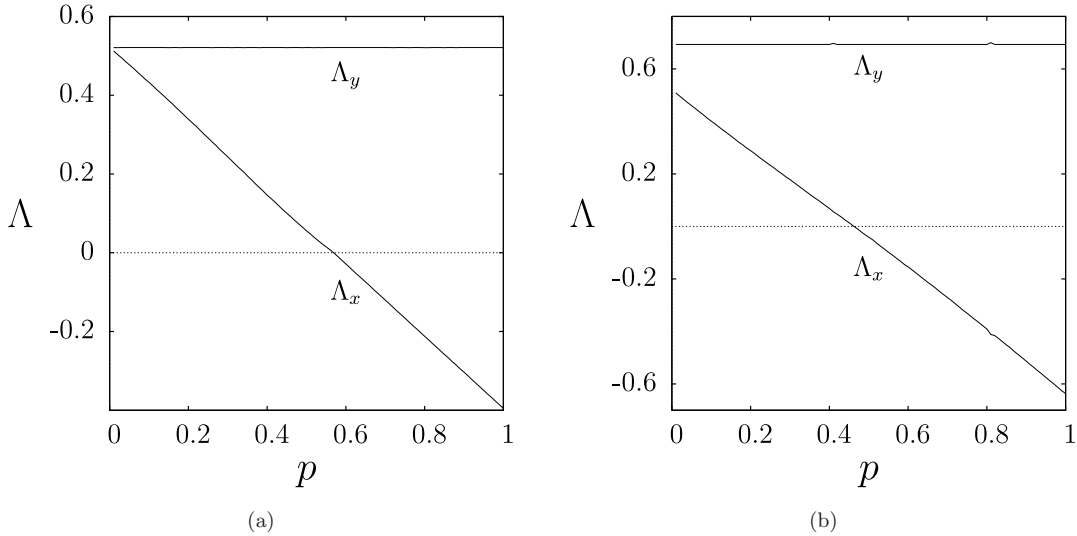


Fig. 4. Lyapunov exponents Λ_x and Λ_y as functions of p for the single driven map Eq. (4) with $f(x) = 1.2 - |x|^{-0.5}$, calculated over 5×10^4 iterates after discarding 5×10^3 transients for each value of p . (a) $g(y_t) = 1.2 - |y_t|^{-0.5}$, $\epsilon = 0.6$ (complete synchronization). (b) $g(y_t) = 1 - 2y_t^2$, $\epsilon = 0.8$ (generalized synchronization).

On the other hand, if $g \neq f$, the condition $\Lambda_x < 0$ corresponds to generalized synchronization, characterized by $x_t \neq y_t$. Figure 3 shows the stability boundaries, given by $\Lambda_x = 0$, for the generalized synchronized states of the system Eq. (4) within the space of parameters (p, ϵ) for different drives $g(y_t)$. In both, Figs. 2 and 3, the curves $\Lambda_x = 0$ coincide with the boundaries for stability of complete and generalized synchronization, respectively, in the extended system Eq. (1). Thus, the condition $\Lambda_x < 0$ for generalized or complete synchronization in the single driven map Eq. (4) is equivalent to the condition for the stability of the synchronized state $x_t^i = x_t$, $\forall i$, in the intermittently driven system of maps Eq. (1).

The above results are a consequence of the auxiliary system approach. Furthermore, the equivalence between a single driven map and a system of driven similar maps also shows that, under some circumstances, the collective behavior of an extended system of interacting elements can be inferred by considering the dynamics on a single element at the local level. As an application of this idea, we consider a partially driven system of maps defined as

$$\begin{aligned} x_{t+1}^i &= \begin{cases} s(x_t^i, y_t), & \text{with probability } p \\ f(x_t^i), & \text{with probability } (1-p) \end{cases} \quad (9) \\ y_{t+1} &= g(y_t). \end{aligned}$$

The parameter p is the probability of interaction of a map with the drive g at a time t . The driven elements are randomly chosen with a probability p , so that not all the maps in the system receive the same external influence at all times. Thus, the average fraction of driven elements in the system Eq. (9) at any given time is p . In comparison, the forcing of the elements in the intermittently driven system Eq. (1) is simultaneous and uniform; each map receives the same influence from the drive g at any t with probability p .

When system Eq. (9) gets synchronized, we have $x_t^i = x_t$. However, the synchronized solution exists only if $g = f$. Therefore, only complete synchronization $x_t^i = x_t = y_t$ can occur in this system.

At the local level, each map in the partially driven system Eq. (9) is subject, on the average, to an external forcing g with probability p . Thus, the behavior of system Eq. (9) can also be studied from

the behavior of the single, intermittently driven map Eq. (4). In particular, if the system of maps Eq. (9) driven with $g = f$ reaches a complete synchronized state for some values of parameters, then for this same set of parameters the single driven map Eq. (4) subject to the same drive should eventually exhibit a synchronized state similar to that of system Eq. (9). Thus, the condition $\Lambda_x < 0$ for complete synchronization in the single driven map Eq. (4), that implies stable synchronization in the intermittently driven system Eq. (1), is also equivalent to the condition for the stability of the complete synchronized state $x_t^i = x_t = y_t$, $\forall i$, in the partially driven system Eq. (9). To see this, when $g = f$ we express the system Eq. (9) in vector form as

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{G}_t \mathbf{f}(\mathbf{x}_t) \quad (10)$$

where the $(N+1)$ -dimensional vectors $\mathbf{x}_t$ and $\mathbf{f}(\mathbf{x}_t)$ have components $[\mathbf{x}_t]_i = x_t^i$ and $[\mathbf{f}(\mathbf{x}_t)]_i = f(x_t^i)$, respectively, for $i = 1, \dots, N$, while $[\mathbf{x}_t]_{N+1} = y_t$ and $[\mathbf{f}(\mathbf{x}_t)]_{N+1} = g(y_t)$. The $(N+1) \times (N+1)$ matrix $\mathbf{G}_t$ expresses the coupling between the N maps and the drive at time t . The matrix $\mathbf{G}_t$ at time t possesses pN randomly chosen rows, each having its components $G_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, (N+1)$) equal to 0, except $G_{i,i} = \epsilon$ and $G_{i,N+1} = \epsilon$. The remaining $N - pN$ rows, and the row $(N+1)$, have their components $G_{i,j} = 0$, except $G_{i,i} = 1$. Thus, at time t , the matrix $\mathbf{G}_t$ has the form

$$\mathbf{G}_t = \begin{pmatrix} (1-\epsilon) & 0 & \cdots & \cdots & \epsilon \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & (1-\epsilon) & \epsilon \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

The long-time evolution of the vector state $\mathbf{x}_t$ is given by

$$\mathbf{x}_{t+1} = \overline{\mathbf{G}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_t), \quad (12)$$

where the matrix $\overline{\mathbf{G}}$ is the geometric mean of the products of all possible configurations of $\mathbf{G}_t$ over a long time T ,

$$\overline{\mathbf{G}} = \left[\prod_{t=0}^{T-1} \mathbf{G}_t \right]^{1/T}. \quad (13)$$

We get

$$\overline{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} (1-\epsilon)^{pT} & 0 & \cdots & \cdots & K \\ 0 & (1-\epsilon)^{pT} & 0 & \cdots & K \\ \vdots & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & (1-\epsilon)^{pT} & K \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{1/T}, \quad (14)$$

where K is a polynomial whose terms contain products of $(1-\epsilon)$ and ϵ .

The linear stability analysis [Waller & Kapral, 1984; Kaneko, 1990] of the complete synchronized state $f(x_t^i) = f(x_t)$ yields

$$|\alpha_k e^{\lambda_f}| < 1, \quad (15)$$

where α_k ($k = 0, 1, \dots, N$) are the set of eigenvalues of the matrix $\overline{\mathbf{G}}$, with $\alpha_0 = 1$ and $\alpha_k = (\epsilon - 1)^p$ for $k > 0$, having N -fold degeneracy. The eigenvector corresponding to $k = 0$ is homogeneous. Thus perturbations of $\mathbf{x}_t$ along this eigenvector do not destroy the coherence, and the stability condition associated with $k = 0$ is irrelevant for a synchronized state. The other eigenvectors corresponding to $k \neq 0$ are not homogeneous. Thus, condition Eq. (15) with $k \neq 0$ becomes

$$p \ln|1 - \epsilon| + \lambda_f < 0, \quad (16)$$

which is the same condition for stability of complete synchronized states in the single driven map, Eq. (8), when $g = f$. Thus, the stability boundary $\Lambda_x = 0$ in Fig. 2 for the driven map with $g = f$ coincides with both, the boundary that separates the region where complete synchronization occurs on the space of parameters (p, ϵ) for the partially driven system Eq. (9), and the boundary for complete synchronization in the intermittently driven system Eq. (1). However, generalized synchronization cannot occur in the former system.

Although complete synchronization of chaos in both classes of driven systems, Eqs. (1) and (9), can be characterized from the knowledge of the dynamical response of a single driven map, the transient behavior to reach such a state is different in each case. Figure 5 shows the average time T_s required to attain complete synchronization as a function of p in both, a partially driven system and an intermittently driven system of maps. The times T_s are larger in the first case, i.e. a spatially uniform forcing on a system is more efficient than a nonuniform one for achieving complete synchronization.

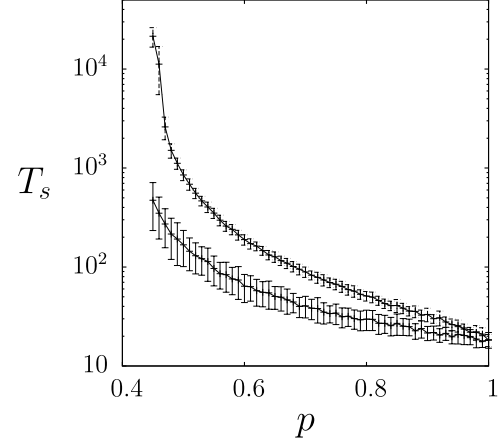


Fig. 5. Average time T_s to reach complete synchronization as a function of the probability p for both, the intermittently driven system Eq. (1) (bottom curve) and the partially driven system Eq. (9) (top curve). For both systems, $f = 1.2 - |x|^{-0.5}$, $\epsilon = 0.7$, $N = 10^4$, and $g = f$. The error bars on each curve correspond to standard deviations resulting from 100 realizations of random initial conditions for each value of p .

Complete synchronization in networks of coupled oscillators subject to either a uniform drive g with a probability p , or to a drive g applied on a random fraction p of the elements at all times, may also be equivalent. As an illustration, consider a uniformly, intermittently driven one-dimensional lattice,

$$\forall i, x_{t+1}^i = \begin{cases} (1 - \epsilon - \gamma)f(x_t^i) \\ \quad + \frac{\gamma}{2} [f(x_t^{i+1}) + f(x_t^{i-1})] + \epsilon g(y_t), \\ \text{with probability } p; \\ (1 - \gamma)f(x_t^i) + \frac{\gamma}{2} [f(x_t^{i+1}) + f(x_t^{i-1})], \\ \text{with probability } (1 - p); \end{cases} \quad (17)$$

where γ is the local coupling parameter. The analogy can be established with a similar lattice subject to a drive $g(y_t)$ acting on a randomly chosen fraction p of maps,

$$x_{t+1}^i = \begin{cases} (1 - \epsilon - \gamma)f(x_t^i) \\ \quad + \frac{\gamma}{2} [f(x_t^{i+1}) + f(x_t^{i-1})] + \epsilon g(y_t), \\ \text{with probability } p; \\ (1 - \gamma)f(x_t^i) + \frac{\gamma}{2} [f(x_t^{i+1}) + f(x_t^{i-1})], \\ \text{with probability } (1 - p). \end{cases} \quad (18)$$

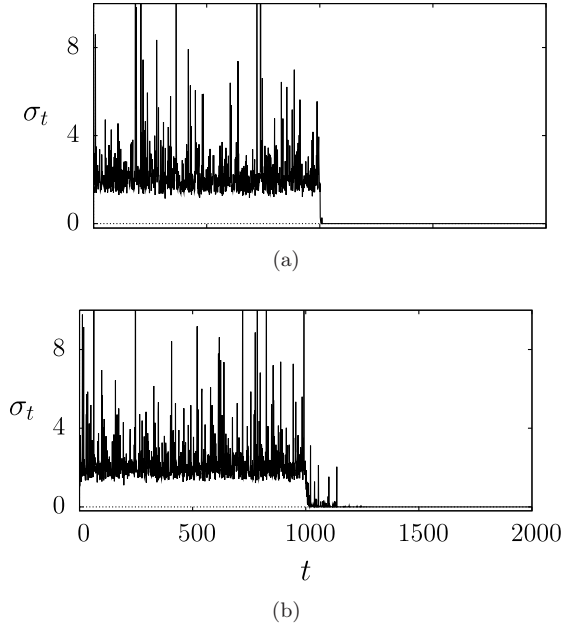


Fig. 6. σ_t versus t for (a) the intermittently driven lattice Eq. (17) and (b) the partially driven lattice Eq. (18). In both cases, $f(x) = 1.2 - |x|^{-0.5}$, $\epsilon = 0.8$, $\gamma = 0.2$, $p = 0.5$, $N = 10^3$, and the drive $g = f$ is applied starting at $t = 1000$. Random initial conditions are used.

Periodic boundary conditions are assumed for both lattices. Figure 6 shows σ_t as a function of time for both systems, Eqs. (17) and (18), for a given example.

In summary, we have shown that the synchronization behavior of a system of chaotic maps subject to an external forcing can be inferred from the behavior of a single element in the system. The local dynamics can be seen as a single driven map; when this drive-response system reaches synchronization, the auxiliary system approach implies that an ensemble of identical maps subject to a similar drive should also synchronize. We have shown that the regions of stable complete synchronization in parameter space of two systems of identical chaotic maps subject to the same drive acting either intermittently in time, or partially in space, coincide. At the local level, the long-time dynamics of both systems can be characterized by a single chaotic map driven with a probability p . In addition, we have shown that complete synchronization in networks of interacting elements subject to either intermittent or partial drives can also be similar. This result suggests that these systems possess an ergodicity property.

For the intermittently driven system, the sharing of the external influence by the elements takes place only a fraction of the time. In the case of the partially driven system, the external drive is shared only by a fraction of elements at any time. Thus, neither the presence of a common influence for all times, or the simultaneous sharing of the same influence by all the elements, seem essential for reaching synchronization in systems of chaotic oscillators. What becomes crucial for achieving synchronization in both systems is the sharing of some minimal, average information by the elements over long times. Future extensions of this work should include the investigation of some quantity, such as the transfer entropy [Schreiber, 2000], for measuring this minimal amount of information required for both types of synchronization, and the consideration of other forms of collective behaviors observed in dynamical networks, besides synchronization.

Acknowledgments

This work was supported by Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico, Universidad de Los Andes, Venezuela, through grant C-1579-08-05-B.

References

- Abarbanel, H. D. I., Rulkov, N. F. & Sushchik, M. M. [1996] "Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach," *Phys. Rev. E* **53**, 4528–4535.
- Alvarez-Llamoza, O. & Cosenza, M. G. [2008] "Generalized synchronization of chaos in autonomous systems," *Phys. Rev. E* **78**, 046216-1–046216-6.
- Alvarez-Llamoza, O., Cosenza, M. G. & Ponce, G. A. [2008] "Critical behavior of the Lyapunov exponent in type-III intermittency," *Chaos Solit. Fract.* **36**, 150–156.
- Argyris, A., Syvridis, D., Larger, L., Annovazzi-Lodi, V., Colet, P., Fischer, I., Garcia-Ojalvo, J., Mirasso, C. R., Pesquera, L. & Shore, K. A. [2005] "Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links," *Nature (London)* **438**, 343–346.
- Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D. L. & Zhou, C. S. [2002] "The synchronization of chaotic systems," *Phys. Rep.* **366**, 1–101.
- Hunt, B. R., Ott, E. & Yorke, J. A. [1997] "Differentiable generalized synchronization of chaos," *Phys. Rev. E* **55**, 4029–4034.
- Kaneko, K. [1990] "Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in networks of chaotic elements," *Physica D* **41**, 137–172.

- Kapitaniak, T., Wojewoda, J. & Brindley, J. [1996] "Synchronization and desynchronization in quasi-hyperbolic chaotic systems," *Phys. Lett. A* **210**, 283–289.
- Maritan, A. & Banavar, J. R. [1994] "Chaos, noise and synchronization," *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1451–1454.
- Parlitz, U. & Kokarev, L. [1999] *Handbook of Chaos Control*, ed. Schuster, H. (Wiley-VCH, Weinheim), p. 271.
- Pecora, L. M. & Carroll, T. L. [1990] "Synchronization in chaotic systems," *Phys. Rev. Lett.* **64**, 821–824.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M. & Kurths, J. [2002] *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge).
- Rulkov, N. F., Sushchik, M. M., Tsimring, L. S. & Abarbanel, H. D. I. [1995] "Generalized synchronization of chaos in directionally coupled systems," *Phys. Rev. E* **51**, 980–994.
- Schreiber, T. [2000] "Measuring information transfer," *Phys. Rev. Lett.* **85**, 461–464.
- Uchida, A., Rogister, F., Garcia-Ojalvo, J. & Roy, R. [2005] "Synchronization and communication with chaotic laser systems," *Prog. Opt.* **48**, 203–341.
- Waller, I. & Kapral, R. [1984] "Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators," *Phys. Rev. A* **30**, 2047–2055.
- Zhou, B. B. & Roy, R. [2007] "Isochronal synchrony and bidirectional communication with delay-coupled nonlinear oscillators," *Phys. Rev. E* **75**, 026205-1–026205-5.

Información: el valor recíproco negativo de la probabilidad.

CLAUDE SHANNON

No hay globalidad que sirva, sin localidad que valga.

CARLOS FUENTES

4

Global interactions, information flow and chaos synchronization

Interacciones globales, flujo de información y sincronización caótica

Artículo publicado en la Revista Physical Review E, en el volumen 88, 042920, desde la página 042920-1 hasta la 042920-8, año 2013. doi: [10.1103/PhysRevE.88.042920](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.042920)

La Revista Physical Review E, ISSN edición impresa: 1539-3755, ISSN edición online: 1550-2376, de la American Physical Society, se encuentra indizada en Current Physics Index, INSPEC, Medline, Physics Abstracts y Science Citation Index Expanded entre otros.

Resumen

Se investiga la relación entre la emergencia de sincronización caótica y el flujo de la información en sistemas dinámicos que poseen interacciones globales homogéneas o heterogéneas, y cuyo origen puede ser externo (sistemas forzados) e internos (sistemas autónomos). Empleando un modelo general de mapas caóticos globalmente acoplados para tal sistema, se demuestra que la presencia de un campo global homogéneo, sea externo o interno, aplicado todo el tiempo, no es indispensable para lograr sincronización completa o generalizada en un sistema de elementos caóticos. Sincronización completa puede aparecer también en sistemas con campo global heterogéneo; no se requiere compartir simultáneamente la información por todos los elementos del sistema. Se utiliza la información mutua normalizada y la transferencia de la información entre las variables globales y locales para caracterizar la sincronización completa y la generalizada. Se demuestra que esas medidas de información pueden caracterizar ambos tipos de estados

sincronizados y también permite discernir el origen del campo de interacción global. Un estado sincronizado emerge cuando una cantidad suficiente de información provista por el campo, es compartida por todos los elementos del sistema, en promedio para largos tiempos. Así, el valor máximo valor de la información transferida de arriba hacia abajo puede ser usada como un predictor de sincronización en un sistema, a medida que un parámetro es variado.

4.1. Campos globales de interacción

Describimos una interacción global como un campo que puede influenciar a todos los elementos de un sistema. Como un modelo simple de un sistema dinámico sujeto a una interacción global, se considera un sistema de N mapas acoplados de la forma

$$\begin{aligned}x_{t+1}^i &= w(x_t^i, y_t) \\ y_{t+1} &= \phi(y_t, x_t^j),\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde x_t^i ($i = 1, 2, \dots, N$) representa la variable de estado del i -ésimo mapa en el sistema en el tiempo discreto t , y_t es el campo de interacción global que puede afectar a cada mapa en el tiempo t , y $j \in Q$ donde Q es un subconjunto de los elementos en el sistema. La ecuación (4.1) describe un sistema de elementos interactuando con una ambiente dinámico común que puede recibir una retroalimentación del sistema. Por simplicidad, nos enfocaremos en la presencia de interacciones globales que no incluyen interacciones locales.

Un campo externo global y_t que posee su propia dinámica, independientemente de la dinámica de los elementos, viene dado por

$$\phi(y_t, x_t^j) = g(y_t).\tag{4.2}$$

Luego la Ec. (4.1) con la dinámica del campo Ec. (4.2) describe un sistema sujeto a un forzamiento global, es decir, un sistema acoplado unidireccionalmente. Por otro lado, un campo global interno y_t puede ser representado por

$$\phi(y_t, x_t^j) = h(x_t^j \mid j \in Q),\tag{4.3}$$

donde h es una función de los estados de un subconjunto dado Q de elementos en el sistema en un tiempo t . La función de acoplamiento h podría representar una restricción o una ley de conservación sobre el sistema. En este caso, Ec. (4.1) con el campo Ec. (4.3) corresponde a un sistema dinámico autónomo globalmente acoplado.

Se considerará el acoplamiento debido al campo de interacción global en la forma difusiva

$$w(x_t^i, y_t) = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon\phi(y_t, x_t^j),\tag{4.4}$$

donde f describe la dinámica local de los mapas, y el parámetro ϵ la fuerza del acoplamiento del campo global. Puesto que estamos interesados en la sincronización de caos, hemos escogido para la dinámica local el mapa logístico $f(x_t^i) = 4x_t^i(1 - x_t^i)$, de manera que $f(x_t^i)$ es totalmente caótico para $x_t^i \in [0, 1]$.

4.1.1. Estados sincronizados

La sincronización en el sistema Ec. (4.1) en un tiempo t corresponde al estado $x_t^i = x_t^j \forall i, j$. Así, un estado sincronizado puede ser descrito por la condición $x_t^i = \bar{x}_t, \forall i$, donde $\bar{x}_t$ es el campo medio instantáneo del sistema (media aritmética o promedio de x_t^i). Para caracterizar la sincronización se considera el promedio asintótico en el tiempo $\langle \sigma \rangle$, después de descartar transitorios, de la desviación estándar instantánea σ_t de la distribución de los estados de x_t^i . La sincronización corresponde a $\langle \sigma \rangle = 0$. Adicionalmente, se define el promedio asintótico en el tiempo $\langle \delta \rangle$ (después de descartar los transitorios) de la cantidad $\delta_t = |\bar{x}_t - y_t|$.

Dos formas de sincronización pueden tomar lugar en el sistema Ec. (4.1) en relación al campo global y_t : (i) *sincronización completa*, dado por la condición $x_t^i = \bar{x}_t = y_t$, es decir, todos los elementos están sincronizados con el campo, y se caracteriza por $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle = 0$; y (ii) *sincronización generalizada*, correspondiente a la condición $x_t^i = \bar{x}_t \neq y_t$, es decir, los elementos están sincronizados entre ellos pero no con el campo, y descrito por $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle \neq 0$.

Para caracterizar el intercambio de la información entre el campo global y la dinámica local en el sistema, se consideran las siguientes cantidades: (1) La información mutua normalizada entre dos variables y_t y x_t , basado en la mutua información de Shanon (referencia 30 del artículo):

$$M_{y,x} = - \frac{\sum_{x_t, y_t} P(x_t, y_t) \log \left(\frac{P(x_t, y_t)}{P(x_t) P(y_t)} \right)}{\sum_{x_t} P(x_t) \log P(x_t)}; \quad 4.5$$

(2) la transferencia de la información de la variable y_t a la variable x_t , definida como

$$T_{y,x} = \sum_{x_{t+1}, x_t, y_t} P(x_{t+1}, x_t, y_t) \log \left(\frac{P(x_{t+1}, x_t, y_t) P(x_t)}{P(x_t, y_t) P(x_{t+1}, x_t)} \right), \quad 4.6$$

donde $P(x_t)$ es la distribución de probabilidad de la serie de tiempo de la variable x_t , $P(x_t, y_t)$ es la probabilidad conjunta de x_t y y_t , etc. La cantidad $M_{x,y}$ mide el solapamiento del contenido de la información de las variables y_t y x_t ; representa cuanta incertidumbre de x_t decrece si y_t es conocida. La cantidad $T_{y,x}$ mide el grado de dependencia de x_t sobre la variable y_t ; es decir, la información requerida para representar el valor x_{t+1} a partir del conocimiento de y_t . Note que $T_{y,x} \neq T_{x,y}$, en cambio $M_{x,y}$ es simétrica $M_{x,y} = M_{y,x}$. Cuando las variables x_t y y_t se sincronizan $M_{x,y} = 1$ y $T_{y,x} = 0$.

4.2. Interacción global homogénea

Se describe una interacción global homogénea como un campo compartido simultáneamente por todos los elementos en el sistema. Puesto que, en general, la interacción con el campo podría no ocurrir para todos los tiempos, consideramos un sistema de mapas acoplados sujetos a una interacción homogénea intermitente. Un sistema sujeto a un campo externo homogéneo corresponde a

$$\forall i, \quad \begin{cases} x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon g(y_t), & \text{con probabilidad } p \\ x_{t+1}^i = f(x_t^i), & \text{con probabilidad } (1 - p), \end{cases} \quad y_{t+1} = g(y_t). \quad 4.7$$

La sincronización completa en el sistema Ec. (4.7) viene dada por $x_t^i = \bar{x}_t = y_t, \forall i$, y puede ocurrir cuando el campo externo es igual a la dinámica local, $g = f$. Si $g \neq f$, la sincronización generalizada, caracterizada por la condición $x_t^i = \bar{x}_t \neq y_t, \forall i$, podría surgir en el sistema.

Por otro lado, un sistema sujeto a un campo global homogéneo autónomo puede ser descrito por

$$\forall i, \quad \begin{cases} x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon h(x_t^j | j \in Q_t), & \text{con probabilidad } p, \\ x_{t+1}^i = f(x_t^i), & \text{con probabilidad } (1 - p), \end{cases} \quad 4.8$$

donde Q_t es un subconjunto de $q \leq N$ elementos del sistema escogidos aleatoriamente en cada tiempo t . La sincronización completa en el sistema Ec. (4.8) ocurre cuando $f(x_t^i) = f(\bar{x}_t) = h$, mientras que la sincronización generalizada aparece si $f(x_t^i) = f(\bar{x}_t) \neq h, \forall i$.

4.2.1. Sincronización completa

Se considera el sistema forzado dado por la Ec. (4.7) con $g = f$, y el sistema autónomo Ec. (4.8) sujeto a una función de campo medio parcial definida como

$$h(x_t^j | j \in Q_t) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q f(x_t^j), \quad 4.9$$

donde $q \leq N$ mapas son elegidos aleatoriamente en cada tiempo t . Para esos sistemas, la condición $\langle \delta \rangle$ implica que $\langle \sigma \rangle$ y, por lo tanto, sincronización completa.

La figura 2(a) del artículo muestra la cantidad $\langle \delta \rangle$ como función del parámetro de acoplamiento ϵ , para ambos sistemas: sistema forzado homogéneo y sistema autónomo homogéneo, para valores fijos de p y q/N . La sincronización completa en ambos sistemas toma lugar en el valor crítico $\epsilon_c = 0.579$, para el cual $\langle \delta \rangle < 10^{-7}$. La figura 2(b) y 2(c)

muestran, respectivamente, la información mutua normalizada M_{y_t, x_t^i} y la información transferida T_{y_t, x_t^i} entre el campo global homogéneo y un mapa, promediado sobre 50 mapas elegidos aleatoriamente, para ambos sistemas como función de ϵ . Esas cantidades promediadas dan prácticamente los mismos resultados que para sólo un mapa elegido aleatoriamente.

4.2.2. Sincronización generalizada

Si la forma funcional del campo global es diferente a la dinámica local, sincronización generalizada podría ocurrir en un sistema sujeto a interacción global homogénea. Por ejemplo, se considera un campo externo en el sistema forzado Ec. (4.7) como

$$g(y_t) = \frac{\mu}{2} (1 - |2y_t - 1|), \quad 4.10$$

con $\mu = 1.98$ y $y_t \in [0, 1]$. Luego, en la sincronización del sistema forzado Ecs. (4.7)-(4.10), se tiene $x_t^i = \bar{x}_t \neq y_t$. Similarmente, en un sistema autónomo como el de la Ec. (4.8), se considera una interacción global diferente al campo medio, tal como la función de acoplamiento

$$h(x_t^j | j \in Q_t) = \frac{\mu}{2} \left[1 - \left| 2 \left(\frac{1}{q} \sum_{j=1}^q x_t^j \right) - 1 \right| \right], \quad 4.11$$

con $\mu = 1.98$, donde $q \leq N$ elementos son elegidos aleatoriamente en cada tiempo t . Luego un estado sincronizado en el sistema autónomo dado por las Ecs. (4.8)-(4.11) corresponde a $f(x_t^i) = f(\bar{x}_t) \neq h$.

La figura 3(a) muestra la cantidad $\langle \sigma \rangle$ como función del parámetro de acoplamiento ϵ para ambos sistemas con interacción global homogénea, el forzado y el autónomo con g y h dados por Ec. (4.10) y Ec. (4.11) respectivamente. Los sistemas obtienen sincronización generalizada en diferentes valores de ϵ , para el cual $\langle \sigma \rangle < 10^{-7}$. La pequeña figura insertada muestra que la cantidad $\langle \delta \rangle$ para ambos sistemas no se hace cero cuando ϵ es variado, indicando que en ambos casos el estado sincronizado corresponde a sincronización generalizada.

La figura 3(b) muestra a M_{y_t, x_t^i} para ambos sistemas como función de ϵ . En contraste con el valor $M_{y_t, x_t^i} = 1$ exhibido para el caso de la sincronización completa, figura 2(b), el comportamiento de M_{y_t, x_t^i} en el régimen de sincronización generalizada es diferente para cada sistema. M_{y_t, x_t^i} en un estado de sincronización generalizada para el sistema autónomo alcanza casi un valor constante $M_{y_t, x_t^i} = 0.695 < 1$, puesto que la función de acoplamiento h y los mapas locales no son idénticos. Para el sistema forzado M_{y_t, x_t^i} se incrementa monótonamente a medida que ϵ se incrementa, pero los valores de M_{y_t, x_t^i} están por debajo que los del sistema autónomo en la región de sincronización generalizada.

La figura 3(c) muestra la transferencia de información T_{y_t, x_t^i} versus ϵ para ambos sistemas. Similar al comportamiento de observado para la sincronización completa, a medida que el acoplamiento se aproxima al valor crítico ϵ_c para la emergencia de sincronización generalizada, la transferencia de la información en el sistema autónomo llega a un máximo. También, los valores de T_{y_t, x_t^i} para el sistema forzado son más grandes que para el sistema autónomo. Sin embargo, en la sincronización generalizada de caos, para $\epsilon > \epsilon_c$, la transferencia de la información en ambos sistemas no se anula; y los valores de T_{y_t, x_t^i} para el sistema forzado son mayores que para el sistema autónomo.

4.3. Interacciones globales heterogéneas

El concepto de campo global puede ser extendido más allá del concepto de homogeneidad espacial. En relación a esto se considera el sistema forzado con interacción heterogénea como sigue:

$$\begin{aligned} x_{t+1}^i &= \begin{cases} (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon g(y_t), & \text{si } i \in R_t \\ f(x_t^i), & \text{si } i \notin R_t, \end{cases} \\ y_{t+1} &= g(y_t), \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde R_t es un subconjunto de pN elementos en el sistema, elegidos aleatoriamente en cada tiempo t con una probabilidad $p \leq 1$. Así, la fracción promedio de elementos acoplados con el campo en la Ec. (4.12), en cualquier tiempo es p . De igual manera, el sistema autónomo con interacción heterogénea viene dado por

$$x_{t+1}^i = \begin{cases} (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon h(x_t^j : j \in Q_t), & \text{si } i \in R_t, \\ f(x_t^i), & \text{si } i \notin R_t, \end{cases} \tag{4.13}$$

donde otra vez, Q_t es un subconjunto que consiste en $q \leq N$ elementos del sistema que son elegidos aleatoriamente en cada tiempo t .

4.3.1. Sincronización completa

Cuando el sistema forzado heterogéneo Ec. (4.12) alcanza sincronización, se tiene $x_t^i = x_t$. Sin embargo, la solución sincronizada existe solamente si $g = f$. Por lo tanto, solamente sincronización completa $x_t^i = x_t = y_t$ puede tomar lugar en el sistema. Por otro lado, un estado sincronizado en el sistema autónomo heterogéneo Ec. (4.13) ocurre cuando $f(x_t^i) = f(\bar{x}_t)$. Sin embargo, esta solución existe solamente si $h = f(\bar{x}_t)$. Por lo tanto, como en el caso forzado, solamente sincronización completa, donde $f(x_t^i) = f(\bar{x}_t) = h$, puede emerger en el sistema autónomo heterogéneo Ec. (4.13).

Las figuras 5(a)-5(c) muestra a las cantidades $\langle \delta \rangle$, M_{y_t, x_t^i} y T_{y_t, x_t^i} respectivamente, como función de ϵ para ambos sistemas. Éstos alcanza la sincronización completa en el valor crítico $\epsilon_c = 0.579$.

T_{y_t, x_t^i} en 5(c) alcanza un valor máximo previo al umbral para la sincronización, similarmente al comportamiento observado en los sistemas homogéneos. Así, un valor máximo en la transferencia de información en el espacio de los parámetros puede ser considerado como un precursor del estado de sincronización, sea ésta completa o generalizada.

4.4. Conclusiones

Se ha utilizado la información mutua normalizada M_{y_t, x_t^i} y la transferencia de información T_{y_t, x_t^i} entre las variables globales y locales para caracterizar la sincronización en modelos de mapas caóticos acoplados. Se encontró que la presencia de un campo global homogéneo, sea externo o interno, aplicado en todo momento, no es indispensable para alcanzar sincronización completa o generalizada en un sistema de elementos caóticos. La sincronización completa puede también aparecer con campo global heterogéneo; ella no requiere que todos los elementos del sistema compartan la interacción global simultáneamente. Además, el campo global en sistemas autónomos no necesita depender de todas las variables internas para alcanzar sincronización y, en particular su forma funcional no es determinante para la sincronización generalizada.

En ambos sistemas, con campo global homogéneo o heterogéneo, a nivel local cada elemento es sujeto, en promedio, a un campo que eventualmente induce alguna forma de sincronización entre el elemento y el campo, de manera similar a un solo sistema maestro-esclavo. Lo que resulta esencial para la emergencia de un cierto tipo de estado de sincronización es que todos los elementos del sistema compartan en promedio una cantidad suficiente de información provista por el campo en el tiempo. Esta cantidad es caracterizada por el máximo de T_{y_t, x_t^i} previo al valor crítico del parámetro para el establecimiento de sincronización, sea ésta completa o generalizada. Por lo tanto la cantidad T_{y_t, x_t^i} podría ser empleada para anticipar la ocurrencia de un estado de sincronización en el espacio de parámetros de un sistema que posee campo de interacción global. Además, la forma en la cual la información fluye de escalas macroscópica hacia escalas microscópicas, medida mediante M_{y_t, x_t^i} y T_{y_t, x_t^i} , difiere entre un sistema forzado y un sistema autónomo con interacciones globales, aún si ellos tienen formas funcionales similares para sus dinámicas locales o para sus campos globales. En resumen se ha encontrado que **(i)** cerca del establecimiento de sincronización completa cuando un parámetro es variado, el máximo de la transferencia de la información T_{y_t, x_t^i} para un sistema forzado es más grande que para un sistema autónomo; **(ii)** cerca del establecimiento de sincronización generalizada, la información mutua normalizada M_{y_t, x_t^i} y T_{y_t, x_t^i} exhiben cambios agudos para un sistema autónomo, mientras que esas cantidades exhiben un comportamiento suave para sistemas forzados; y **(iii)** en un estado de sincronización generalizada T_{y_t, x_t^i} es más grande para un sistema forzado que para un sistema autónomo y M_{y_t, x_t^i} es más pequeño para un sistema forzado que para uno autónomo.

Global interactions, information flow, and chaos synchronization

G. Paredes,¹ O. Alvarez-Llamoza,² and M. G. Cosenza³¹*LFAC, Universidad Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal, Venezuela*²*Departamento de Física, FACYT, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela*³*Centro de Física Fundamental, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela*

(Received 6 July 2013; published 22 October 2013)

We investigate the relationship between the emergence of chaos synchronization and the information flow in dynamical systems possessing homogeneous or heterogeneous global interactions whose origin can be external (driven systems) or internal (autonomous systems). By employing general models of coupled chaotic maps for such systems, we show that the presence of a homogeneous global field, either external or internal, for all times is not indispensable for achieving complete or generalized synchronization in a system of chaotic elements. Complete synchronization can also appear with heterogeneous global fields; it does not require the simultaneous sharing of the field by all the elements in a system. We use the normalized mutual information and the information transfer between global and local variables to characterize complete and generalized synchronization. We show that these information measures can characterize both types of synchronized states and also allow us to discern the origin of a global interaction field. A synchronization state emerges when a sufficient amount of information provided by a field is shared by all the elements in the system, on the average over long times. Thus, the maximum value of the top-down information transfer can be used as a predictor of synchronization in a system, as a parameter is varied.

DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042920

PACS number(s): 05.45.Xt, 89.75.-k, 05.50.+q

I. INTRODUCTION

Global interactions in a system occur when all its elements are subject to a common influence or field. Global interactions appear naturally in the description of many physical, biological, and social systems, such as coupled oscillators [1,2], Josephson junction arrays [3], charge density waves [4], multimode lasers [5], parallel electric circuits, neural dynamics, ecological systems, evolution models [6], economic exchange [7], social networks [8], mass media models [9], cross-cultural interactions [10], etc. A global interaction field may consist of an external environment acting on the elements, as in a driven dynamical system; or it may originate from the interactions between the elements, in which case, we talk of autonomous dynamical systems. In many cases, global interaction fields coexist with local or short-range interactions.

Although systems with global interactions possess a simple topological connectivity structure—a fully connected network—they can exhibit a variety of collective behaviors, such as chaos synchronization, dynamical clusters, nontrivial collective behavior, chaotic itineracy [6,11], quorum sensing [12], etc. These behaviors have been studied in models of globally coupled maps [13] and have been experimentally investigated in globally coupled oscillators in chemical, physical, and biological systems [14–17].

In particular, chaos synchronization is a fundamental phenomenon in dynamical systems [18,19]. Its investigation has provided insights into many natural processes and motivation for practical applications such as secure communications and control of nonlinear systems [20–22]. Complete synchronization in a system of dynamical elements subject to a global interaction field, either external or autonomous, occurs when the state variables of all the elements and the global field converge to a single orbit in phase space. Generalized chaos synchronization, originally discovered in driven chaotic systems, arises when all the state variables of the elements

in the system get synchronized into an orbit that is different from that of the drive [23,24]. The concept of generalized synchronization of chaos has also been extended to the context of autonomous systems [25]. This means that the chaotic state variables in a dynamical system can synchronize to each other but not to a coupling function containing information from those variables.

The occurrence of both forms of chaos synchronization in driven and in autonomous systems with global interactions suggests that the nature, either external or endogenous, of the global field acting on the elements in a system is irrelevant. At the local level, each element in the system is subject to a field that eventually induces some form of synchronization between that field and the element. In general, the local dynamics in systems with global interactions can be seen as a single drive-response system [11,26]. In particular, if the time evolution of an external global field acting on a system is identical to that of an autonomous global field acting on a replica system, the corresponding local drive-response dynamics in both systems should be indistinguishable, and therefore the corresponding synchronized states are equivalent; i.e., they occur for the same parameter values in both systems [27].

In many systems it is important not only to detect synchronized or other collective states, but also to understand the relationships between global and local scales that lead to such behaviors. For example, it has recently been argued that top-down causation—where information flows from higher levels to lower levels in complex systems—may be a major contributor to evolutionary transitions and to the emergence of behaviors in living systems [28], and synchronization in neural systems has been described as a top-down information processing driven by a stimulus [29].

The above results suggest that the emergence of collective behaviors, such as a synchronized state, in a system is associated with the reception by its elements of some amount

of information provided by a source, either external or endogenous to the system. In this article we investigate the relationship between information flow between the global and local variables and the emergence of complete and generalized synchronization of chaos in dynamical networks with global interactions of different types. We employ information measures [30,31] that have been widely applied to quantify drive-response causal relationships between subsystems and interdependences between data sets in many fields of science, including linguistics [32], electroencephalographic signals [33], neuroscience [34], communication systems [35], dynamical systems [36], and climate networks [37]. We show that these information measures can characterize complete and generalized synchronized states and also allow us to discern the origin, either external or endogenous, of a global interaction field. A given synchronization state emerges when a sufficient amount of the information transmitted by a field is shared by all the elements in the system, on the average over long times. Thus, the maximum value of the top-down information transfer can be employed as a predictor of synchronization as a parameter in the system, such as the coupling strength to the field, is varied.

In Sec. II we present a general coupled map model for systems with external or endogenous global interactions, and define the quantities to characterize synchronized states and information flow in such systems. Homogeneous global interaction fields, which may act intermittently, are considered in Sec. III. We extend the concept of a global field to include heterogeneous global interactions in Sec. IV. Section V contains the conclusions of this work.

II. GLOBAL INTERACTION FIELDS

We describe a global interaction in a system as a field that can influence all the elements in the system. As a simple model of a dynamical system subject to a global interaction, we consider a system of N coupled maps of the form

$$\begin{aligned} x_{t+1}^i &= w(x_t^i, y_t), \\ y_{t+1} &= \phi(y_t, x_t^j), \end{aligned} \quad (1)$$

where x_t^i ($i = 1, 2, \dots, N$) represents the state variable of the i th map in the system at discrete time t , y_t is a global interaction field that can affect each map at time t , and $j \in Q$ where Q is a subset of elements in the system. Equation (1) describes a system of elements interacting with a common dynamical environment that can receive feedback from the system. For simplicity, we shall focus on the presence of global interactions and will not include local interactions.

An external global field y_t possesses its own dynamics, independent from the dynamics of the elements, given by

$$\phi(y_t, x_t^j) = g(y_t). \quad (2)$$

On the other hand, an internal global field y_t can be represented by

$$\phi(y_t, x_t^j) = h(x_t^j | j \in Q_t), \quad (3)$$

where h is a function of the states of a given subset Q_t of elements in the system at time t . The coupling function h may represent a constraint or a conservation law in the system.

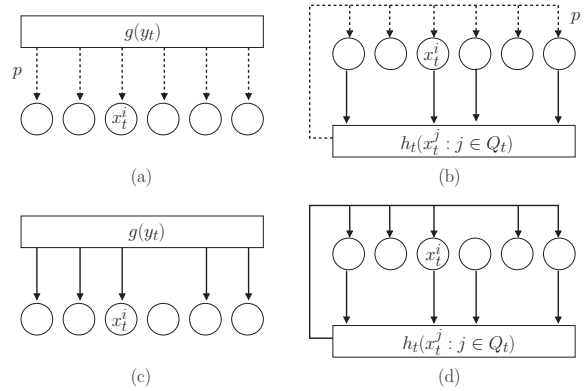


FIG. 1. Top panels: homogeneous global interactions. (a) External field $g(y_t)$ acting with probability p on all elements. (b) Internal field $h(x_t^j | j \in Q_t)$ acting with probability p on all elements. Bottom panels: heterogeneous global interactions. (c) External field $g(y_t)$ acting on a fraction p of elements chosen at random at every time. (d) Internal field $h(x_t^j | j \in Q_t)$ acting on a fraction p of elements chosen at random at every time.

We shall consider the coupling of the maps to the global interaction field in the diffusive form

$$w(x_t^i, y_t) = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon\phi(y_t, x_t^j), \quad (4)$$

where f describes the local dynamics of the maps, and the parameter ϵ is the strength of the coupling to the global field. Since we are particularly interested in chaos synchronization, we choose for the local dynamics the logistic map $f(x_t^i) = 4x_t^i(1 - x_t^i)$, so that $f(x_t^i)$ is fully chaotic for $x_t^i \in [0, 1]$. In this paper, we consider both driven and autonomous systems, subject to global interactions, whose schemes are illustrated in Fig. 1.

A. Synchronization states

Synchronization in the system Eq. (1) at a time t corresponds to a state $x_t^i = x_t^j, \forall i, j$. Thus, a synchronized state can be described by the condition $x_t^i = \bar{x}_t, \forall i$, where $\bar{x}_t$ is the instantaneous mean field of the system,

$$\bar{x}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_t^i. \quad (5)$$

To characterize the occurrence of synchronization, we shall consider the asymptotic time average $\langle \sigma \rangle$ (after discarding a number of transients) of the instantaneous standard deviations σ_t of the distribution of state variables x_t^i , defined as

$$\sigma_t = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_t^i - \bar{x}_t)^2 \right]^{1/2}. \quad (6)$$

A synchronization state corresponds to $\langle \sigma \rangle = 0$. In addition, we define the asymptotic time average $\langle \delta \rangle$ (after discarding a number of transients) of the quantity

$$\delta_t = |\bar{x}_t - y_t|. \quad (7)$$

Two forms of synchronization can take place in the system Eq. (1) in relation to the global field y_t : (i) *complete*

synchronization, given by the condition $x_t^i = \bar{x}_t = y_t$, i.e., all elements are synchronized to the field, and characterized by $\langle \sigma \rangle = 0$ and $\langle \delta \rangle = 0$; and (ii) *generalized synchronization*, corresponding to the condition $x_t^i = \bar{x}_t \neq y_t$, i.e., all elements are synchronized to each other but not the field, and described by $\langle \sigma \rangle = 0$ and $\langle \delta \rangle \neq 0$. It has been shown that both types of synchronization can occur in systems with global interactions, for either autonomous or driven systems [25]. In this paper we shall use the numerical criteria $\langle \sigma \rangle < 10^{-7}$ and $\langle \delta \rangle < 10^{-7}$ for characterizing the zero values of these quantities.

In order to characterize the information exchange between the global field and the local dynamics in the system, we consider the following quantities:

(1) the normalized mutual information between two variables y_t and x_t , based on Shanon's mutual information [30],

$$M_{y,x} = - \frac{\sum_{x_t, y_t} P(x_t, y_t) \log \left(\frac{P(x_t, y_t)}{P(x_t)P(y_t)} \right)}{\sum_{x_t} P(x_t) \log P(x_t)}; \quad (8)$$

(2) the information transfer from a variable y_t to a variable x_t , defined as [31]

$$T_{y,x} = \sum_{x_{t+1}, x_t, y_t} P(x_{t+1}, x_t, y_t) \log \left(\frac{P(x_{t+1}, x_t, y_t) P(x_t)}{P(x_t, y_t) P(x_{t+1}, x_t)} \right), \quad (9)$$

where $P(x_t)$ means the probability distribution of the time series of the variable x_t , $P(x_t, y_t)$ is the joint probability distribution of x_t and y_t , and so on. The quantity $M_{y,x}$ measures the overlap of the information content of the variables y_t and x_t ; it represents how much the uncertainty about x_t decreases if y_t is known. The quantity $T_{y,x}$ measures the degree of dependence of x_t on the variable y_t ; i.e., the information required to represent the value x_{t+1} from the knowledge of y_t . Note that the information transfer is nonsymmetrical, i.e., $T_{y,x} \neq T_{x,y}$. The normalized mutual information $M_{y,x}$ is symmetrical, i.e., $M_{y,x} = M_{x,y}$, and does not indicate the direction of the flow of information between two interacting dynamical variables, as $T_{y,x}$ does. When the two variables are synchronized, $x_t = y_t$. Then we obtain $M_{y,x} = 1$ and $T_{y,x} = 0$.

III. HOMOGENEOUS GLOBAL INTERACTIONS

We describe a homogeneous global interaction as a field shared simultaneously by all the elements in a system. Since, in general, the interaction with the field may not occur for all times, we consider a coupled map system subject to a homogeneous, intermittent, global interaction of the form

$$\forall i, x_{t+1}^i = \begin{cases} w(x_t^i, y_t) & \text{with probability } p, \\ f(x_t^i) & \text{with probability } (1-p). \end{cases} \quad (10)$$

Each map in the system Eq. (10) is subject to the presence (or absence) of the same influence at any time. Then, the occurrence of complete or generalized synchronization between a local map and the global field y_t implies the same form of synchronization between the mean field of the system $\bar{x}_t$ and y_t , regardless of the nature, either external or endogenous, of the global field y_t .

A system subject to a homogenous external field [Fig. 1(a)], corresponds to

$$\forall i, x_{t+1}^i = \begin{cases} (1-\epsilon)f(x_t^i) + \epsilon g(y_t) & \text{with probability } p, \\ f(x_t^i) & \text{with probability } (1-p), \end{cases} \quad (11)$$

$$y_{t+1} = g(y_t).$$

The auxiliary system approach introduced in Ref. [24] implies that a driven map can synchronize on identical orbits with another, identically driven map. The system Eq. (11) can be regarded as one of multiple realizations for different initial conditions of a single, intermittently driven map. Thus, by extension, the elements in this system should synchronize with the external field in the same form as a single local map driven by that field does.

A complete synchronized state in the system Eq. (11) is given by $x_t^i = \bar{x}_t = y_t$, $\forall i$, and it can occur when the external field is equal to the local dynamics, $g = f$. If $g \neq f$, generalized synchronization, characterized by the condition $x_t^i = \bar{x}_t \neq y_t$, $\forall i$, may also arise in this system.

On the other hand, a system subject to an autonomous homogeneous global field [Fig. 1(b)] can be described as

$$\forall i, x_{t+1}^i = \begin{cases} (1-\epsilon)f(x_t^i) + \epsilon h(x_t^j | j \in Q_t) & \text{with probability } p, \\ f(x_t^i) & \text{with probability } (1-p), \end{cases} \quad (12)$$

where Q_t is a subset consisting of $q \leq N$ elements of the system that may be chosen at random at each time t . Each map receives the same input from the endogenous global field $y_t = h$ at any t with probability p . Complete synchronization in the system Eq. (12) occurs when $f(x_t^i) = f(\bar{x}_t) = h$, while generalized synchronization appears if $f(x_t^i) = f(\bar{x}_t) \neq h$, $\forall i$.

A. Complete synchronization

As examples of complete chaotic synchronization in systems having homogeneous global interactions, we consider the driven system Eq. (11) with $g = f$, and the autonomous system Eq. (12) subject to a partial mean field coupling function defined as

$$h(x_t^j | j \in Q_t) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q f(x_t^j), \quad (13)$$

where $q \leq N$ maps are randomly chosen at each time t . For these systems, the condition $\langle \delta \rangle = 0$ implies $\langle \sigma \rangle = 0$ and, therefore, complete synchronization.

Figure 2(a) shows the quantity $\langle \delta \rangle$ as a function of the coupling parameter ϵ , for both the homogeneous driven system and the homogeneous autonomous system, with fixed values of p and q/N . Complete synchronization for both systems takes place at a critical value $\epsilon_c = 0.579$, for which $\langle \delta \rangle < 10^{-7}$.

Figures 2(b) and 2(c) show, respectively, the normalized mutual information M_{y_t, x_t^i} and the information transfer T_{y_t, x_t^i} between the homogeneous global field and one map, averaged over 50 randomly chosen maps, for both systems as functions of ϵ . These averaged quantities give practically the same

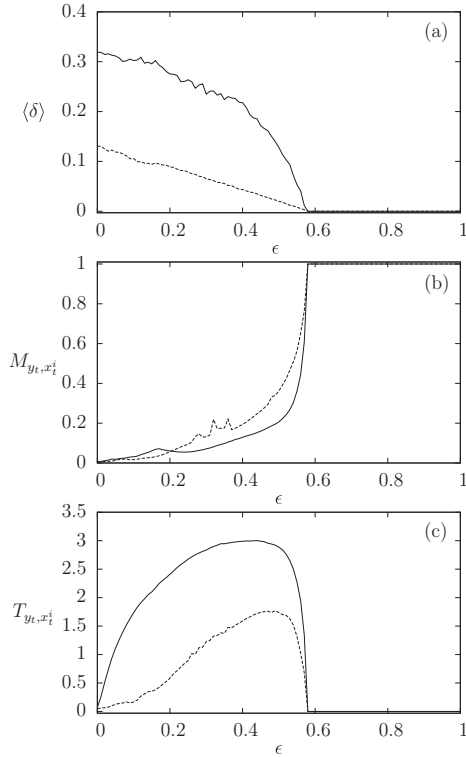


FIG. 2. Complete chaos synchronization in systems with homogeneous global fields. (a) $\langle \delta \rangle$ vs ϵ , (b) mutual information M_{y_t, x_t^i} vs ϵ , and (c) information transfer T_{y_t, x_t^i} vs ϵ . On each panel, the continuous line corresponds to the homogeneous driven system Eq. (11) with $g = f$ and the dashed line corresponds to the homogeneous autonomous system Eqs. (12) and (13). Both information measures are calculated with 2×10^5 points in the time series, after discarding transients, and averaged over 50 randomly chosen maps. The number of states used to calculate the corresponding probability distributions is 100. The same conditions are used in Figs. 3 and 5. Fixed parameters: $p = 0.8$, $N = 10^4$, $q/N = 0.4$.

result as for just one randomly chosen map. The results shown are also independent of q for large enough system size N . We observe that, as the coupling strength ϵ increases, the global field and the local variables become more correlated, and the normalized mutual information for both systems increases until $M_{y_t, x_t^i} = 1$ at the value ϵ_c . In the complete synchronization region $\epsilon \geq \epsilon_c$, we find the constant values $M_{y_t, x_t^i} = 1$ and $T_{y_t, x_t^i} = 0$ for both systems, signaling complete synchronization in each case. Once complete chaos synchronization is established, the evolution of the global field, regardless of its source, is identical to that of the maps. Thus, the mutual or the transfer information cannot distinguish between the driven and the autonomous systems in a regime of complete synchronization.

On the other hand, just before vanishing at the critical value ϵ_c , the information transfer for both systems becomes maximum. This indicates that, as the critical values of the parameters for the onset of complete chaos synchronization are approached, the flow of information from the global field

to the local maps must be large. Figure 2(c) shows that the maximum value of the information transfer for the driven system is greater than the corresponding maximum value for the autonomous system. Thus, in the vicinity of parameter values for the emergence of complete synchronization, an autonomous global field needs to convey less information to the local maps than an external driving field. This suggests that the information transfer T_{y_t, x_t^i} can serve as a predictor of a state of complete synchronization in the parameter space of driven and autonomous systems with homogeneous global interactions. Moreover, this quantity can distinguish between these two types of systems near the onset of complete synchronization.

B. Generalized synchronization

If the functional form of the global field is different from that of the local dynamics, generalized synchronization may occur in a system subject to a homogeneous global interaction. For example, consider an external field in a driven system Eq. (11) such as

$$g(y_t) = \frac{\mu}{2}(1 - |2y_t - 1|), \quad (14)$$

with $\mu = 1.98$ and $y_t \in [0, 1]$. Then at synchronization in the driven system Eqs. (11) and (14), we have $x_t^i = \bar{x}_t \neq y_t$. Similarly, in an autonomous system Eqs. (12), consider a homogeneous global interaction different from a mean field, such as the coupling function

$$h(x_t^j | j \in Q_t) = \frac{\mu}{2} \left[1 - \left| 2 \left(\frac{1}{q} \sum_{j=1}^q x_t^j \right) - 1 \right| \right], \quad (15)$$

with $\mu = 1.98$, where $q \leq N$ elements are chosen at random at each time t . Then, a synchronized state in the autonomous system Eqs. (12) and (15) corresponds to $f(x_t^i) = f(\bar{x}_t) \neq h$. For the fields chosen above, the functional form of the autonomous field in a synchronized state is similar to that of the drive, $h = g(\bar{x}_t)$. However, the time evolution of h at synchronization is not necessarily identical to that of $g(y_t)$.

Figure 3(a) shows the quantity $\langle \sigma \rangle$ as a function of the coupling parameter ϵ for both systems with homogeneous global interactions, the driven system with g given by Eq. (14) and the autonomous system with h given by Eq. (15). These systems get synchronized at different values of ϵ for which $\langle \sigma \rangle < 10^{-7}$. The inset in Fig. 3(a) shows that the quantity $\langle \delta \rangle$ for both systems does not vanish when ϵ is varied, indicating that the synchronized state in both cases corresponds to generalized synchronization.

Figure 3(b) shows M_{y_t, x_t^i} for both systems, as a function of ϵ . In contrast to the constant value $M_{y_t, x_t^i} = 1$ exhibited by the normalized mutual information for both systems in a state of complete synchronization [Fig. 2(b)], the behavior of M_{y_t, x_t^i} in the regime of generalized synchronization is different for each system. The normalized mutual information for the autonomous system in a generalized synchronized state reaches an almost constant value $M_{y_t, x_t^i} = 0.695 < 1$, since the time series of the local maps and the coupling function h are not identical. For the driven system, M_{y_t, x_t^i} increases monotonically with increasing ϵ , but the values of M_{y_t, x_t^i} are below the value of this quantity for the autonomous system

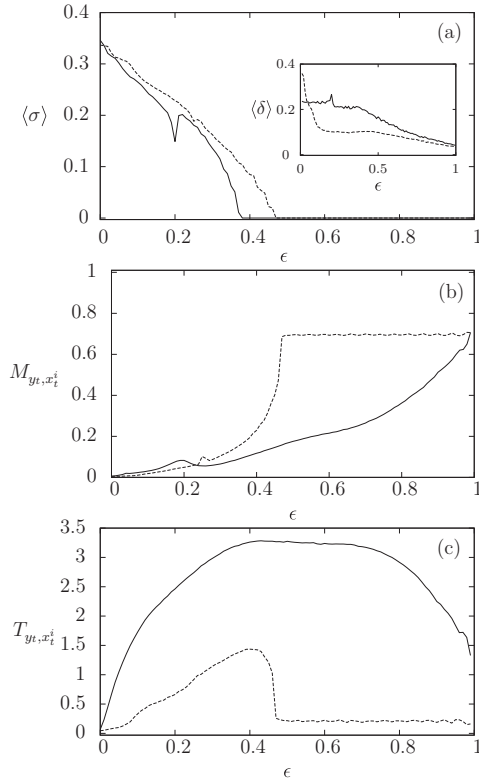


FIG. 3. Generalized chaos synchronization in systems with homogeneous global fields. (a) $\langle \sigma \rangle$ vs ϵ (inset: $\langle \delta \rangle$ vs ϵ); (b) M_{y_i, x_i^i} vs ϵ ; and (c) T_{y_i, x_i^i} vs ϵ . On each panel, the continuous line corresponds to a homogeneously driven system Eq. (11) with g given in Eq. (14) and the dashed line corresponds to the homogeneous autonomous system Eqs. (12) and (15). Fixed parameters are $p = 0.8$, $N = 10^4$, $q/N = 0.4$.

in the region of generalized synchronization. Therefore, in a generalized synchronization state, the amount of information shared between the field h and the local maps in the autonomous system is greater than that between the external field g and the maps in the driven system.

Figure 3(c) shows the information transfer T_{y_i, x_i^i} versus ϵ for both systems. Similarly to the behavior observed for complete synchronization, as the coupling strength approaches the critical value ϵ_c for the emergence of generalized synchronization, the information transfer in the autonomous system becomes maximum. Also, the values of T_{y_i, x_i^i} for the driven system are greater than the values of this quantity for the autonomous system. However, in the generalized chaos synchronization regime, for $\epsilon > \epsilon_c$, the information transfer in both systems does not vanish; and the values of T_{y_i, x_i^i} for the driven system are greater than the values of this quantity for the autonomous system. This means that the autonomous field must provide less information to the local maps than an external drive for sustaining generalized synchronization. This behavior should be expected since the autonomous field h already contains information about the dynamics of the elements in the system. At the onset of generalized synchronization, both T_{y_i, x_i^i} and

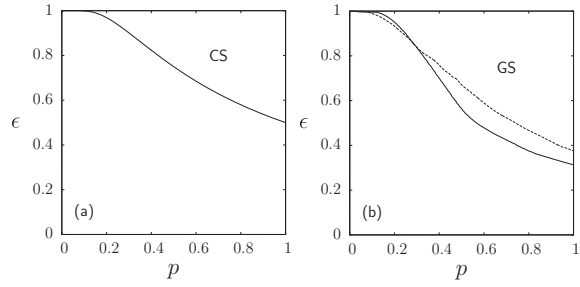


FIG. 4. Regions for chaos synchronization on the plane (p, ϵ) for systems with homogeneous global interactions. (a) Complete synchronization (CS) for both the homogeneous driven system Eq. (11) with $g = f = 4x(1 - x)$, and the homogeneous autonomous system Eqs. (12) and (13). The boundary of the region where complete synchronization takes place is given by $\epsilon = 1 - e^{-\lambda_f/p}$, with $\lambda_f = \ln 2$ for the map f . (b) Generalized synchronization (GS) for both the homogeneously driven system Eqs. (11) and (14) (continuous line) and for the homogeneous autonomous system Eqs. (12) and (15) (dashed line), with $N = 10^4$, $q/N = 0.4$.

M_{y_i, x_i^i} for the driven system are continuous while they are discontinuous for the autonomous system. Thus, the quantities M_{y_i, x_i^i} and T_{y_i, x_i^i} can distinguish between the driven and the autonomous systems in a state of generalized synchronization, in contrast to the case of complete synchronization.

C. Dynamics at the local level

At the local level in a system with a homogeneous global field, each element is subject to a field that eventually induces some form of synchronization between that element and the field, similarly to a single master-slave system. Thus, the local dynamics can be seen as a single drive-response map system where a drive g acts with probability p on a map f . In particular, the linear stability analysis of the complete synchronized state for the single driven map yields the condition [25]

$$p \ln |1 - \epsilon| + \lambda_f < 0, \quad (16)$$

where λ_f is the Lyapunov exponent of the map f . A stable completely synchronized state occurs when this condition is fulfilled. On the other hand, a stable generalized synchronized state in both kinds of homogeneous system can be numerically determined with the criterion $\langle \sigma \rangle < 10 < -7$ on the space of parameters (p, ϵ) .

Figure 4 shows the regions where complete and generalized synchronization can be found on the plane (p, ϵ) for the systems with homogeneous global interactions considered here. The region of parameters for complete synchronization is the same for both the autonomous and the driven systems. The regions corresponding to generalized synchronization are not identical for these systems with the chosen functional forms of their global fields.

IV. HETEROGENEOUS GLOBAL INTERACTIONS

The concept of a global field can be extended beyond the concept of spatial homogeneity. In this respect, we consider a

system with heterogeneous global interactions, as follows:

$$x_{t+1}^i = \begin{cases} w(x_t^i, y_t) & \text{if } i \in R_t, \\ f(x_t^i) & \text{if } i \notin R_t. \end{cases} \quad (17)$$

where R_t is a subset containing pN elements of the system, with $p \leq 1$, which may be chosen at random at each time t . Thus, the average fraction of elements coupled to the field in Eq. (17) at any given time is p , so that not all the maps in the system receive the same influence at all times. In comparison, the coupling of the elements to the field in systems with homogeneous global interactions, Eq. (10), is simultaneous and uniform; each map receives the same influence from the field y_t at any t with probability p . At the local level, each map in the system with heterogeneous global interactions, Eq. (17), is subject, on the average, to the global field y_t with probability p over long times. For $p = 1$, the homogeneous system Eq. (10) and the heterogeneous system Eq. (17) are identical.

In the case of an external field [Fig. 1(c)], Eq. (17) takes the form

$$x_{t+1}^i = \begin{cases} (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon g(y_t) & \text{if } i \in R_t, \\ f(x_t^i) & \text{if } i \notin R_t, \end{cases} \quad (18)$$

$$y_{t+1} = g(y_t).$$

For an autonomous field [Fig. 1(d)], the coupled map system Eq. (17) becomes

$$x_{t+1}^i = \begin{cases} (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon h(x_t^j : j \in Q_t) & \text{if } i \in R_t, \\ f(x_t^i) & \text{if } i \notin R_t, \end{cases} \quad (19)$$

where, again, Q_t is a subset consisting of $q \leq N$ elements of the system that may be chosen at random at each time t . Each map in Eq. (19) is subject, on the average, to the same coupling function h with probability p over long times. The same condition holds for each map with respect to the drive g in the heterogeneously driven system Eq. (18). Then, if g exhibits the same temporal evolution as h , the synchronization behavior of the autonomous system Eq. (19) should be similar to the behavior of the driven system Eq. (18) over long times.

A. Complete synchronization

When the heterogeneously driven system Eq. (18) gets synchronized, we have $x_t^i = \bar{x}_t$. However, the synchronized solution exists only if $g = f$. Therefore, only complete synchronization $x_t^i = \bar{x}_t = y_t$ can take place in this system. On the other hand, a synchronized state in the heterogeneous autonomous system Eq. (19) occurs when $f(x_t^i) = f(\bar{x}_t)$. However, this synchronized solution exists only if $h = f(\bar{x}_t)$. Therefore, as in the case of the heterogeneous driven system, only complete synchronization, where $f(x_t^i) = f(\bar{x}_t) = h$, can emerge in the heterogeneous autonomous system Eq. (19). As an example of a coupling function $h(x_t^j : j \in Q_t)$ leading to complete synchronization in the heterogeneous autonomous system Eq. (19), we choose the partial mean field Eq. (13).

Figures 5(a)–5(c) show the quantities $\langle \delta \rangle$, M_{y_t, x_t^i} , and T_{y_t, x_t^i} , respectively, as functions of ϵ for both heterogeneous systems, driven and autonomous, with global interactions. Both systems

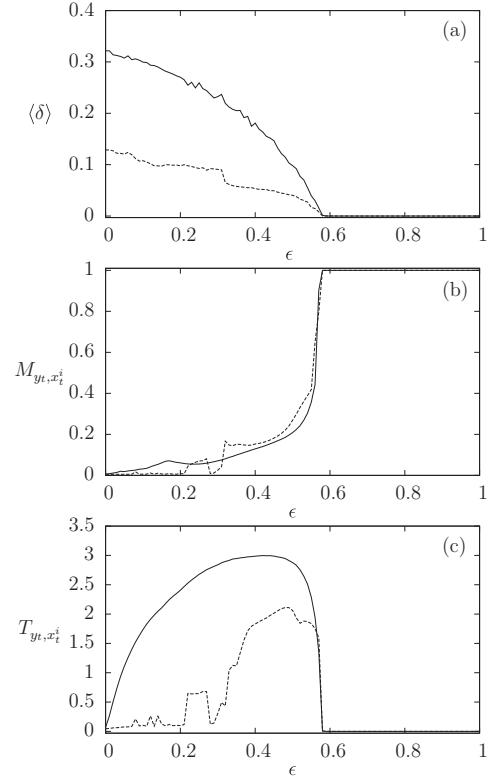


FIG. 5. Complete chaos synchronization in systems with heterogeneous global fields. (a) $\langle \delta \rangle$ vs ϵ ; (b) M_{y_t, x_t^i} vs ϵ ; and (c) T_{y_t, x_t^i} vs ϵ . On each panel, the continuous line corresponds to the heterogeneously driven system Eq. (18) with $g = f$, and the dashed line corresponds to the heterogeneous autonomous system Eqs. (19) and (13). Fixed parameters: $p = 0.8$, $N = 10^4$, $q/N = 0.4$.

reach complete chaos synchronization at the critical value $\epsilon_c = 0.579$.

The information transfer in Fig. 5(c) becomes maximal previous to the synchronization threshold, similarly to the behavior observed in homogeneous systems. Thus, a maximum in the information transfer T_{y_t, x_t^i} in the space of parameters can be regarded as a precursor to a state of synchronization, either complete or generalized. Figures 2(c), 3(c), and 5(c) reveal that a lesser amount of information flow from the global field to the local maps is necessary for the emergence of synchronization in autonomous systems, in comparison to that required for synchronization in driven systems possessing similar functional forms of their global fields and identical parameter values.

In either homogeneous or heterogeneous autonomous systems, complete synchronization occurs independently of the number q of elements randomly chosen in the function h , or if the q chosen elements are always the same. Thus, the reinjection of an autonomous coupling function h , although containing partial information about the system, to a fraction of randomly selected elements suffices to achieve complete synchronization. If the elements in subset R_t receiving the coupling function h or the drive g are always the same, then

only elements in this subset reach complete synchronization, since only those elements share the same information, on the average.

V. CONCLUSIONS

We have investigated the relationship between the emergence of synchronization and the information flow in dynamical systems possessing global interactions. We have used the normalized mutual information M_{y_i, x_i^j} and the information transfer T_{y_i, x_i^j} between global and local variables to characterize complete and generalized synchronization in models of coupled chaotic maps for such systems.

We have found that the presence of a homogeneous global field, either external or internal, for all times is not indispensable for achieving complete or generalized synchronization in a system of chaotic elements. Complete synchronization can also appear with heterogeneous global fields; it does not require the simultaneous sharing of a global field by all the elements in the system. Furthermore, the global coupling function in autonomous systems does not need to depend on all the internal variables for reaching synchronization and, in particular, its functional form is not determinantal for generalized synchronization.

In both systems with homogeneous or heterogeneous global fields, at the local level each element is subject, on the average, to a field that eventually induces some form of synchronization between that element and the field, similarly to a single drive-response system. Then, a set of elements identical to the response and subject to a global field that behaves as the drive also synchronizes in a similar manner.

What becomes essential for the emergence of a given synchronization state is that all the elements in the system share a sufficient amount of information provided by a field, on the average, over time. This amount is characterized by the maximum value of the information transfer T_{y_i, x_i^j} previous to the critical values of parameters for either complete or

generalized synchronization. Therefore, the quantity T_{y_i, x_i^j} could be employed to anticipate the occurrence of a state of synchronization in the space of parameters of a system possessing a global interaction field. Furthermore, the form in which information flows from macroscopic to microscopic scales for the emergence of synchronization, as measured by the quantities M_{y_i, x_i^j} and T_{y_i, x_i^j} , differs between a driven and an autonomous system with global interactions, even if they have similar functional forms for their local dynamics or for their global fields. In summary, we have found that (i) near the onset of complete synchronization when a parameter is varied, the maximum of the information transfer T_{y_i, x_i^j} for a driven system is greater than that for an autonomous system; (ii) near the onset of generalized synchronization, the normalized mutual information M_{y_i, x_i^j} and T_{y_i, x_i^j} exhibit sharp changes for an autonomous system, while these quantities exhibit a smooth behavior for a driven system; and (iii) in a state of generalized synchronization, T_{y_i, x_i^j} is greater for a driven system than for an autonomous system and M_{y_i, x_i^j} is smaller for a driven system than for an autonomous system.

Our results suggest that these information measures could be used to characterize, and possibly also to predict, other forms of collective behaviors observed in dynamical systems having global interactions. Further extensions of this work include the investigation of the relationship between top-down information flow between global and local scales, and the emergence of collective behaviors and structures in more complex dynamical networks.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by Project No. C-1827-13-05-B from CDCHTA, Universidad de Los Andes, Venezuela. M.G.C. is grateful for support from the Senior Associates Program of the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

-
- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer, Berlin, 1984).
 - [2] N. Nakagawa and Y. Kuramoto, *Physica D* **75**, 74 (1994).
 - [3] K. Wiesenfeld and P. Hadley, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1335 (1989).
 - [4] G. Grüner, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 1129 (1988).
 - [5] K. Wiesenfeld, C. Bracikowski, G. James, and R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1749 (1990).
 - [6] K. Kaneko and I. Tsuda, *Complex Systems: Chaos and Beyond* (Springer, Berlin, 2001).
 - [7] V. M. Yakovenko, in *Encyclopedia of Complexity and System Science*, edited by R. A. Meyers (Springer, New York, 2009).
 - [8] M. Newman, A. Barabási, and D. J. Watts, *The Structure and Dynamics of Networks* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006).
 - [9] J. C. González-Avella, V. M. Eguiluz, M. G. Cosenza, K. Klemm, J. L. Herrera, and M. San Miguel, *Phys. Rev. E* **73**, 046119 (2006).
 - [10] J. C. González-Avella, M. G. Cosenza, and M. San Miguel, *PLoS ONE* **7**, e51035 (2012).
 - [11] S. C. Manrubia, A. S. Mikhailov, and D. H. Zanette, *Emergence of Dynamical Order: Synchronization Phenomena in Complex Systems* (World Scientific, Singapore, 2004).
 - [12] J. Garcia-Ojalvo, M. B. Elowitz, and S. H. Strogatz, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **101**, 10955 (2004).
 - [13] K. Kaneko, *Physica D* **41**, 137 (1990).
 - [14] W. Wang, I. Z. Kiss, and J. L. Hudson, *Chaos* **10**, 248 (2000).
 - [15] S. De Monte, F. d'Ovidio, S. Danø, and P. G. Sørensen, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **104**, 18377 (2007).
 - [16] A. F. Taylor, M. R. Tinsley, F. Wang, Z. Huang, and K. Showalter, *Science* **323**, 614 (2009).
 - [17] A. M. Hagerstrom, T. E. Murphy, R. Roy, P. Hövel, I. Omelchenko, and E. Schöll, *Nat. Phys.* **8**, 658 (2012).
 - [18] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 821 (1990).
 - [19] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002).
 - [20] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou, *Phys. Rep.* **366**, 1 (2002).

- [21] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. Garcia-Ojalvo, C. R. Mirasso, L. Pesquera, and K. A. Shore, *Nature (London)* **438**, 343 (2005).
- [22] A. Uchida, F. Rogister, J. Garcia-Ojalvo, and R. Roy, *Prog. Opt.* **48**, 203 (2005).
- [23] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel, *Phys. Rev. E* **51**, 980 (1995).
- [24] H. D. I. Abarbanel, N. F. Rulkov, and M. M. Sushchik, *Phys. Rev. E* **53**, 4528 (1996).
- [25] O. Alvarez-Llamoza and M. G. Cosenza, *Phys. Rev. E* **78**, 046216 (2008).
- [26] A. Parravano and M. G. Cosenza, *Phys. Rev. E* **58**, 1665 (1998).
- [27] M. G. Cosenza, O. Alvarez-Llamoza, and G. Paredes, *J. Phys.: Conf. Series* **246**, 012009 (2010).
- [28] S. I. Walker and P. C. W. Davies, *J. R. Soc., Interface* **10**, 20120869 (2013).
- [29] M. Benedek, S. Bergner, Tanja Könen, A. Fink, and A. C. Neubauer, *Neuropsychologia* **49**, 3505 (2011).
- [30] C. E. Shannon and W. Weaver, *The Mathematical Theory of Information* (University of Illinois Press, Urbana, IL, 1949).
- [31] T. Schreiber, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 461 (2000).
- [32] K. W. Church and P. Hanks, *Comput. Linguist.* **16**, 22 (1990).
- [33] M. Paluš, V. Komárek, Z. Hrnčář, and K. Štěrbová, *Phys. Rev. E* **63**, 046211 (2001).
- [34] S. P. Strong, R. Koberle, R. R. de Ruyter van Steveninck, and W. Bialek, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 197 (1998).
- [35] S. Haykin, *Communication Systems* (Wiley, New York, 2001).
- [36] M. S. Baptista, R. M. Rubinger, E. R. Viana, J. C. Sartorelli, U. Parlitz, and C. Grebogi, *PLoS ONE* **7**, e46745 (2012).
- [37] J. F. Donges, Y. Zou, N. Marwan, and J. Kurths, *Europhys. Lett.* **87**, 48007 (2009).