UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA Y ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA EN TORNO A LAS FUNCIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL EN EL CUARTO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA GENERAL

Autor(a): Acuña Yesenia

Tutor: Prf. Viviano Antonino

VALENCIA, NOVIEMBRE 2015

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA Y ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA EN TORNO A LAS FUNCIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL EN EL CUARTO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA GENERAL

AUTOR(A): Yesenia Auña

Trabajo presentado ante la Coordinación de Estudios de Postgrado de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo para optar al título de Magister en Educación Matemática.

VALENCIA, NOVIEMBRE 2015

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

VEREDICTO

Nosotros, miembros del jurado designado para la evaluación del Trabajo de Grado titulado: **"ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA Y ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA EN TORNO A LAS FUNCIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL EN EL CUARTO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA GENERAL"** presentado por la Licenciada Yesenia Carolina Acuña Mazo, titular de la cédula de identidad V-14465102, para optar al Título de Magíster en Educación Matemática, estimamos que dicho trabajo reúne los requisitos y méritos para ser Aprobado__________ Reprobado___________

Nombres y Apellidos	**C.I.**	**Firma del Jurado**
______________________	______________________	______________________
______________________	______________________	______________________
______________________	______________________	______________________

VALENCIA, NOVIEMBRE 2015

DEDICATORIA

Dedico el presente trabajo; en primer lugar, a Dios ser supremo, por concederme la salud, la constancia, la fortaleza y la serenidad; por iluminarme y brindarme la madurez que necesito para superar los obstáculos que la vida me presenta. Por ser mi guía y guardián en todo momento, por permitirme vivir, adquirir experiencias y conocimientos que, día a día, me hacen crecer. De igual modo, por concederme la oportunidad de alcanzar otro nivel académico y colocar en mí camino a las personas apropiadas; asimismo, proveerme los medios necesarios para culminar, satisfactoriamente, mis estudios de maestría.

En segundo lugar, a mi madre porque gracias a ella aprendí a ser una persona fuerte, decidida e independiente. Igualmente, a mi padre Alfredo Castellano y Abuela Teresa Mesa por sus bendiciones desde el cielo ¡Gracias por haber sido lo mejor y más bonito de mi vida!

Finalmente, a mis hermanas, compañeros de estudio y de trabajo, así como a todas aquellas personas que, de alguna u otra forma, han contribuido en el logro profesional y personal que estoy alcanzando.

Lcda. Yesenia Acuña

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios ser supremo, por concederme la salud, perseverancia e iluminarme en todo momento. Además, a todas las personas que hicieron posible este trabajo de grado; principalmente:

Al profesor Antonino Viviano, por guiarme con sus conocimientos y consejos durante la tutoría del trabajo.

A la profesora Jannet Santaella por sus orientaciones en momentos difíciles. A los profesores Rafael Ascanio, Cirilo Orozco, docentes de los seminarios de investigación; entre otros, de la Maestría en Educación Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo; por su valiosa colaboración. Más aún, al Jurado evaluador de mi trabajo de maestría. Asimismo, a las unidades de análisis seleccionadas (docentes) del Municipio Libertador, estado Carabobo.

A las instituciones: el Programa de Maestría en Educación Matemática de la FaCE de la Universidad de Carabobo, la línea de investigación titulada “La matemática como fuente esencial de proposiciones didácticas en la formación profesional del profesor de matemática”, adscrita a la UPEL de Maracay y al NIEM (Núcleo de investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina”); así como la U.E. Barrera y la U.E. Crispín Pérez, del Municipio Libertador, estado Carabobo.

Yesenia Acuña

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE CUADROS

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA Y ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA EN TORNO A LAS FUNCIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL EN EL CUARTO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA GENERAL

Autora: Yesenia Acuña
Tutor: Antonino Viviano
Fecha: Noviembre 2015

RESUMEN

La presente investigación tuvo como propósito analizar la actividad docente del profesor de matemática en torno a las funciones logarítmica y exponencial en cuarto año. La actividad referida se interpreta y describe desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y, en consecuencia, en términos de las nociones de Organización Matemática (OM) y Organización Didáctica (OD). El estudio está constituido por un trabajo documental que permitió elaborar una OM de referencia y por un trabajo de campo con diseño etnográfico. Para ello, se utiliza el análisis de contenido, análisis del discurso y la observación no participante. Como unidades de estudio se seleccionaron la OD y la OM Local de dos profesores de matemática de dos instituciones educativas. Los resultados muestran actividades docentes dirigidas a la presentación de elementos tecnológico-teóricos con una técnica correspondiente asociadas a actividades matemáticas inapropiadas e incompletas; centradas en el bloque práctico-técnico con ausencia de cuestionamientos tecnológico-teóricos.

Palabras clave: Organización Matemática, Organización Didáctica, Teoría Antropológica de lo Didáctico, Función Logarítmica y Función Exponencial.
Línea de Investigación: Enseñanza, aprendizaje y evaluación de la educación en matemática y educación en física.
Temática: Procesos de enseñanza y aprendizaje en los diferentes niveles y modalidades de la educación matemática y en física.
Subtemática: Estrategias para la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA Y ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA EN TORNO A LAS FUNCIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL EN EL CUARTO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA GENERAL

Autora: Yesenia Acuña
Tutor: Antonino Viviano
Fecha: Noviembre 2015

ABSTRAC

This research paper had as a purpose to analyze the teaching activity of the mathematic teacher about the logarithm and exponential function in general middle education fourth year. The referred activity is interpreted and described from the Anthropological Theory of the Didactic(ATD) point of view and, consequently, in terms of the notions of Mathematic Organization (MO) and Didactic Organization (DO). The study is set up, both, as: a documental methodology which allowed to elaborate a referential MO and a field work with ethnographic design. For this, it uses the analysis of content, the discourses analysis and the no-participant observation. As units of study were selected the local MO and DO of two mathematic teachers from two different schools. The results show teaching activities which target is the presentation of technological-theoretical elements with the corresponding techniques associated to unsuitable and incomplete mathematical activities and centered on the practical-technical block with absence of technological-theoretical questionings.

Keywords: Mathematic Organization, Didactic Organization, Anthropological Theory of the Didactic (ATD), Logarithmic and Exponential functions.
Research Line: Teaching, learning and assessment of education in mathematics and physics education.
Theme: Teaching and learning at different levels and methods of mathematics and physical education.
Sub-theme: Strategies for teaching and learning of mathematics.

INTRODUCCIÓN

La educación constituye un elemento crucial en la formación y desarrollo del ser humano. Así, el docente, en especial el profesor de matemática, como representante de la institución escolar, es formado para desarrollar, en conjunto con su comunidad educativa, el estudio de una actividad matemática, orientada a cumplir requerimientos emanados de importantes instituciones sociales que le rodean. De allí, la presente investigación centró su atención en analizar las relaciones entre la Organización Matemática (OM) y Organización Didáctica (OD) del profesor de matemática del nivel cuarto (4to) año de educación media general del municipio libertador, en torno a las funciones logarítmica y exponencial; en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Para ello, se estableció una aproximación a una organización matemática de referencia (OMR) la cual se comparó con los datos empíricos provenientes del trabajo de campo efectuado en las instituciones educativas estudiadas. Esto, a fin de describir características tanto de la OM como de la OD del profesor de matemática; y en consecuencia, interpretar las relaciones entre las características de la OM y la OD antes referida. Tal situación, considerando, potenciales condiciones bajo las cuales se lleva a cabo la actividad docente del profesor de matemática.

En virtud a lo anterior, el trabajo de grado comprende un *Capítulo I* denominado: El problema, el cual comprende el planteamiento del problema, los objetivos y la justificación. En el *Capítulo II*, se presentan los antecedentes y elementos teóricos de la TAD. El *Capítulo III* en el cual se define la naturaleza y estrategia metodológica de la investigación. Por su parte, el *Capítulo IV* comprende el trabajo documental efectuado para construir la OM de Referencia. Seguido, en el *Capítulo V* se presenta e interpreta la OM y la OD observadas en los dos (2) escenarios de investigación. Finalmente, las conclusiones provisionales y recomendaciones de la investigación; así como los materiales de referencias y anexos.

CAPÍTULO I

1. EL PROBLEMA

1.1 Planteamiento de la Situación Problema

La educación, constituye un derecho y necesidad esencial que debe permitir al hombre incorporarse e interactuar en su entorno social, dando lugar a su desarrollo y consecuentes transformaciones sociales en la construcción de su bienestar. Por ello, la formación del hombre requiere procesos educativos, iniciados desde temprana edad, que ayuden a la auto transformación del educando a fin de que éste construya y asuma el significado de condición humana, esto es, aprender a vivir y a superarse, cada vez más, para llegar a ser un mejor ciudadano (Morín, 1999). Al mismo tiempo, el sistema de enseñanza y la actividad de enseñanza, en particular, mediante la cual se realiza el proceso educativo (actividad docente) debe propiciar actividades de aprendizaje que contribuyan tanto a una formación integral como a la construcción de herramientas que faciliten al individuo actuar de manera autónoma, deliberada, consciente y crítica, conforme a las necesidades de la nación y sociedad en la cual se desenvuelve.

Desde este punto de vista, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura, en conjunto al, Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (UNESCO-IESALC, 2008,2010) consideran que la educación es un derecho humano y un deber esencial para el total desarrollo del potencial humano. Así pues, tanto el desarrollo como la prosperidad económica dependen de la habilidad de los países del mundo para educar a todos los miembros de su sociedad; ofreciendo aprendizaje a lo largo de la vida. Una educación de calidad, desde la infancia hasta la edad adulta, a través de los sistemas formales y no formales.

En el marco de estos principios generales, el sistema educativo venezolano intenta desarrollar sus políticas educativas; en efecto, la Ley Orgánica de Educación (LOE, 2009) en el artículo cuarto (4º) establece:

> La educación como derecho humano y deber social fundamental orientada al desarrollo del potencial creativo de cada ser humano en condiciones históricamente determinadas, constituye el eje central en la creación, transmisión y reproducción de las diversas manifestaciones y valores culturales, invenciones, expresiones, representaciones y características propias para apreciar, asumir y transformar la realidad. (p. 2)

En tal sentido, se requiere que la actividad de enseñanza de una disciplina se enmarque, flexiblemente bajo procesos que conduzcan, entre otros aspectos, hacia el desarrollo integral del individuo. En el caso de la matemática, disciplina científica de relevancia educativa altamente reconocida y requerida por la sociedad, se asume que su enseñanza debe encaminarse hacia el logro de las metas educativas señaladas, pero sin desnaturalizarla, es decir, teniendo presente su propia naturaleza.

Dentro de este contexto, la enseñanza de la matemática debe apoyarse en una visión coherente de su actividad, así como en la disponibilidad de recursos humanos, organizativos y materiales que permitan realizar actividades docentes correspondidas, en un mayor grado, con las tareas y retos que presentan el momento actual y futuro próximo a los estudiantes, pero, en una visión sinérgica con la actividad matemática. En este orden de ideas, la actividad docente en matemática en torno a la noción de función, en especial, las funciones logarítmica y exponencial ha de orientarse hacia el logro de metas ya descritas, en conjunto al desarrollo de actividades matemáticas y didácticas, en acuerdo a exigencias del momento histórico, entorno social y cultural del individuo; subrayando, tanto la pertinencia como el significado real que estos objetos matemáticos poseen en diversas áreas científicas del hacer humano, al facilitar, por ejemplo: la determinación de la magnitud de un sismo, el decaimiento radiactivo, crecimiento poblacional, inversiones económicas, intensidad del sonido entre otros. (Szemruch y Vaccaro, 2002)

Sin embargo, partiendo de una revisión a diversos estudios en torno a la problemática de la actividad docente del profesor de matemática en Latinoamérica, tales como: (Gascón, 2001; Bastán, Buffarini, Lisera y Roso, 2006; Báez, Cantú y Gómez, 2007) entre otros, se evidencia, no solo la gran distancia que separa la actividad docente matemática real de aquella descrita, pero también el reconocimiento que estos profesionales hacen de algunos factores condicionantes de su actividad, tales como su formación académica, sus concepciones y las estrategias apropiadas para la enseñanza de la matemática. Ellos sugieren, al mismo tiempo, la necesidad de efectuar modificaciones en la dimensión instruccional, curricular e institucional de su práctica docente efectiva. Por otra parte, el informe del Banco Interamericano de Desarrollo (BID, 2010) sobre la Condición de la Educación Matemáticas y Ciencias Naturales en América Latina y el Caribe (ALC), apunta un bajo rendimiento de los estudiantes; lo que trae consigo, existencia de una baja calidad de instrucción, lo cual, a su vez, limita las alternativas orientadas al logro del aprendizaje de las destrezas requeridas en matemática y ciencias naturales, pese a que los profesores del continente, en su mayoría, poseen el nivel de formación requerido por los sistemas nacionales de educación.

Referente a la actividad docente en torno a las funciones logarítmica, Farfán y Ferrari (2002) en su estudio reportan una enseñanza caracterizada por:

> La ruptura que se percibe en la presentación escolar de los logaritmos, ésta es, como facilitadores de operaciones en un primer acercamiento de corte numérico y su posterior abordaje con todo rigor de su tratamiento como función sin que medie entre ambos la construcción de los mismos. (p. 62)
> El abordaje de la funcionalidad de los logaritmos raya en lo axiomático, ya que a nuestro entender no existen elementos en el discurso escolar que propicien el pasaje de lo aritmético a lo analítico en el tratamiento de este concepto. (p. 63)

De ahí que se perciba un desaprovechamiento en el estudio de las funciones logarítmica y exponencial. De hecho, Aguilar, Farfan, Ledezma y Moreno (1997), en su Estudio didáctico de la función 2^x, refieren que a la misma se le otorga un tratamiento aritmético; por ejemplo, "en el caso de ser a<0 discutieron las dificultades se presentaban cuando el exponente era $1/2$ o de la forma $1/2^n$, afirmando que el número que se obtenía era complejo y que no se podía graficar" (p.22). Tal situación conduce, a los educandos, a cometer errores en los cálculos y efectuar interpretaciones inadecuadas ante estas funciones.

Cabe destacar que Venezuela no está ajena a la problemática relativa a la actividad docente. En efecto, Gómez y Planchart (2005) señalan un deterioro progresivo, observado en la enseñanza de la matemática en todos los niveles. Para ello, se apoyan en los resultados de mediciones de aprendizajes realizadas a 9536 estudiantes de educación media y a docentes de matemática que aspiraban ingresar a estudios de postgrado en didáctica de la matemática en la Universidad Simón Bolivar. En cuanto a la evaluación de los estudiantes, los autores reportan, que ésta se realiza a través de la Prueba de Admisión, conformada por un total de 55 preguntas de selección, categorizadas como: de conocimiento (30) y de habilidad cuantitativa (25), en correspondencia con los objetivos de los programas oficiales de la escuela media general de primero a cuarto año.

Los promedios obtenidos, en la investigación referida en el párrafo precedente, fueron de 7,95 puntos y 4,04 puntos respectivamente, contrario a un promedio de 14,66 puntos reportado por las instituciones del nivel medio. Respecto a los profesores de matemática, todos egresados de universidades y pertenecientes al sistema de educación media general, argumentan que 38 de ellos obtuvieron resultados insatisfactorios, en el área de matemática, y particularmente, en Geometría.

Particularmente, Lovera (2004) plantea que en la práctica docente, relativa a la noción de logaritmo, se evidencia que la mayoría de los profesores de matemática exponen lo que conocen, de forma teórica; en otras palabras, no toman en cuenta experiencias y conocimientos previos de sus estudiantes, tampoco, vinculan la noción de logaritmo con la función exponencial. De tal manera, se limita la producción del conocimiento matemático; situación que conduce a la necesidad de un cambio en la acción docente de tales profesores.

Conviene señalar que, en la experiencia docente de la autora del estudio actual en torno a la organización matemática y organización didáctica en torno a las funciones logarítmica y exponencial, en las instituciones del Municipio Libertador: Unidad Educativa Barrera y Crispín Pérez, ha sido fuente de problemas análogos a los planteados por Lovera. Puntualizando o explicitando un poco más, al considerar la interacción con los docentes de matemática de tales instituciones y el contenido propuesto en los textos de matemática, es razonable afirmar que la enseñanza de las funciones logarítmica y exponencial se evidencia un tratamiento axiomático a través de la exposición del profesor, ausencia de relaciones concretas con otras áreas del conocimiento matemático, tratamiento de la función logaritmo y exponencial en forma aislada con respecto a su génesis histórica, ausencia de modelizaciones de situaciones intra o extramatemática como lo es el problema del crecimiento, interés compuesto, magnitud de un sismo, entre otros.

Cabe resaltar que esta preocupación por la enseñanza de los logaritmos ha sido y es compartida por diferentes investigadores, entre los cuales, destaca Ferrari (2001, 2011), quien estudia a profundidad el fenómeno didáctico observado relativo a la actividad usual de enseñanza, consistente en una primera presentación de tipo numérica de los logaritmos como facilitadores de operaciones; para luego, a través de un salto, presentarlo con todo rigor como una función sin que medie entre estos momentos proceso alguno de construcción.

El análisis precedente, podría relacionarse con la existencia de dificultades manifestadas por estudiantes de este nivel, durante el estudio y aprendizaje de la funciones logarítmica y exponencial (expresar definición, calcular valores de las variables x e y de las funciones para la construcción de la tabla de valores, representar gráficamente y analizar las funciones indicadas, distinguir propiedades logarítmicas, entre otros.)

En virtud a lo expuesto, los autores citados en la descripción del problema planteado sostienen, sobre la base de los resultados de sus investigaciones, la preeminencia de elementos, inherentes a la problemática de la actividad docente del profesor de matemática, lo que trae consigo u deterioro progresivo en la enseñanza de la matemática, disponibilidad de un conocimiento matemático incompleto, fragmentario, desarticulado y reduccionista; entre otros. Esto conduce, a los profesores, a cometer errores en la actividad matemática; propiciando así, el empleo de una enseñanza teórica de la matemática que limita la producción del conocimiento matemático de sus estudiantes.

En atención a lo expuesto, es pertinente interrogarse: ¿En qué consiste la actividad docente y la actividad matemática del profesor de matemática del cuarto (4to) año de la educación media general? En especial, en el municipio libertador ¿Cómo incide la actividad matemática en la actividad docente del profesor de matemática?; y en general, ¿Qué relaciones existen entre ambas actividades?

Para abordar estas interrogantes en la presente investigación, se adopta el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la cual situada en el marco del Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, postula la actividad matemática institucional como objeto primario de investigación. Para ello, se emplea las nociones de Organización Matemática (OM), para referirse a lo matemático como resultado y Organización Didáctica (OD), para referirse al proceso de estudio o actividad de construcción y/o reconstrucción de lo matemático. En este sentido, la actividad matemática se integra en la noción de OM y la actividad docente en la noción de OD. En consecuencia, al considerar este modelo en didáctica de la matemática, se precisa reformular las interrogantes precedentes, empleando las nociones teóricas del mismo: ¿Qué relación existe entre la Organización Matemática y Organización Didáctica del profesor de matemática en torno a las funciones logarítmica y exponencial, en el cuarto (4to) año de Educación Media General del municipio libertador del Estado Carabobo?

1.2 Objetivos de la Investigación

1.2.1 Objetivo General:

Analizar la relación entre la Organización Matemática y la Organización Didáctica del docente de matemática en torno a las funciones logarítmica y exponencial, en el nivel del cuarto (4to) año de Educación Media General en el municipio libertador del Estado Carabobo.

1.2.2 Objetivos Específicos:

Establecer una aproximación a una Organización Matemática de Referencia en torno a las funciones logarítmica y exponencial.

Describir las características de la Organización Matemática efectivamente enseñada y de la Organización Didáctica correspondiente del profesor de matemática.

Interpretar las relaciones entre las características de la Organización Matemática y la Organización Didáctica, puestas en juego, por el profesor de matemática durante el ejercicio de su actividad.

Es importante destacar que la tarea en cada objetivo se llevó a cabo en torno a la enseñanza de las funciones logarítmica y exponencial

1.3 Justificación de la Investigación

Vale la pena hacer mención de las razones que justifican la realización de la presente investigación; entre ellas, su relevancia porque estudia la actividad matemática y la actividad docente del profesor de matemática, las cuales permiten comprender la relación entre lo matemático y lo didáctico; actividades éstas, que por ser un producto cultural, frecuentemente, no es cuestionada. Tal situación además, ayuda a sugerir mejoras en los procesos de estudio llevados a cabo en la enseñanza de la matemática. De igual modo, es importante por cuanto la investigación se hizo en el marco de la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD) para así obtener una interpretación a través de un modelo didáctico, que no es usual encontrar en los marcos teóricos de Venezuela.

Ahora bien, el estudio da su contribución a la línea de investigación Enseñanza, aprendizaje y evaluación de la educación en matemática y educación en física; al permitir, partiendo de la información recabada, el mejoramiento de la praxis educativa en la enseñanza de la matemática. Al mismo tiempo, al enmarcarse en el modelo teórico: TAD, proporciona herramientas útiles que enriquecen a la línea de investigación, que sustenta el modelo teórico referido, y la cual se titulada: "La matemática como fuente esencial de proposiciones didácticas en la formación del profesor de matemática", no sólo en el nivel medio, sino también en el nivel superior, respecto al desarrollo de procesos de estudio en torno a las funciones trascendentales: función logarítmica y función exponencial.

Por otro lado, se subraya el interés de realizar un estudio enmarcado en el paradigma interpretativo y ubicado dentro del enfoque cualitativo en correspondencia con un método etnográfico; esto, en procura de incursionar dentro de la realidad social y así observar lo ocurrido en el aula de clase, en relación a la enseñanza de matemática en el nivel medio.

A partir de este punto, se destaca que la investigación es importante en lo académico e institucional, porque al constituirse el profesor como representante de una institución docente, siendo influenciado de una forma positiva por ésta; por consiguiente, la institución, la cual comprende el diseño currículo, normativas, pensum, entre otros, también, al disminuir la problemática de la enseñanza de la matemática es influenciada satisfactoriamente por las actividades que el docente realiza para encarar el proceso de estudio de una determinada OM.

CAPÍTULO II

2. APROXIMACIÓN A UN MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

En el presente capítulo se expone; en la primera parte, la descripción tanto de los antecedentes como de los elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), en conjunto a una red conceptual fundamentada en los trabajos desarrollados por Yves Chevallard y colaboradores, de forma puntual y relacionada con la temática investigada.

2.1 Investigaciones Relacionadas con la Investigación

A continuación, se destacan aportes de estudios científicos realizados en el ámbito educativo y vinculados a la problemática inherente a la actividad docente matemática; algunos desde diversos enfoques; otros específicamente, desde el enfoque de la TAD en torno a diversos objetos matemático, y en especial, en torno a la funciones logarítmica y exponencial. Los cuales vislumbran claramente, múltiples factores que dentro de la misma intervienen:

Primeramente, Sierra (2006), en su estudio Lo Matemático en el Diseño y Análisis de Organizaciones Didácticas: Los Sistemas de Numeración y la Medidas de Magnitudes; adopta un diseño de investigación cualitativo, en él elabora y utiliza un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) para describir y analizar el modelo epistemológico dominante en la institución (I) estudiada, así como dar cuenta de que dicho modelo, reflejado en relación institucional a la OM considerada, provoca en las posibles formas de estudiar dicha OM en I. Encontrando, que la Transposición Didáctica de OM relacionadas con la actividad de la Medida de Magnitudes es, en general, reductora y desequilibrada; asimismo, que en la Enseñanza Secundaria el estudio del objeto matemático indicado, está casi ausente. Paralelamente, las restricciones tales como: aquellas provenientes de la representación institucional del saber matemático que se enseña, la manera como el alumno aprende, y lo que comporta enseñar Matemáticas; en conjunto a, restricciones provocadas por la necesidad de evaluar la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las instituciones didácticas; que provocan una diferencia y autonomización interna del objeto enseñado con mayor algoritmización sobre el mismo.

El estudio, aborda la problemática de la actividad de enseñanza del docente de matemática en el aula, en función a la descripción y análisis tanto de la OM como OD que éstos ponen en juego, asimismo, del papel que juegan modelos epistemológicos docentes que perviven en la institución en la cual laboran. Además, elementos a considerar en cuanto a la metodología a utilizar: distinción de la observación de las OMEE desde un foco epistemológico (MER). Tomando en cuenta, restricciones institucionales e individuales (aprendizaje de los estudiantes) que inciden sobre la actividad docente desarrollada en torno a los objetos matemáticos en juego. En este sentido, el estudio representa, hasta ahora, la investigación más reciente donde se analiza el propósito y criterios para elaborar un MER; y en consecuencia, una OMR.

Seguidamente, Corica y Otero (2010) durante el Análisis de la Dinámica de Estudio en un Curso Universitario de Matemática, efectúan la descripción e interpretación del proceso de estudio de praxeologías en torno al límite y continuidad de funciones desarrolladas en ese nivel. Para ello, despliegan una investigación cualitativa, empleando la observación no participante, con versión de audio sobre las clases teóricas y prácticas. Reflejadas en registros de audio y organizadas en dos tablas de categorización. Los resultados muestran existencia de diferencias en la gestión de las clases teóricas y prácticas, dado que en las mismas, no se favorecen la integración de praxeologías estudiadas. En las clases teóricas predomina un estilo tradicional: momento de constitución del entorno tecnológico-teórico, que aparece como primera etapa del proceso. Mientras que en las clases prácticas predomina el momento exploratorio respecto al tipo de tarea, así como remarcada tendencia a enseñar técnicas algorítmicas, lejos del verdadero trabajo de la técnica. De allí que el topos del profesor prevalezca ante decisiones didáctico-matemáticas; por lo cual la enseñanza se plantea desde un paradigma inamovible y predeterminado.

La investigación, propone un recorrido viable en el nivel universitario; implicando la modificación de dispositivos didácticos tales como: estudio de tareas que impliquen un real trabajo de la técnica, así como, propicien la emergencia de preguntas orientadas a favorecer discusiones en el aula y permitir que los estudiantes propongan resoluciones de las tareas, elaborando técnicas funcionales a las mismas. Se subraya, que la estructura de las técnicas e instrumentos empleados, así como el análisis efectuado de la información recabada; contribuye un modelo relevante, puesto que refleja el cómo abordar la recolección de los datos, provenientes de las prácticas de aula desarrolladas por los profesores de matemática, en coherencia a lineamientos de la TAD y de carácter metodológicos.

Por su parte, García y Ruíz (2010) en su trabajo Análisis de las Praxeologías Didácticas: Implicaciones en la Formación de Maestros, describen y analizan las praxeologías matemático-didácticas en un proceso de estudio que aborda tareas de modelización de un sistema dinámico de variación. Enfatizando, en la caracterización de la praxis didáctica y del logos didáctico del profesor; adoptando, un estudio de caso. Para ello, modelizan el problema de la formación de maestros, en términos de praxeologías, momentos didácticos, categorización de las técnicas didácticas para describir y analizar la praxis didáctica, así como el modelo de los niveles de actividad del profesor; éstos, para describir el proceso de estudio cuya estructura praxeológica se diseña como un recorrido de estudio e investigación (REI). En este sentido, se evidencia cómo procesos de modelización, pueden vivir en la escuela inicial para que sus estudiantes, construyan los primeros conocimientos numéricos. Además, estos procesos, pueden construirse como un proceso de ampliación de praxeologías de complejidad creciente, siendo posible llevar a cabo procesos de estudio, estructurado por pares óptimos: (OM, OD).

La investigación precedente, aun cuando se realiza en el contexto de la escuela inicial, constituye un aporte significativo en el campo de la investigación en educación matemática en torno a la modelización y al estudio actual, dado que en el mismo se muestra el análisis de praxeologías matemático-didáctico; enfatizando, en la caracterización de la praxis docente, a través de un estudio de caso. Modelizando, la problemática de la formación del maestro en términos de praxeologías, momentos didácticos y la caracterización de las técnicas didácticas para describir y analizar la actividad docente. Además, el modelo de los niveles de actividad del profesor, es utilizado para describir el proceso de estudio, el mismo, posee una estructura praxeologica diseñada como un recorrido de estudio de investigación (REI). En otras palabras, durante la actividad docente en matemática es posible llevar a cabo procesos de modelización, en torno a un determinado objeto matemático, siempre que se encuentren estructurados por pares de (OM, OD) que puedan vivenciarse en el aula; esto, a fin de ayudar a los estudiantes a construir sus conocimientos matemáticos.

Por otro lado, Sierra y Olarría (2010) en su investigación La Formación Matemático-Didáctica del profesorado de Secundaria, Tomando como Referencia el Carácter Problemático de las Matemáticas a Enseñar; realizan una síntesis de aportaciones previas al problema de estudio, así como una evaluación de avances y problemas abiertos. En tal sentido, las dificultades de origen matemático, planteadas por los profesores, se detallan a través de la experimentación del dispositivo: las preguntas de la semana. En el mismo, se pretende que los alumnos estudien dos organizaciones matemático-didáctica (OMD); además, diseñen una actividad de estudio e investigación (AEI) a desarrollarse en el aula de clase y realicen una memoria relativa a cada OMD. Por otra parte, se aplica una encuesta a los estudiantes, al culminar el período lectivo, para valorar la calidad de la formación. Durante la experiencia, se observa que los alumnos no disponen de tiempo suficiente para el trabajo en pequeños grupos; situación que genera, en su mayoría, posibles respuestas y una AEI aportadas por parte del profesor. Por consiguiente, el breve tiempo del trabajo en grupo, se dedica al análisis de las OD de los textos escolares y de investigación didáctica. En cuanto al dispositivo, se considera positivo, pero, la falta de tiempo para construir una respuesta, se revela la necesidad de modificar la estructura para el desarrollo del trabajo a realizar, bien sea en grupo o individual. De tal manera, la formación del profesor de secundaria requiere de importantes esfuerzos en didáctica de la matemática con miras a contribuir en su evolución.

Es otro estudio, muestra un aporte, al vislumbrar la propuesta y despliegue de un dispositivo didáctico, en un curso para la formación matemático-didáctica del docente de secundaria, donde el profesor del curso es parte y plantea cuestiones problemáticas, proponiendo el estudio de dos (2) OMD y una AEI a ser desarrollada en clase. Además, se lleva a cabo el análisis de OD de contenido. En general, se evidencia; por un lado, que el profesor del curso, en su actividad docente y de acuerdo a la falta de tiempo otorgado, es actor principal en el estudio de las OMD. Él construye las respuestas a las cuestiones generatrices y brinda la AEI a ser analizada. Y por otro, se plantea un análisis al contenido de textos y material didáctico proporcionado.

De forma análoga, Viviano (2010) presenta un estudio referido a la relación del profesor de matemática al saber matemático en el caso de la ecuación cuadrática; adoptando como metodología el desarrollo de un plan, durante la aparición de las tareas espontáneas a lo largo de las experiencias didácticas, de uno o dos períodos académicos de un programa de maestría de matemática y aplicación de dos pruebas de conocimiento. El mismo, se fundamenta en la TAD, por que define una posición epistemológica: OM de referencia, para el análisis y descripción de las OM. Los Hallazgos verifican que la OM de los profesores de matemática para ser enseñada, se caracteriza por ser poco flexible, de alto grado de dificultad e incompleta, puesto que los mismos manifiestan su dependencia casi absoluta hacia la técnica: resolvente; adicional a una débil potencia operativa y por la ausencia del componente tecnológico-teórico. En otras palabras, carencia en la justificación tanto de técnicas como de estrategias didácticas a emplear en su actividad docente; asimismo, dificultad en disponer diversas técnicas, para abordar problemas y ejercicios relativos a la ecuación cuadrática.

En este contexto, el autor con su investigación brinda una contribución en cuanto a la forma de analizar y describir el tipo de OM y OD puesta en juego por los profesores de matemática, en relación al objeto matemático seleccionado para caracterizar su actividad de aula. Conviene señalar que en el mismo se analiza la OM puesta en juego (reconstruida), partiendo de una OM de referencia. En lo concerniente a la OD, se tomó en cuenta, además de los elementos de la OM, la justificación y argumentación tanto de las técnicas como de las estrategias didácticas que emplean para construir y ayudar a sus estudiantes a reconstruir la OM.

Más tarde, Ferrari (2011) reporta un trabajo en el que describe el desarrollo de los cuatro escenarios de su investigación Un estudio Socio Epistemológico de lo Logarítmico: De Multiplicar Sumando a una Primitiva, cuyo objetivo es dar evidencias de que lo logarítmico emerge al facilitar cálculos y modelar prácticas sociales subsidiarias de predecir; siendo ésta, caracterizada desde la covariación de las progresiones geométrica y aritmética: covariación logarítmica. Para ello, utiliza la ingeniería didáctica como metodología de investigación, con el propósito de encarar un fenómeno didáctico desde una perspectiva sistémica. Cabe aclarar que los escenarios descritos son: 1) en el que se analiza la dicotomía en torno a la noción de función: respuesta única general versus respuesta que emerge del estudio de cada función particular; 2) se analiza el discurso matemático escolar en las voces de profesores y alumnos así como de libros de texto; 3) se realiza un trabajo epistemológico en el que se concluye que facilitar cálculos y modelizar son prácticas sociales que propiciaron la construcción de los logaritmos; y 4) se experimenta una estrategia didáctica basada en los tres momentos constructivos de los logaritmos: transformación, modelización y objeto teórico. Entre las conclusiones más relevantes, para nuestro estudio, destaca que en el escenario (4) se logró sensibilizar a los estudiantes participantes hacia la covariación logarítmica, usando el trabajo grupal como la libertad de expresión en la búsqueda de un discurso común. Esto revela, la importancia de ir a la génesis del objeto matemático en estudio para conocer su naturaleza y, en consecuencia, las potenciales particularidades para su aprendizaje.

En este orden de ideas, se invita a reflexionar, tanto a docentes y alumnos, respecto a la característica funcional y modelizadora que encierra el objeto matemático en cuestión; en procura de reducir el tratamiento operatorio, que éstos en oportunidades, le otorgan. Cabe destacar que esta investigación emerge de la ruptura observada en la presentación escolar de los logaritmos los cuales, en un primer acercamiento de tipo numérico, son tratados como facilitadores de operaciones mientras que en un posterior abordaje (universidad) son manipulados con todo rigor como función sin que medie entre ambos la construcción de los mismos.

Finalmente, Pacheco (2013) en su estudio de las Organizaciones Matemática y Didácticas de las Practicantes Docentes. Caso Ecuación de 2do Grado con una incógnita; su propósito se centró en reconstruir las Organizaciones Matemáticas y las Organizaciones Didácticas de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita desde las prácticas profesionales de de la mención Matemática en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo. Adopta, un enfoque sistémico enmarcado dentro del paradigma interpretativo, empleando así la investigación de campo y documental; la cual además, se orienta por el método etnográfico y la teoría fundamentada. En cuanto a los instrumentos se emplearon la observación participante, la entrevista semiestructurada, notas de campo y registros de clases, recopilación documental, la fotografía y la grabación de audio. En este sentido, la reconstrucción de las OM para las OD desde la praxis docente de las practicantes, muestra que a pesar de que intentan llevar a cabo un proceso de estudio conforme a la construcción de la OM: Ecuación de segundo grado con una incógnita y su OD correspondiente, no se logran gestar su construcción. Las practicantes presentan la forma general de la Ecuación de segundo grado como un elemento ostensivo y carente de justificación tecnológica-teórica; en otras palabras, no son presentados los elementos matemáticos que la conforman; tal situación conduce a una pérdida del significado estructural del objeto matemático, en contraposición con el esbozo de la Organización Matemática de Referencia (OMR). Por su parte, la OMR muestra cierta completitud, en las clases de las practicantes tiende a existir la incompletitud y la ausencia de los momentos didácticos, los cuales son fundamentales para la construcción y reconstrucción efectiva del proceso de estudio.

La investigación previa, es un rico aporte puesto que en la misma se realiza una reconstrucción de las Organizaciones Matemáticas (OM) y Organizaciones Didácticas (OD) de las practicantes docentes de la mención de matemática en torno a las ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Bien porque se fundamenta en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), por su naturaleza y estrategia metodológica las cuales constituyen bases sólidas para mi estudio de las OM y OD en torno a las funciones logarítmica y exponencial. Aunado, al procedimiento inherente a la recolección, tratamiento; y posterior, análisis e interpretación de la información recabada. Procedimiento éste, que permitió enriquecer y orientar la manipulación, análisis e interpretación de las OM y OD observadas, durante el trabajo de campo propiamente dicho.

En resumen, la investigación en didáctica de las matemáticas muestra, de acuerdo a los antecedentes, la existencia de una problemática en torno a la actividad docente matemática y, en particular, en torno a la enseñanza de las funciones logarítmica y exponencial. Es fácil notar que ni los enfoques didácticos ni las metodologías de investigación para abordar tales problemáticas son únicos, pudiendo ser esto una fortaleza más que una debilidad para esta disciplina. Es por ello que en el presente estudio, la diferencia con los planteamientos reportados en los antecedentes está marcada, al menos, en tres sentidos: a) con respecto a los estudios en torno al logaritmo y la función exponencial, la diferencia consiste en el abordaje del problema desde la perspectiva de la TAD, altamente infrecuente en los estudios realizados en Venezuela; b) con respecto al uso del modelo de la TAD, la diferencia radica en que el modelo se usa para realizar un estudio en torno a las funciones logaritmo y exponencial, nociones éstas poco frecuentemente estudiadas desde la perspectiva de la TAD; c) con respecto a la metodología, una diferencia podría consistir en la naturaleza exploratoria del estudio.

2.2 Elementos del Enfoque Teórico: Teoría Antropológica de lo Didáctico

Tal y como se planteó en el capítulo 1, la interpretación de la situación problema se hará a través de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD); la misma, sirve de apoyo al estudio de los problemas didácticos desde una perspectiva antropológica: Partir del hombre haciendo matemáticas (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997); Gascón (1998).

2.2.1 Elementos Teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se inscribe en el Programa de Investigación: Programa Epistemológico (Bosch, 2003) y es iniciada por Yves Chevallard a partir de la introducción, del concepto de transposición didáctica que da paso a la visión antropológica de la didáctica de la matemática, postulando que, empíricamente, lo matemático y lo didáctico son inseparables; se codeterminan entre sí. Dando lugar a la noción del fenómeno didáctico que refiere como dimensión esencial a la actividad matemática institucional. (Bosch; Chevallard y Gascón, 1997).

Dentro de este contexto, Chevallard (1999) apunta que la TAD postula la actividad matemática, y por ende su estudio, en el marco de las actividades e interacciones humanas e instituciones sociales; esto es, en las relaciones. Naturalmente, la noción de estudio, en un sentido amplio, constituye la integración entre el proceso de enseñanza (el profesor) y aprendizaje (el alumno). Es decir, el profesor y sus alumnos estudian matemáticas conocidas a fin de brindar respuestas a cuestiones problemáticas consideradas importantes en determinadas instituciones de la sociedad. (Bosch; Chevallard y Gascón, 1997; Bosch, Espinoza y Gascón, 2003). De igual forma, a partir de la TAD es posible describir toda actividad humana a través de un modelo, único, denominado praxeología que comprenden cuatro elementos a saber:

Tipos de tareas: constituyen acciones precisas que se pretender llevar a cabo sobre un determinado saber matemático. *Técnicas:* competen a la acción dinámica mediante la cual se específica la manera de realizar las tareas. Tal como las técnicas algorítmicas a emplear. *Tecnología:* conforman el discurso racional que ayuda a explicar (aclarar), así como justificar (porqué) el uso de la técnica; resaltando los objetivos a alcanzar con las tareas iníciales. *Teoría:* se inclina en la justificación del discurso tecnológico, en un nivel superior: justificación-explicación-producción, y el papel que éste desempeña respecto a la técnica. Cabe destacar que los dos primeros elementos representan el bloque técnico-práctico (saber-hacer: parte práctica) y los dos últimos el bloque discursivo (saber: parte descriptiva, organizadora, y justificadora) de la actividad matemática.

2.2.2 Modelo Epistemológico de Referencia Propuesto por la TAD

El programa Epistemológico bajo el cual se inscribe la TAD, considera como objeto primario de investigación a la actividad matemática, tal y como se realiza en distintas instituciones de la sociedad y plantea que la didáctica de las matemáticas estudia "las condiciones de difusión y transmisión del conocimiento matemático" (p.15), puntualiza que el conocimiento no emerge desde el punto de vista psicológico sino como el producto o cristalización de un determinado quehacer humano, caracterizado por las actividades de las que surge y por las cuales se puede realizar. En este sentido, tanto el conocimiento como la actividad matemática son construcciones sociales, realizadas en instituciones, en comunidad, bajo determinados contratos institucionales. De ahí que estudiar las condiciones de producción y difusión del conocimiento matemático requiere que el individuo sea capaz de describir y analizar determinados tipos de actividades humanas, llevadas a cabo en condiciones particulares tal y como el aula de clase. De manera que el análisis de la actividad matemática precise utilizar nociones apropiadas que permitan describir sus diferentes componentes, así como sus condiciones de producción y reproducción. En consecuencia, se vislumbra un modelo epistemológico de la actividad matemática

(MEAM: hacer matemáticas y producir conocimiento matemático) que permite llevar a cabo el análisis de dicha actividad. Para ello, se utilizan ciertas nociones que permiten describir sus distintos componentes, así como sus condiciones de producción y difusión; puesto que este modelo comprende el hacer matemática y la producción del conocimiento matemático. Por su puesto, tales componentes, correspondidas con las componentes del saber matemático en juego (organización teórica), pero al mismo tiempo, su descripción articulada con las condiciones bajo las cuales éste se realiza y evoluciona, bien para crear un nuevo saber matemático (actividad matemática: OM), o para reconstruir dicho saber (actividad didáctica: OD) (Bosch, 2003).

En relación a lo anterior, las componentes del MEAM o Modelo Epistemológico de Referencia (MER), se describen y articulan en correspondencia a una OM y OD de referencia respectivamente. De ahí que en la actual investigación, se utilice la noción de OM de Referencia para llevar a cabo el análisis de la actividad matemática y la actividad docente del profesor de matemática, en torno a las funciones logarítmica y exponencial, en términos de una unidad de análisis denominada praxeología u OM y praxeología u OD.

En este contexto, Sierra (2006) puntualiza que las investigaciones realizadas en el marco de la TAD, precisan construir un MER, relativo y provisional, el cual se utiliza para diseñar, gestionar y evaluar determinados procesos didácticos (OD); asimismo, analizar el modelo epistemológico dominante en una determinada institución (I) y hasta para dar cuenta de las restricciones del mismo. Subrayando, que todo MER ha de elaborarse sobre la base de OM sabias que legitiman, epistemológicamente, el proceso de enseñanza de esa OM. Constituyendo, una herramienta de distanciamiento de la I sabia, permitiendo así a la investigación didáctica, explicitar su punto de vista respecto al contenido matemático en juego en los procesos didácticos que se diseñan, implementan, analizan y evalúan; por ello, debe tomarse en cuenta la evolución histórica de las OM sabias, pero sin copiarlas textualmente. Por otro lado, se hace hincapié que el MER es una herramienta provisional (hipótesis), el cual será contrastado con los datos empíricos, provenientes del trabajo de campo efectuado en la I estudiada. De ahí que éste, pueda estar sujeto a modificaciones permanentes.

2.2.3 Unidad de Análisis de la Actividad Matemática: Praxeología U OM y OD

En la enseñanza de la matemática comprendida en la TAD, interviene el término de praxeología que de acuerdo a Bosch, Espinoza y Gascón (2003) deriva de la unión de los términos *praxis* y *logo;* o bien*, Tipos de tareas*, *técnicas*, *tecnología* y *teoría*; a partir de los cuales es posible llevar a cabo la construcción del saber matemático como respuesta al estudio ciertas cuestiones problemáticas, emergiendo como el resultado o producto de un proceso de estudio que orienta hacia la construcción o construcción del conocimiento matemático que forma parte de la actividad matemática en estudio. Dicho de otra forma, la matemática es al mismo tiempo una actividad y el producto de esa actividad.

En sentido, se puntualiza a la noción *OM* como modelo que permite la descripción del conocimiento matemático, en correspondencia, con el trabajo matemático que involucra los elementos praxeológico descritos. Mientras que la noción de OD comprende el proceso de estudio desarrollado por un individuo, siempre que estudia una OM (el estudiante), o cuando ayuda a estudiar a otros una OM (el docente); resaltando que la misma ha de conformarse por tareas y técnicas didácticas (componente técnico-práctico) así como una tecnología y teoría didáctica (componente discursivo) en las que se requiere la cooperación, contribución y participación de los dos actores claves: alumno y profesor. (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003).

De ahí que hacer matemática consista en emplear, en la actividad docente, una OM para realizar un determinado tipo de tareas, mientras que estudiar matemáticas constituye el proceso de construcción o reconstrucción de determinados elementos de la misma; a objeto de dar respuesta a un específico tipo de tareas problemática. Por su puesto, tomando en cuenta que tales OM no surgen de manera instantánea, ni se presentan como un producto acabado; sino que son el producto de un arduo, constante y complejo trabajo, ejecutado en un largo tiempo y en cuyo funcionamiento intervienen diversos elementos y existen ciertas relaciones invariantes que orientan su modelización. Por consiguiente, existen dos aspectos inseparables: proceso de construcción matemática (proceso de estudio: OD) y el resultado de dicha construcción (OM). Puesto que "no hay OM sin un proceso de estudio que la engendre, así como tampoco hay proceso de estudio sin una OM en construcción" (p.5). Codeterminación didáctica. Ob. cit.

2.2.4 Momentos Didácticos Presentes en la Actividad Matemática

Dentro de este marco, Chevallard (1999) destaca la existencia, independientemente del camino transitado, de los momentos didácticos que facilitan la construcción y/o reconstrucción de la OM a alcanzar:

1. *Momento del Primer Encuentro*: es el primer encuentro con la OM, puede darse de diversas formas; pero un tipo de encuentro o reencuentro es a través de uno de los tipos de tareas que constituyen la OM. Puede tener lugar varias veces; en función de los entornos matemáticos que se producen: volver a descubrir un tipo de tareas. Anuncio, introducción, situación problemas, entre otros.
2. *Momento de Exploración del Tipo de Tarea y Elaboración de una Técnica Relativa a ese Tipo de Tarea*: constituye la exploración del tipo de tareas y elaboración de la técnica a emplear en dicha tarea, por parte del estudiante. Subrayando, la actividad matemática en la elaboración de técnicas más que en la resolución de problemas aislados. Caracterizada por el trabajo de ensayo y error del alumno, bajo la orientación del docente.
3. *Momento de la Constitución del Entorno Tecnológico-Teórico*: comprende la constitución de la tecnología y teoría, en estrecha relación con los momentos previos.

4. *Momento del Trabajo de la Técnica:* constituye la puesta en práctica (ejecución) de la técnica seleccionada como alternativa válida (haciéndola eficaz y fiable), para la resolución del tipo de tarea.
5. *Momento de la Institucionalización*: referido a la precisión así como establecimiento de la OM elaborada, distinguiendo tanto los elementos no integrados en ella, así como aquellos que entrarán en la misma. Por su puesto, distinción procurada por los estudiantes bajo la orientación y autorización del docente.
6. *Momento de la Evaluación*: permite valorar lo aprendido durante el proceso didáctico.

Cabe señalar que la estructura del proceso de estudio expuesto, no es lineal. En otras palabras, no importa el orden en que se realicen tales momentos, sino la estructura interna de las relaciones que han de establecerse entre ellos. (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003).

2.2.5 Noción de Completitud de las OM

En este orden de ideas, Bosch, Fonseca y Gascón (2000) refieren que las características de los elementos de una OM son relativas a la institución de referencia, ello se traduce en que el significado que tiene cualquiera de ellos en una determinada institución, puede no ser igual en otra. De ahí que Viviano (2010) resalte que en la estructuración de las OM debe considerarse el grado de completitud asociado a la complejidad y a los niveles de co-determinación didáctica que dan sentido a las cuestiones genéricas. Bosch, Fonseca y Gascón (2000), plantean que las OM pueden ser analizadas en términos de una complejidad creciente. En este sentido, en el marco de la TAD, se propone la clasificación siguiente:

Organización Matemática Puntual (OMP): producida en una institución en torno a un específico tipo de tarea. *Organización Matemática Local (OML)*: producida de la integración de varias OMP en consonancia a una tecnología común. *Organización*

Matemática Regional (OMR): emerge de la “coordinación, articulación e integración de varias OML que giran alrededor de una teoría matemática común” (p.11). *Organización Matemática Global (OMG)*: está compuesta de la integración de múltiples OMR.

Sobre la base de la clasificación previa, se posibilita la caracterización del grado de completitud de una OML, la cual es considerada una totalidad organizada cuyos componentes se implican mutuamente. Esta caracterización se hace explicita partiendo de los *indicadores del grado de completitud* descritos por los autores anteriormente señalados:

1. Integración de los Tipos de Tareas : Intervención de diversas OM relacionadas entre sí; bien por compartir la misma tecnología o técnicas, vinculadas con la OML que emerge.
2. Distintas Técnicas y Criterios Para Elegir Entre Ellas: la existencia de técnicas alternativas permitirá realizar e integrar algunos tipos de tareas sin tener que identificarlas, comprendiendo un cuestionamiento y análisis tecnológico sobre los mismos.
3. Independencia de los Objetos Ostensivos Que Permiten Representar las Técnicas: la flexibilidad de las técnicas de una OML no dependen de los objetos ostensivos a través de los cuales se describen, utilizan y aplican; sino al admitir la variedad de los mismos dependiendo de la actividad matemática que las comprendan.
4. Existencia de Tareas y Técnicas Inversas: referida a los tipos de técnicas que en una OML permiten dar solución a ciertos tipos de tareas así como a sus inversas (contrarias).
5. Interpretación del Resultado de Aplicar las Técnicas: Cuanto más completa es una OML, su tecnología adquiere mayor funcionalidad, sobre todo, en la interpretación de la función de sus técnicas y resultados obtenidos.

6. Existencia de Tareas Matemáticas Abiertas: una OML será más completa en el grado que facilite abordar situaciones amplias, es decir, tareas inclinadas a estudiar problemas sin datos ni referencias predeterminadas.
7. Incidencia de Elementos Tecnológicos Sobre la Práctica: cada OML está caracterizada por su teoría. De ahí el que su grado de completitud está subordinado tanto a esta tecnología como a su incidencia sobre las prácticas matemáticas ejecutadas en la misma.

A esta altura debo referir que, en la presente investigación, se analizaron la Organización Matemática (OM) y la Organización Didáctica (OD) del profesor de matemática, precisando, los elementos praxeológicos y momentos didácticos que emergen durante el proceso de construcción y reconstrucción de la OM enseñada. Por tal razón, se consideran la actividad matemática y la actividad docente del profesor de matemática, del nivel medio, en relación a las características y ausencia de los elementos que éstas presentan.

2.3 Términos Resaltantes de la Investigación

A esta altura, debo referir que entre los términos que más se destacaron durante el desarrollo de la investigación que se llevó a cabo, se tienen:

2.3.1 Praxeología: deriva de la unión de los términos praxis que significa saber-hacer y logos que significa saber-razón (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003, p. 5)

2.3.2 Organización Matemática: La noción de praxeologia u organización matemática comprende la concepción del trabajo matemático como estudio de tipos de problemas o tareas problemáticas, así como caracterizar, delimitar y hasta clasificar los problemas en tipos de problemas; aunado, al entender, describir y caracterizar las técnicas empleadas para resolverlos, en base a argumentos sólidos que sustenten dichos técnicas. En otras palabras, permite la descripción del conocimiento matemático, en correspondencia, con el trabajo que involucra los elementos praxeológicos tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003, p. 5).

2.3.4 Organización Didáctica: comprende el proceso de estudio desarrollado, siempre que estudia una OM (el estudiante), o cuando ayuda a estudiar a otros (el docente); la misma, ha de conformarse por tareas y técnicas didácticas (componente técnico-práctico) así como una tecnología y teoría didáctica (componente discursivo) en las cuales se requiere la cooperación, contribución y participación tanto del alumno como el profesor (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003, p. 7).

CAPÍTULO III

3. NATURALEZA Y ESTRATEGIA METODOLÓGICA DE LA INVESTIGACIÓN

La metodología de esta investigación, se constituyó como el conjunto de condiciones que permitieron direccionar el estudio; esto, a objeto de dar respuesta satisfactoria a la situación problema planteada en una fase inicial del mismo. Subrayando, entre otros aspectos relevantes, la naturaleza del estudio, su paradigma, método, y estrategias empleadas. De ahí que, durante la fase actual, se hizo énfasis en el cómo se preparó tanto la recolección como el tratamiento, análisis y presentación de la información recabada.

3.1 Paradigma Científico

El estudio se enmarcó dentro del paradigma interpretativo, el cual según lo planteado por Torres Santomé (citado en Goetz y LeCompte, 1988) se ocupa de

> indagar cómo los distintos actores humanos construyen y reconstruyen la realidad social mediante la interacción con los restantes miembros de su comunidad y para ello será necesario tener en cuenta la interpretación que ellos mismos realizan de los porque y para que de sus acciones y de la situación en general.Los seres humanos según esta perspectiva, crean significados de su entorno social y físico, por tanto, de los comportamientos e interacciones de las personas y objetos en ese medio ambiente. Nuestras acciones están condicionadas por los significados que otorgamos a las acciones de las personas y a los objetos con los que nos relacionamos. Las investigaciones etnográficas son una de las alternativas que recogen esta filosofía interpretativa y reconstructiva de la realidad (p. 13)

En acuerdo a lo expresado se abordó el problema de la actividad matemática y la actividad docente del profesor de matemática, en términos de su Organización

Matemática (OM) y Organización Didáctica (OD) en el cuarto (4to) año de educación media en torno a las funciones logarítmica y exponencial, empleando para ello, procedimientos para recabar los datos en el contexto ambiente donde se desenvuelven, y con el propósito de dar tratamiento a la información con objetividad, realizar su interpretación, describir la OM y OD, a fin de establecer las relaciones entre éstas.

3.2 Enfoque del Estudio

El estudio se enmarcó dentro de un enfoque cualitativo, propio del paradigma histórico dialéctico de las ciencias sociales. En correspondencia a lo expresado, se aborda el problema de la OM y OD del profesor de matemática en torno a las funciones logarítmica y exponencial; en el cuarto (4to) año de educación media general, en virtud a las cualidades identificadas, en la estructura y dinámica de la realidad emergente de la interacción dentro de su contexto educativo y social. A tales efectos, "la investigación cualitativa se ubica y estudia los fenómenos en su contexto estructural y situacional" (Martins y Stracuzzi, 2010; p. 43).

3.3 El Método

El método de la investigación es etnográfico, enmarcado dentro del paradigma interpretativo. Al respecto, Goetz y LeCompte (1988) sostienen que "una etnografía es una descripción o reconstrucción analítica de escenarios y grupos culturales intactos. Recrean para el lector, las creencias compartidas, prácticas, artefactos, conocimiento popular y comportamientos de un grupo de personas" Además, "la etnografía es un proceso, una forma de estudiar la vida humana" (p. 28).

3.4 El Diseño

La investigación se realizó a través de un diseño no experimental, dado que la organización matemática (OM) y la organización didáctica (OD) del profesor de matemática se observaron tal como se presentaron en las instituciones estudiadas, sin afectar ni manipular sobre las variables que intervienen en ellas. Al respecto, Martins y Stracuzzi (2010) puntualizan que

> El diseño no experimental es el que se realiza sin manipular ninguna variable. El investigador no sustituye intencionalmente las variables independientes. Se observan los hechos tal y como se presentan en su contexto real y en un tiempo determinado o no, para luego analizarlos. (p. 87)

De forma análoga, Goetz y LeCompte (1988) subrayan que "los etnógrafos acostumbran a estudiar los fenómenos tal y como ocurren naturalmente, en lugar de manipularlos o disponerlos anticipadamente bajo condiciones controladas; de igual modo, refieren que "El escenario natural, facilita el análisis sobre el terreno de causas y procesos, excluyendo al mismo tiempo un control estricto de las denominadas variables extrañas" (p. 35).

En este contexto, se argumenta que el diseño seleccionado en esta investigación; adicionalmente, se corresponde al propuesto por Goetz y LeCompte (1988), el mismo presenta las siguientes fases que representan el proceso de investigación etnográfica:

<u>Primera fase:</u> desarrollo de un enfoque o problema situado dentro de una perspectiva teórica.

<u>Segunda fase:</u> acceso al escenario natural para la selección de las unidades de análisis o informantes claves, así como de las estrategias etnográficas de investigación para examinar el problema.

<u>Tercera fase:</u> Adopción de una determinada posición o rol hacia las fuentes de datos y desarrollo de procedimientos de recolección de datos; es decir, se lleva a cabo el trabajo de campo.

<u>Cuarta fase:</u> Análisis e interpretación de la información recabada, según su relevancia para el enfoque o problema de investigación.

3.5 Tipo de Investigación

Referida a la clase del estudio, la presente investigación es de campo y documental. Cabe destacar, que la misma es de campo, puesto que se aborda, en el escenario natural la OM y OD del docente de matemática en el nivel medio, en torno a las funciones logarítmica y exponencial. Asimismo, es documental, debido a la revisión y el análisis de contenido efectuado, ya que se recurrió a diversas fuentes para analizar interpretar la estructura de las funciones indicadas; propuesta tanto en libros de textos de matemática del 4to año de educación media y de cálculo y geometría analítica del nivel superior, así como distintas fuentes bibliográficas y electrónicas, para describir su evolución histórica. Esto, en virtud a que el estudio requirió establecer una aproximación a una Organización Matemática de Referencia (OMR): Primera actividad a realizar para estudiar la OM y OD del profesor de matemática; y en consecuencia, dar cumplimiento al primer objetivo específico de la investigación. Además, el estudio es de caso, dado que se observa la enseñanza de dos (2) profesores de matemática en su actividad de aula.

En este sentido, Martins y Stracuzzi (2010) acotan que la investigación de campo "consiste en la recolección de datos directamente de la realidad donde ocurren los hechos, sin manipular o controlar variables. Estudia fenómenos sociales en su ambiente natural" (p. 88). De hecho, "El escenario natural, facilita el análisis sobre el terreno de causas y procesos, excluyendo al mismo tiempo un control estricto de las denominadas variables extrañas" (Goetz y LeCompte, 1988; p. 35). Mientras que la investigación documental "se concreta exclusivamente en la recopilación de información en diversas fuentes" (p. 90).

3.6 Nivel de la Investigación

En lo tocante al nivel, se hace referencia que el mismo se ubicó en un nivel exploratorio, en virtud a que se busca información relativa a la actividad matemática: OM y actividad didáctica: OD del profesor de matemática para familiarizar a la investigadora con las mismas, describir su OM y OD; y por consiguiente, interpretar las relaciones entre ambas. Tal situación, permite a la investigadora acercarse a aquellos fenómenos relativamente desconocidos y vinculados al tema estudiado; obtener así, información completa de un contexto específico de la vida real e investigar problemas del comportamiento profesor de matemática en su enseñanza de las funciones logarítmica y exponencial, considerados cruciales por profesionales de determinada área. En este orden de ideas, por un lado, Martins y Stracuzzi (2010) sostienen que una investigación exploratoria.

> Es el inicio de cualquier proceso científico. Se realiza especialmente cuando el tema elegido ha sido poco examinado, es decir cuando no hay suficientes estudios previos y es difícil formular hipótesis. Se aplica cuando el tópico ha sido tratado escasamente, cuando no existe suficiente información o cuando no se dispone de medios para lograr mayor profundidad (p. 92).

Por otro lado, Goetz y LeCompte (1988) argumentan que “los etnógrafos emplean una secuencia de estrategias de selección a todo lo largo de sus investigaciones porque, con frecuencia, éstas son de carácter exploratorio y carecen de un final cerrado” (p. 94)

3.7 Sujetos Investigados

Son los profesores de matemática adscritos al Municipio Libertador Nro. 06, Parroquia Independencia. Valencia-Edo. Carabobo; que laboran tanto en las instituciones públicas como privadas.

3.7.1 Unidad de Análisis e Informantes claves:

La unidad de análisis está conformada por dos (2) docentes que imparten la asignatura matemática en el nivel del 4to año de Educación Media General, que laboran en las instituciones: U. E. Barrera y Crispín Pérez, respectivamente. Los mismos se estudian una vez iniciada la enseñanza del contenido hasta el día de la evaluación del mismo. Aunado, a doce (12) estudiantes pertenecientes al grupo de alumnos, a cargo de los profesores ya mencionados, a los que se les analizan los registros tanto de cada clase como de la evaluación desarrollada en torno a las funciones logarítmica y exponencial.

En acuerdo con Torres (citado en Goetz y LeCompte, 1988) “los informadores son seres humanos y por consiguiente sus actividades tienen que ver con valores, intereses, problemas y preocupaciones para los que se debe garantizar el más absoluto respeto e incluso intimidad, así lo solicitan los mismos” (p. 18). Por su parte, Goetz y LeCompte (ob. cit) destacan que las unidades de análisis “son el general, seres humanos, considerados individualmente o en grupos situados en totalidades de interacción o que manifiestan comportamientos, rasgos o creencias. En otros casos, se conceptualizan como unidades artefactos, acontecimientos o contextos” (p.104)

3.8 Técnicas e Instrumentos Empleados

3.8.1 Técnicas: Están compuestas por la observación no participante realizada al profesor de matemática de 4to año, en su análisis del discurso, empleado en su Organización Matemática Efectivamente Enseñada (OMEE) y Organización Didáctica (OD) correspondiente a su actividad docente; adicional al análisis de contenido que se efectuó en los cuadernos y evaluación de los estudiantes respectivamente. Al respecto, Goetz y LeCompte (1988) resaltan:

> La observación no participante consiste, exclusivamente, en contemplar lo que está aconteciendo y registrar los hechos sobre el terreno. La observación no participante solo existe cuando la interacción se observa mediante cámaras y grabadoras. Normalmente, los observadores se denominan así mismos no participante cuando reducen al mínimo sus interacciones con los participantes para centrar su atención no intrusivamente en el flujo de los acontecimientos. La observación no participante pone el acento en el rol del investigador como un sujeto que registra los hechos desapasionadamente. En el área de la educación, los etnógrafos utilizan habitualmente tres tipos de observación no participante:
>
> <u>Crónicas de flujos de comportamiento:</u> requiere descripciones exactas, minuto a minuto, de lo que un participante dice y hace. Estos comportamientos pueden ser filmados, grabados o anotados.

> Proxemia y kinesia: estudian el movimiento corporal y los usos sociales del espacio. En la investigación educativa, los etnógrafos incorporan informalmente registros observacionales de movimientos y usos del espacio ya sus narraciones. (p. 153)
> Protocolos de análisis de interacción: estos van desde los sociogramas informales elaborados sobre el terreno por el observador hasta sistemas estandarizados de clasificación de los comportamientos. El objetivo de estos métodos de recogida de datos es registrar las formas en que interactúan los participantes.
> (p. 154).

Exactamente, para el estudio de la OM y OD del profesor de matemática del 4to año de Educación Media General, en torno a los objetos funciones logarítmica y exponencial, se utilizó la observación no participante vinculada con las crónicas de flujos de comportamiento.

En otro contexto, Bogdan y Taylor (1996) sostienen que el *análisis del contenido* constituye una herramienta de gran utilidad, al permitir analizar los procesos comunicacionales en distintos contextos. El mismo, puede aplicarse a cualquier forma de comunicación, tales como: programas de tv o radio, libros, poemas, conversaciones, discursos, cartas, entre otros.

3.8.2 Instrumentos: Se empleó para el registro de la información, la grabación de video y audio, así como las notas de campo para el caso de la observación no participante; mientras que para el análisis del contenido sólo se utilizó un registro de campo descriptivo. En este sentido, se puntualiza que

> En las notas de campo el investigador, el investigador incluye datos interpretativos basados en sus percepciones; dichas interpretaciones están influidas por el rol social que asume en el grupo y por las reacciones correspondientes de los participantes. Muchas de esas notas interpretativas surgen de la empatía con los participantes que el etnógrafo desarrolla al desempeñar sus roles sucesivos (Goetz y LeCompte, 1988; p. 126).

Es importante destacar que el contenido de la información recabada es tabulada y/o transcrita, en dos (2) tablas diferentes, construidas en base a tablas utilizadas por Bosch, Espinoza y Gascón (2003); así como Pacheco (2013) para el estudio de las Organizaciones Matemáticas y Organizaciones Didácticas del profesor de matemática en torno a una obra matemática.

Cuadro 1:

En esta tabla presento la transcripción, específica, de todo lo observado por cada profesor durante el proceso de estudio en torno a las funciones logarítmica y exponencial. Para ello, se emplearon los siguientes criterios o categorías:

Episodio/Clase	
(Nro. de la intervención del actor)	(Espacio reservado para transcribir el contenido de la clase observada)

Diseño: Acuña (2015)

Cuadro 2: Características del proceso de estudio u OD observado en el profesor de matemática del nivel de cuarto (4to) año:

Praxeología u Organización Matemática (OM)			**Características**	**Interpretación (P_1 y P_2 Vs RCE y OMR)**
Tipo de tareas y/o problemas matemáticos	Técnicas matemáticas	Elementos tecnológicos-teóricos matemáticos		
Praxeología u Organización Didáctica (OD)				
Momento Didáctico Dominante				

Diseño: Acuña (2015)

El cuadro precedente permitió describir e interpretar las *características tanto de la Organización Matemática Efectivamente Enseñada (OMEE) como de la OD*; y por ende, llevar a cabo la triangulación de la información mediante una Categorización e Interpretación de esa información con el Referente de Carácter Epistemológico (RCE) y la Organización Matemática de Referencia (OMR).

3.8.3 Recursos o Artefactos

Los materiales a utilizar, para registrar información en torno a la OMEE y OD del profesor de matemática, durante la enseñanza de las funciones señaladas, comprenden: la grabadora de video y audio, un cuaderno de notas para el registro de campo. Aunado, a los registros de papel proporcionado en cuanto a los apuntes de clase de 12 estudiantes y sus evaluaciones. Incluso, las tablas de categorización, mencionadas previamente, plasmadas en formato de papel de carta, permitieron tabular, analizar e interpretar la información requerida en el estudio actual.

En este contexto, se refiere que "los artefactos ofrecen evidencia relevante para los temas y cuestiones de los etnógrafos, porque son manifestaciones materiales de las creencias y comportamientos que constituyen una cultura" (p. 163). Cabe destacar:

> La recogida y análisis de libros de textos, guías curriculares, apuntes de clase, lista de matrícula, actas de las reuniones, expedientes personales de los alumnos, documentos personales de los profesores y alumnos, constituyen una fuente inestimable de datos de base, de proceso y axiológicos (Goetz y LeCompte, 1988; p. 163)

3.9 Técnica de Análisis de la Información

Ahora bien, una vez analizados los datos, precisados los detalles de cada clase durante las observaciones no participantes, realizada a la actividad de cada docente de matemática, se utilizó la ***triangulación de la información recabada*** para confirmar la credibilidad de los datos obtenidos; y de tal manera, describir las características de su OM y OD correspondiente, con el propósito de interpretar las relaciones entre ambas.

Dentro de este marco de ideas, se especifica que en la presente investigación se llevó a cabo una triangulación con los datos provenientes de las observaciones de la actividad docente de los profesores (P_1 y P_2) de matemática de 4to año, el Referente de Carácter Epistemológico y la Organización Matemática de Referencia (OMR). A partir de este punto, Bogdan y Taylor (1996) puntualizan:

> La triangulación suele ser concebida como un modo de protegerse de las tendencias del investigador y de confrontar y someter a control recíproco relatos de diferentes informantes. Abrevándose en otros tipos y fuentes de datos, los observadores suelen también obtener una comprensión más profunda y clara del escenario y de las personas estudiadas.
> Los investigadores pueden también analizar los documentos históricos y públicos a fin de obtener una perspectiva más amplia respecto de un escenario (p. 92).

También; la triangulación:

> Consiste en tomar múltiples puntos de referencia para localizar una posición desconocida.
> Se recoge la información desde puntos de vistas distintos, lo que permite realizar múltiples comparaciones de un problema utilizando perspectivas y procedimientos diversos. Los datos observacionales y los datos de entrevista se codifican y analizan por separado. Luego se comparan, como una manera de validar los hallazgos (Martins y Stracuzzi, 2010; pp. 184-185).
> La triangulación impide que acepte demasiado fácilmente la validez de sus impresiones iniciales; amplía el ámbito, densidad y claridad de los constructos desarrollados en el curso de la investigación, y ayuda a corregir los sesgos que aparecen cuando el fenómeno es examinado por un solo observador (Goetz y LeCompte, 1988; p. 36).

Con frecuencia, la triangulación es emplea en la investigación histórica, en algunos diseños de análisis de muestras, en diversos análisis secundarios o meta-análisis de resultados experimentales, así como en la determinación de la validez convergente de instrumentos psicométricos (Goetz y LeCompte, 1988).

3.10 Validez y Fiabilidad

En el contexto de la validez, se tomaron en cuenta: 1. Observación y registro de la OM y OD de cada docente de matemática en torno a las funciones logarítmica y exponencial. Desde que se inició, hasta la culminación de la enseñanza del contenido. 2. Análisis e interpretación de la OMEE y OD de ambos docentes de matemática; en correspondencia con la OM de Referencia (OMR). 3) Triangulación de la información recabada, en consonancia al Referente de carácter Epistemológico y OMR del actual estudio. A tales efectos Goetz y Lecompte (1988) reportan:

> La validez concierne a su exactitud. La determinación de la validez exige 1) la estimación de la medida en que las conclusiones representan efectivamente la realidad empírica y 2) la estimación de si los constructos diseñados por los investigadores representan o miden categorías reales de la experiencia humana. La *validez interna* se refiere a la medida en que las observaciones y mediciones científicas son representaciones auténticas de alguna realidad; la *validez externa*, al grado en que dichas representaciones son comparables legítimamente si se aplican a dichos grupos (p. 214).

Por otra parte:

> La fiabilidad de una investigación etnográfica depende de la solución de sus problemas de diseño interno y externo. La *fiabilidad externa* se relaciona con la cuestión de si un investigador independiente descubriría los mismos fenómenos o elaboraría idénticos constructos en el mismo escenario u otro similar. La *fiabilidad interna* se refiere al grado en que un segundo investigador, a partir de un conjunto de constructos elaborados previamente, ajustaría a ellos sus datos como se hizo en la investigación original (p. 214).

En tanto, para alcanzar un satisfactorio nivel de fiabilidad, se emplean como estrategias: 1. Precisión del grado de participación y posición del investigador. 2. Identificación de los informantes. 3. Descripción del contexto en el cual se recabaron los datos del estudio. En tanto, para prever posibles fallas en la fiabilidad interna se consideron: 1. Emplear categorías descriptivas, concretas y precisas (elementos de los modelos praxeológicos). 2. Uso de grabadoras de videos y audio, como medio técnico actual; entre otros en el curso de la investigación.

3.11 Tratamiento y Presentación de la Información Recabada

La presente investigación centra su atención en analizar las relaciones entre la Organización Matemática (OM) y Organización Didáctica (OD) del profesor de matemática del nivel de cuarto (4to) año de Educación Media General del municipio Libertador, en torno a las funciones logarítmica y exponencial; en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). El trabajo de campo, tuvo lugar en la U.E. Crispín Pérez, ubicada en Tocuyito y la U.E. Barrera, ubicada en barrera; ambas instituciones, en el municipio Libertador Estado Carabobo. Los sujetos investigados fueron 2 docentes (1 de cada institución), los cuales laboran en las instituciones mencionadas; para ello, permanecí en el campo, en mi rol de investigadora, durante 2 lapsos realizando observación no participante de la organización matemática y el proceso de estudio con las docentes. Ambas, del sexo femenino y asignado por el directivo respectivo.

Es importante destacar que para resguardar su identidad, considere llamar profesor1 (P_1) y profesor 2 (P_2) a las docente, así como cuidar la objetividad propia la investigación científica. Cada una de ellas, estuvo a cargo de un curso de forma particular. P_1 estuvo con el 4to año sección "B" y P_2 estuvo con el 4to sección "B"; nivel perteneciente a la Educación Media General, de acuerdo con la Ley Orgánica de Educación (2009). De igual modo, señalo que las clases siempre se realizaban con el grupo en aulas ya asignadas. Las clases se llevaron a cabo durante dos sesiones semanales, de dos horas cada una; siendo grabadas, cinco clases relativas a la funciones exponencial y logarítmica. En este sentido, P_1 desarrolló dos (2) clases con el contenido de la función exponencial y una (1) clase referente a la evaluación del contenido abordados, centrándose sólo, en la tarea: Representación Gráfica de la Función Exponencial. En la primera clase asistieron 26, en la segunda 28 y en la tercera 27 estudiantes. Por su parte, P_2 impartió dos clases de la función exponencial, en las que asistieron 26 y 27 estudiantes respectivamente, adicional, tres clases sobre la función logarítmica, haciendo énfasis en escribir expresiones de la forma logarítmica a la forma exponencial y viceversa; seguido, la representación gráfica y las propiedades logarítmicas. En estas sesiones de clases P_2 contó con la asistencia de 26, 28 y 25 estudiantes respectivamente.

A esta altura, debo referir que se hicieron registros mediante una grabadora de video (parcialmente) y una grabadora de audio, previo el consentimiento del directivo de las instituciones o campos de investigación. Naturalmente, se grabaron las primeras clases con video, y con audio, las clases restantes (1 clase de P_1 y 3 clases de P_2) fueron grabadas solo con audio; esto, dada la ausencia del recurso audiovisual. También, tomé algunas fotografías cuidando la identidad de los sujetos informantes, se realizó notas de campo y se solicitó a las docentes su planificación, seis (6) cuadernos y seis (6) evaluaciones de sus estudiantes.

Cabe señalar que las clases registradas fueron segmentadas en diversos episodios los cuales comprenden categorías específicas y descritas a continuación; categorías éstas que emergen de la TAD, propia de la presente investigación, a partir del lenguaje empleado por teóricos de la TAD; adaptándose en este sentido, a los objetivos propuestos inicialmente por este estudio:

1) Episodio: está referido a un segmento de la clase, el mismo es acompañado de un número.

2) Protagonista principal: es quien posee un papel predominante dentro de cada episodio. En el caso actual se cuenta con los sujetos profesor (P) y alumnos (A).

3) Momento Didáctico Dominante: categoría ésta, referida al momento o momentos presentes en cada uno de los episodios de la clase, los mismos, se denotan

MPE: Momento del primer encuentro, ME: Momento exploratorio, MTT: Momento tecnológico teórico, MTt: Momento del trabajo de la técnica, MI: Momento de la institucionalización y MEv: Momento de la evaluación

4) Tareas: referido a los tipos de tareas relativas al objeto matemático, realizadas por el profesor y por los estudiantes.

5) Técnica Matemática: consiste en la forma mediante la cual se aborda una determinada tarea problemática.

6) Elementos Tecnológicos-Teóricos: son aquellos elementos que justifican y permiten interpretar la técnica seleccionada como alternativa válida, emergiendo, con el fin de dar lugar a razonamientos lógicos y correctos, además de resultados obtenidos de las propiedades, axiomas, proposiciones y teoremas.

7) Grado de Completitud de una OM: referido al nivel de completitud de una determinada OM. El mismo se denota:

OMP: Organización Matemática Puntual

OML: Organización Matemática Local

OMR: Organización Matemática Regional

OMG: Organización Matemática Global

8) Indicadores de las clases: son estructuras verbales comprendidas en las transcripciones del discurso del profesor en conjunto a la participación de los estudiantes, presente en el proceso de estudio de la OM en torno a las funciones logarítmica y exponencial; subrayando, un momento didáctico o aspectos relevantes de la OM en referida.

9) Elementos de las Técnicas Didácticas: se corresponde con todos aquellos elementos, las actividades y características presentes en el proceso de estudio.

Adicionalmente, se reporta la información proveniente del análisis llevado a cabo, sobre el contenido de los cuadernos de los estudiantes y las evaluaciones realizadas por el profesor a estos estudiantes.

10) Categorización e Interpretación de la Información: se corresponde al momento en el cual se efectuó la triangulación de la información proveniente de la actividad matemática (OM) y la actividad didáctica (OD) observas, en ambas docentes (P_1 y P_2), en comparación el Modelo Epistemológico y la OMR del estudio actual.

CAPÍTULO IV

4. APROXIMACIÓN A UNA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DE REFERENCIA (OMR)

En este apartado, se presenta el trabajo documental cuyo propósito fue establecer una aproximación a una Organización Matemática de Referencia (OMR) en torno a las funciones logarítmica y exponencial, en correspondencia con lo planteado en el objetivo número uno de la investigación. Para ello, se realizaron las siguientes actividades:1) una revisión histórica del desarrollo de estas nociones matemáticas, procurando identificar, en los diversos períodos considerados, elementos praxeológicos desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD); 2) una descripción general de la manera cómo el logaritmo y la función exponencial fueron emergiendo y adquiriendo status de conocimiento matemático; 3) análisis de contenido de los textos de matemática de nivel medio y nivel superior donde estas nociones son tratadas con fines instruccionales, con el propósito de aproximarnos a la Organización Matemática (OM) presente en cada tipo de textos; 4) Integración de los resultados precedentes en una OMR, con alcance condicionado por el nivel educativo hacia el cual este estudio pretende contribuir. La referida OM, sirve para analizar la actividad matemática y la actividad didáctica del profesor de matemática del nivel de Educación Media, en torno a las funciones logarítmica y exponencial.

4.1 Revisión Histórica de las Funciones Logarítmica y Exponencial

Esta dimensión comprende un análisis histórico y epistemológico realizado a la evolución de las funciones logarítmica y exponencial desde la época de la **baja Mesopotamia**, con la civilización de los sumerios 5700 a.C. donde se comienza a desarrollar la aritmética basada en la necesidad agrícola; el **periodo helénico** donde la cultura egipcia aporta sus conocimientos a través de los rollos de papiro; siendo los más importantes el Papiro Rhind (el más importante y data de la época de siglo XVII a.C.) y el papiro Golenischev. (Babini y Pastor, 2000; Orellana, 1996).

Por su parte, en los textos babilónicos comprenden, entre otros problemas, problemas de interés aritmético o algebraico derivados de la suma de términos en progresión aritmética o geométrica de base 2, una ecuación exponencial resuelta en forma aproximada a través del problema de interés compuesto. Un problema trascendente que requiere la solución de la ecuación exponencial $1{,}2^x = 2$. De ahí que "los babilonios fueron de los más infatigables compiladores de las tablas aritméticas que registra la historia" (Babini y Pastor, 2000; p. 40).

Por otro lado, durante el **Periodo Helénico** Arquímedes de Siracusa al comparar las sucesiones aritméticas con las geométricas, da lugar a la invención de los logaritmos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512

Es decir, a los números de la primera sucesión (aritmética) se les llama logaritmos; mientras que a los de la segunda sucesión (parte inferior de la tabla/geométrica) se les llama antilogaritmo. Además, Arquímedes (287 a 212 a.C.) es el primero en prestar atención a las propiedades de los números, y reflejar en su libro Arenaire, la clásica relación "si se consideran números y a de rango m y n respectivamente, se constata que a ocupa el rango m+n". Asimismo, enfrenta problemas como la determinación del área de una vuelta de espiral o la cuadratura de la parábola a través del método de exahusión. (Bell, 1985; Tapia, 2003)

En la Baja Edad Media durante el **siglo XIII**, la descripción del movimiento comienza a hacerse en términos de tiempo-espacio. Así, tanto la teoría de la intensidad de las formas como la cinemática, empiezan a desarrollarse en Inglaterra dando prioridad a la cinemática-aritmética, y en Francia con Oresme, una remarcada tendencia hacia la geometría. Ya para el siglo XIV, se otorga mayor atención a la formulación matemática y cuantitativa de las leyes del movimiento. (Ferrari, 2001) En este sentido, retoma ideas sobre las causas del movimiento considerando:

> La velocidad crece aritméticamente en tanto que la razón fuerza/ resistencia lo hace geométricamente. Establece así que, si U_o es la velocidad correspondiente a una razón particular r de la fuerza de resistencia, entonces la razón de r_2 necesariamente producirá una velocidad de $2U_o$ y razones de r_3, r_4, r_5, producirán velocidades de $3U_o$, $4U_o$, $5U_o$ respectivamente (p. 77)

Es importante resaltar que el razonamiento precedente, establece una relación funcional de tipo logarítmica entre la velocidad y la fuerza. Ob. Cit. Mientras que el **siglo XIV** aparece en Francia una aritmética, sobre los números de la forma 2^m y 3^n, demostrando con algunas excepciones, su diferencia es siempre mayor que uno. (Babini y Pastor, 2000)

Por su parte, en el **Renacimiento: Siglo XVI,** como importantes innovaciones aritméticas del siglo son considerados los logaritmos, se señalando al respecto, su invención como herramienta con el propósito de simplificar los cálculos aritméticos; sobre todo, en las engorrosas multiplicaciones, divisiones y raíces de números de muchas cifras con las que tropezaban, especialmente, los astrónomos. El concepto, aunque no el nombre de logaritmos, como operación inversa de la potenciación y como correspondencia entre los términos de una progresión aritmética y geométrica, aparece en la aritmética integrada del alemán y geómetra Michael Stifel (1487-1567), en 1544, la cual debía comprender todo lo entendido en esa época como aritmética: teoría de números, proporciones y algebra. En este tratado, también, se considera una progresión aritmética y geométrica. Aunado, se encuentra, en especial, la regla de la multiplicación: $a^n . a^m = a^{n+m}$, para todo número racional *n, m*. adicionalmente, da la primera tabla de logaritmos existente, aunque en forma rudimentaria. (Babini y Pastor, 2000; Ferrari, 2001; Tapia, 2003).

Entre **final del siglo XVI e inicios del siglo XVII,** Napier comienza a trabajar en sus logaritmos (1594), dados a conocer veinte años después en 1614 al publicar su manuscrito Mirifici logarithmorum Canonis descriptio el cual trata exclusivamente de logaritmos y se divide en cinco capítulos. El primero, titulado Of the definitions, muestra los conceptos fundamentales de su trabajo; el segundo, Of the propositions of logarithmes, trabaja con proporciones modificadas por los logaritmos, derivando algunas propiedades; el tercer capítulo, Containing the descripcition of the table of logarithmes and of the seven columns there of, en el que describe las tablas; el cuarto, se titula On the use of the table and of the numbers thereof; mientras que el quinto, Of the most ample use of the logarithmes, and ready practise by them, enseña el cálculo de logaritmos de números que figuran o no en ella. Esto es realizado de forma puntual, empleando un lenguaje claro y en cincuenta y siete (57) páginas. Al final del manuscrito señalado, aparece la tabulación de sus logaritmos en siete columnas, de la siguiente forma:

23 +1-

	Senos	Logaritmos	Diferencias	Logaritmos	Senos	
0	3907311	9397354	8569026	828328	9205049	60
1	3909989	9390504	8560941	829583	9203912	59
…						
30	3987491	9207616	8328403	865823	9170601	30

(Babini y Pastor, 2000; Ferrari, 2001)

Naturalmente, en el **Periodo o siglo XVII,** los logaritmos nacen por obra del escocés Napier y el suizo Bürgi, quienes publican sus tablas a comienzos del siglo XVII con pocos años de diferencia: el tratado de Napier de 1614, las Progress-Tabulan de Bügi de 1620. Por otro lado, John Napier con su libro de 1614 introduce los logaritmos mediante una concepción de cinemática, con ello, admite la propiedad de la función logarítmica de ser una función, hecho no advertido cuando los logaritmos se conciben como términos de una sucesión discreta (progresión aritmética). Para construir sus logaritmos, Napier acude a ambas progresiones. (Babini y Pastor, 2000)

Sin duda, se atribuye a Napier la invención del nombre de “logaritmo”, del griego “logos” que significa razón y “arithmos” que significa número; es decir, número de razones, dado que en caso de ser el logaritmo un número entero, es el número de factores que se toma la razón dada (base) para obtener el antilogaritmo. Pero, la muerte de Napier se produce antes de que Descartes introdujera la notación $n, nn, n^3, \ldots$ para las potencias; situación que le costó no menos de veinte (20) años tanto a las propiedades como la existencia de los logaritmos (Bell, 1985; Babini y Pastor, 2000; Tapia, 2003). Mientras que a Henrry Briggs (1561-1630) se le debe la difusión y perfeccionamiento de los logaritmos de Napier. (Babini y Pastor, 2000; Tapia, 2003). En efecto, los logaritmos decimales actuales surgen de una entrevista entre Napier y Briggs; encuentro que permitió a Tapia (2003), referir que de la visita de Briggs a Napier en Edimburgo, y posterior de una discusión, el siguiente planteamiento derivado de su conclusión:

> El logaritmo de 1 debía ser igual a 0, mientras que el logaritmo de 10 debía ser igual a 1. Así nacen los logaritmos de "base vulgar" o *logaritmos de Briggs*. La tarea de construir la primera tabla de logaritmos en base 10 fue asumida por Briggs, puesto que Napier no poseía ya fuerzas para emprender un trabajo de esa envergadura. (p. 11)

En 1624 aparecen las tablas de los “logaritmos de Briggs” con catorce, de los números de 1 a 2.10^4 y de 9.10^4, donde aparecen el término “característica”, mientras que la palabra “mantisa”, se utiliza por primera vez por Wallis en 1693 Mientras que William Oughtred (año no referido), establece las propiedades

a) $\log m.n = \log m + \log n$

b) $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$

c) $\log x^n = n \log x$. ob. cit.

En otro orden de ideas, se puntualiza que Jobst Bügi (1552-1632) conocía a los logaritmos antes que Napier, incluso, se reporta que concibe la idea de logaritmo hacia el año 1586, impulsado por las observaciones, antes señaladas de Stifel y el libro de cálculo de Simón Jacob de 1565, pero por falta de material y de tiempo no lo pudo dar a conocer. Situación reprochada por el astrónomo Kleper, quien argumenta que les dejo en el desamparo en lugar de educarles y publicarles; esto, en relación a que éste era el guardián de los secretos de Bügi. (Babini y Pastor, 2000; Tapia, 2003)

Ahora bien, en el seno del **Periodo Medio: siglo XVII** se gesta el cálculo, mientras que los logaritmos y exponenciales adquieren relevancia al admitir interpretaciones geométricas y desarrollo en series infinitas; además, se les identifica como relaciones entre números, y por ende, como funciones. (Ferrari, 2001). Se refieren, entre otros aportes relevantes, a la suma de la serie geométrica convergente, en una obra del Jesuita belge Gregorius Saint Vicente, en ella, pretende demostrar la cuadratura del círculo. Asimismo, "insinúa una noción de límite y vislumbra la relación entre los logaritmos y la cuadratura de la hipérbola" (p. 69). Es importante destacar que las series fueron introducidas progresivamente, en el análisis por John Wallis, además, establece la serie logarítmica y, con ella, de la cuadratura del sector de la hipérbola equilátera.

En este contexto, Nicolaus Mercator Kaufmann, en su Logarithmotecnihnia de 1668 da la ecuación de la hipérbola equilátera en la forma $y = 1/(1 + x)$ la cual podía desarrollarse en series de potencias y aplicarle la regla de Wallis. Tal situación, en conjunto a la observación señalada por Saint Vicente, que a abscisas en progresión geométrica correspondían sectores de hipérbola equilátera de área en progresión aritmética, resultando así la serie logarítmica de la cual, además, se ocuparon Wallis, Brouncker, Gregory y Pietro Mengoli (ob. cit.).

En particular, hacia el **último tercio del siglo XVII**, se produce un cambio cualitativo en los métodos infinitesimales afanados con tres (3) técnicas: encontrar tangentes a las curvas, calcular áreas y volúmenes, así como los algoritmos infinitos.

Con Isaac Newton (inglés, 1642-1716) nace el análisis infinitesimal como rama autónoma de la matemática. Entre sus obras matemáticas, figura la obtención de diversas series de funciones, entre ellas: exponencial, función logaritmo y funciones trigonométricas. También, series por división y aplica, por primera vez, el método de inversión para obtener nuevas series. De tal manera, nace la serie exponencial de la logarítmica. (Babini y Pastor, 2000; Orellana, 1996). Por su parte, Leibniz presenta, entre otros aportes, el término "trascendente" para las ecuaciones en las que la incógnita figura en el exponente, de igual modo, la diferenciación de funciones de la forma U^v mediante logaritmos; tal como se realiza actualmente. (Babini y Pastor, 2000). Finalmente, el **siglo XVIII: Siglo de la razón** en el cual Leonard Euler presenta la función exponencial, con su base **e** y como función inversa de la función logarítmica (Méndez, 2007).

4.1.1 Organización Matemática (OM) de la Revisión Histórica de las Funciones Logarítmica y Exponencial

A continuación se muestran algunos elementos de la praxeología matemática (tareas, técnicas y tecnología-teoría) en torno a las funciones logarítmica y exponencial, presentes en cada período histórico precedente. Asimismo, en procura de enriquecer el contenido y estructura a conformar la OMR del actual capítulo, recabar aspectos, propios del conocimiento matemático, que dieron lugar a su aparición en la comunidad científica que le valido como saber matemático, donde aceptan, acogen y desarrollan (Arquímedes, Napier, Briggs, Burgui, Stifell, Euler, Newton, Leibniz, entre otros.); esto, a fin de someterles a métodos y formulaciones, y cuyos diversos hallazgos, permiten que ambos objetos lleguen hasta la actualidad con status relevante dentro de la estructura del conocimiento matemático.

Cuadro 3: OM del Desarrollo Histórico y Epistemológico de las Funciones Logarítmica y Exponencial.

Época /Periodo	**Época/ Siglo**	**OM** / **Civilización**	**Tipos de Tareas y/o Tipos de Problemas Matemáticos**	**Técnicas Matemáticas**	**Tecnología-Teoría**
Periodo Helénico	III a.c. (287 a 212 a.c.)	Arquímedes	¿Qué tipo de relación existe entre las sucesiones aritméticas y geométricas? T: Definir inicialmente logaritmos.	Mediante la comparación de sucesiones aritméticas y geométricas	Regla de Arquímedes
Renacimiento	XVI		¿Cómo facilitar los cálculos para abordar los problemas de tipo astronómicos? Logaritmo como noción emergente T: Concepto de logaritmo.	A partir de la relación entre términos de una progresión aritmética y geométrica.	Definición de logaritmo y propiedades $\log m.n = \log m + \log n$ $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$ $\log x^n = n \log x$.
Fines del XVI e inicio del XVII		Napier	T: Construir tablas de logaritmos con senos.	Progresiones aritméticas y geométricas.	Progresiones aritmética y geométrica.
	XVII	Inicio	T: Introducir logaritmos naturales.	Mediante concepción de cinemática.	Concepto geométrico-mecánico del movimiento y las relaciones las progresiones.
		Mitad	¿Cómo desarrollar la serie logarítmica en acuerdo con la cuadratura de la hipérbola equilátera? Logaritmo como integral	A abscisas en progresión geométrica corresponden sectores de la hipérbola equilátera de área en progresión aritmética	Regla de Walis: Serie logarítmica y la cuadratura de la hipérbola equilátera.
	XVIII	Euler	T: Definir a los logaritmos como exponentes.	Relación entre función exponencial y función logaritmo.	Relación entre la función exponencial $ax = b$ y su inversa $x = \log_a b$; con números imaginarios y funciones circulares.

Diseño: Acuña (2015)

4.1.2 Interpretación de los Elementos Históricos desde la TAD

El análisis histórico llevado a cabo sobre las funciones logarítmica y exponencial, puede contribuir a mejorar el diseño de procesos de estudio, el permitir identificar; al menos, la complejidad y diversidad de los caminos de los cuales emergen; caminos éstos, vinculados con las prácticas sociales tales como aquellas referidas en las principales épocas del devenir histórico. Inicialmente, en el siglo III a.C., en el ámbito de la cultura griega se realizaron actividades a través de la comparación entre las sucesiones aritméticas y geométricas sustentadas en la regla de Arquímedes. Después, en el renacimiento/siglo XVI, en un ámbito analítico, surge el problema de facilitar engorrosos y extensos cálculos a los que se enfrentaban, entre otros, los astrónomos a partir de la relación entre las progresiones aritméticas y geométricas, dando lugar así al logaritmo como noción emergente. En cambio, para el periodo medio del siglo XVII, y durante la gestación del cálculo, tanto los logaritmos como las exponenciales admiten interpretaciones geométricas y analíticas; a partir de las cuales se desprende el problema relativo al cómo desarrollar la serie logarítmica en relación a la cuadratura de la hipérbola equilátera, mediante la correspondencia entre términos de una progresión geométrica y sectores de la curva de área en progresión aritmética. Situación ésta, que da lugar a la noción de logaritmo como integral.

La interpretación precedente, permitió evidenciar que, en definitiva, en el desarrollo histórico se encuentran hechos que muestran notablemente, la presencia de los elementos praxeológicos de la TAD: problemas, técnicas, tecnología-teoría. Asimismo, estos elementos que al principio emergen como intentos de respuestas a ciertas cuestiones, otras continúan reorganizándose cada vez con mayor grado de complejidad a través de procesos en los que emergen nuevos problemas, perfeccionamiento de técnicas y explicaciones lógicas siempre más coherentes. No parece ser una exageración afirmar que a lo largo del desarrollo la noción logaritmo, evoluciona mediante encuentros y recuentros con problemas que dan lugar a la necesidad de búsqueda de una manera (técnica) de abordarlos, al mismo tiempo, de constituir un marco racional (discurso lógico) para ellos.

En síntesis, las funciones logarítmica y exponencial han venido emergiendo mediante la evolución de situaciones problemáticas como alternancia entre una noción y otra; así como también, alternancia y complementariedad entre los ámbitos matemáticos en los que surgen o se desarrollan en sus dos dimensiones sinérgicas: la realidad concreta matemática obtenida (OM) y el proceso dinámico que la hace posible (OD).

4.2 Acercamiento a una Organización Matemática (OM) presente en los Libros de Texto de Estudio

En este apartado, se presenta el análisis de contenido llevado a cabo a cuatro (4) los textos de matemática de la educación venezolana: dos (2) del nivel de Educación Media General y dos (2) del nivel de educación superior que a continuación son señalados:

Cuadro 4: Textos analizados, estructura de las Funciones Logarítmica y Exponencial.

Texto	Título y Año	Nivel
Ely Brett y Wiliam Suarez	Actividades de Matemática I Cs, C.D. (2008)	I Cs, ciclo diversificado (4to año)
Santillana	Matemática1 Santillana. (2009)	1º Educación Media
Louis Leitholod	El Cálculo. (1998) y reimpreso en México en el año 2007	Superior
Roland E. Larson y Robert P. Hostetler	Cálculo y Geometría Analítica. (1997). 6ed.	Superior

Diseño: Acuña (2015)

4.2.1 Revisión de textos del nivel de Educación Media General

Es importante destacar que en ambos textos, tanto la función exponencial como la función logarítmica son caracterizadas a partir de la definición y las gráficas correspondientes. Se inicia con tareas relativas a la definición y sus significados formales, grafica de casos particulares y se enuncian propiedades en forma general; para luego, pasar a tareas específicas en las que las técnicas se derivan de las propiedades. De esta forma, el lector se encuentra desde el comienzo con la tecnología y teoría; de tal forma que, en el primer encuentro convergen tres momentos didácticos; esto es, momento del primer encuentro (MPE), momento tecnológico-teórico (MTT) y momento de la institucionalización (MI). Tal situación, significa que el lector no tiene oportunidad alguna de explorar y construir las técnicas o propiedades.

En cuanto a la relación entre la función exponencial y la función logarítmica, se inicia con la función exponencial a partir de una OM previa: potenciación, y usando, la noción de función inversa se intenta introducir el logaritmo; y seguidamente, la noción de función logarítmica. Cabe destacar a continuación, algunas tareas generales evidenciadas en los textos analizados en este nivel medio:

Cuadro 5: OM de las Funciones Logarítmica y Exponencial presente en los textos del nivel de Educación Media General.

Tipos de Tareas y/o Tipos de Problemas Matemáticos	Técnicas Matemáticas	Tecnología-Teoría
T1:Representación gráfica de la función exponencial de base a	t_1: Construcción de tabla de valores y Grafico de la función exponencial.	Θ_1:Grafico de la función exponencial.
T2:Representación gráfica de la función exponencial de base a	t_2: construir tabla de valores y Grafico de la función logaritmo.	Θ_2: Propiedades de la función logarítmica, Grafico de la función logarítmica.
T3: Calcular logaritmo de base a.	$t_{3:}$ equivalencia entre expresiones logarítmicas y exponencial.	Θ_3: Concepto de logaritmo, logaritmos decimales, antilogaritmos.

Diseño: Acuña (2015)

Cuadro 6: OM de las Funciones Logarítmica y Exponencial presente en los textos del nivel de Educación Media General.

Tipos de Tareas y/o Tipos de Problemas Matemáticos	Técnicas Matemáticas	Tecnología-Teoría
T4: Aplicar propiedades logarítmicas.	t_4: Desarrollo de logaritmos	Θ_5: Propiedades de los logaritmos
T5: Resolver ecuaciones exponenciales.	t_5: Transformación a ecuaciones lineales y aplicación de logaritmos	Θ_6: Propiedad: $a^r = a^s$ entonces r=s y propiedades de los logaritmos.
T6: Resolver ecuaciones logarítmicas.	t_6: Desarrollo de logaritmos y equivalencias logarítmicas	Θ_6: Propiedades de los logaritmos, Definición de logaritmos, equivalencias: ($\log A = \log B$, entonces A=B y $\log_a x = M$, entonces $x = a^M$).
T7: Modelizar situaciones de la vida real a partir de la funciones logaritmo y exponencial.	t_7: fórmula del interés compuesto, crecimiento exponencial.	Θ_7: interés compuesto, funciones logaritmo y exponencial, definición de volumen de un sonido, entre otros no señalados.

Diseño: Acuña (2015)

4.2.2 Revisión de los textos del nivel de Educación Superior

En ambos textos, tanto la función exponencial como la función logarítmica son caracterizadas partiendo de la definición y las gráficas correspondientes. Se inicia con un problema de los exponentes irracionales, posteriormente, se interpreta la gráfica del área de la hipérbola equilátera, para así definir la función logaritmo natural a través de $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$; $x > 0$. De igual modo, con un problema relativo a los "Plásticos y Enfriamiento" y el segundo teorema fundamental del cálculo se define la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuya primitiva es la función logarítmica. Adicional, se refieren las gráficas de casos particulares, demostración y enunciación de propiedades en forma general; para luego, pasar a tareas específicas en las que las técnicas se derivan tanto de la definición y propiedades como del cálculo diferencial e integral. El lector se encuentra desde el comienzo con la tecnología y teoría; de tal forma que, en el primer encuentro convergen tres momentos didácticos; esto es, momento del primer encuentro (MPE), momento tecnológico-teórico (MTT) y momento de la institucionalización (MI). Tal situación, significa que el lector no tiene oportunidad alguna de explorar y construir las técnicas o propiedades.

En cuanto a la relación entre la función exponencial y la función logarítmica, se comienza la función logarítmica natural a partir de las OM previas: límites, derivadas e integrales, y mediante, la noción de función inversa se intenta introducir la noción de función exponencial de base **e**. Cabe destacar a continuación, algunas tareas generales y OM evidenciada en los textos analizados en este nivel superior:

Cuadro 7: OM de las Funciones Logarítmica y Exponencial presente en los textos del nivel de Educación Superior.

<table>
<tr><th>Tipos de Tareas y/o Tipos de Problemas Matemáticos</th><th>Técnicas Matemáticas</th><th>Tecnología-Teoría</th></tr>
<tr><td>T1: Definir función logaritmo (natural y de base a)</td><td rowspan="4">Basadas en el cálculo diferencial e integral.</td><td rowspan="4">Basadas en el cálculo diferencial e integral.
(Ver anexo A)</td></tr>
<tr><td>T2: Representación gráfica de la función logarítmica (natural y de base a)</td></tr>
<tr><td>T3: Definir función exponencial (natural y de base a)</td></tr>
<tr><td>T4: Representación gráfica de la función exponencial (natural y de base a)</td></tr>
</table>

Diseño: Acuña (2015)

4.3 Referente de Carácter Epistemológico para el Estudio

De acuerdo al modelo teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la Investigación en didáctica de las matemáticas, exige la explicitación de una interpretación epistemológica para el estudio de un problema didáctico. Interpretación ésta, que se concreta en el Modelo Epistemológico de Referencia (MER); en el cual se describe en qué consiste y como emerge el objeto matemático correspondiente. En especial, y para efecto de este estudio, nos limitaremos a una breve descripción; algo general, que hemos denominado Referente de carácter epistemológico (RCE), y que hemos basado tanto en la revisión histórica como en el análisis de los textos ya referido. En él (RCE) se explicitará, someramente, la asunción de como emergen el logaritmo y la exponencial así como los rasgos de la Organización Matemática de Referencia (OMR) y la Organización Didáctica (OD) correspondiente.

Históricamente, la Función Logarítmica surge en el ámbito de la cultura griega a través de la comparación entre las sucesiones aritméticas y geométricas sustentadas en la regla de Arquímedes y, de forma simultánea, en el tipo de problema, que posiblemente se planteó como punto de partida ¿Qué tipo de relación existe entre las sucesiones aritméticas y geométricas? El problema señalado, podría considerarse como descriptor, aproximativo, de las características sociales y culturales de ciertas actividades humanas, llevadas a cabo en la evolución de la noción del logaritmo. Posteriormente, evoluciona en un ámbito analítico, emergiendo del problema de facilitar engorrosos y extensos cálculos a los que se enfrentaban, entre otros, los astrónomos a partir de la relación entre las progresiones aritméticas y geométricas, dando lugar así al logaritmo como noción emergente.

En cambio, para el periodo medio del siglo XVII, y durante la gestación del cálculo, tanto los logaritmos como las exponenciales admiten interpretaciones geométricas y analíticas; de donde se desprende el problema relativo al cómo desarrollar la serie logarítmica en relación a la cuadratura de la hipérbola equilátera, mediante la correspondencia entre términos de una progresión geométrica y sectores de la curva de área en progresión aritmética. Situación ésta, que da lugar a la noción de logaritmo como integral. Finalmente, en el siglo XVIII Leonard Euler presenta la función exponencial, con su base **e** y como función inversa de la función logarítmica con la misma base **e**.

En relación al desarrollo precedente, se vislumbra algunas implicaciones relevantes tales como la comparación entre los términos de las progresiones o sucesiones aritmética y geométrica que implican, fundamentalmente, logaritmos. Es preciso señalar que la primera sucesión es llamada logaritmos, y la segunda, antilogaritmos. En consecuencia, se evidencian indicios de una relación funcional de tipo logarítmica. En tal situación se elabora como técnicas una relación que involucra efectuar operaciones básicas; técnicas éstas, que se va perfeccionando en acuerdo a las realidades social y cultural de cada civilización y sus distintas actividades. Tal es el caso de los logaritmos como herramienta para facilitar engorrosos y extensos cálculos a los que se enfrentaban los astrónomos a partir de la relación entre las progresiones ya mencionadas; hasta el empleo de técnicas más elaboradas y de mayor alcance como la cuadratura de la hipérbola equilátera, mediante la correspondencia entre términos de una progresión geométrica y sectores de la curva de área en progresión aritmética (logaritmo natural como integral). Asimismo, la noción de función exponencial de base **e** como inversa de la función logaritmo natural.

Lo anteriormente señalado, permite identificar lo que podríamos subrayar como dimensiones que condicionan la actividad matemática, a saber:

a) El *contexto* en el cual emergen el logaritmo y la función exponencial. Aquí es posible identificar, de acuerdo a los hechos históricos dos contextos: uno socio-cultural y otro matemático, en los que a su vez muestra una alternancia no secuencial de ámbitos de carácter *aritmético, analítico y geométrico*. Claro está, los contextos señalados no son independientes uno de otro.

b) La *manera como emergen* el logaritmo y la función exponencial: Emergen como respuesta a problemas intra o extramatemáticos, es decir, como respuesta a cuestiones que representan su razón de ser o, más precisamente, como se planteó en líneas precedentes, "estos objetos matemáticos que al principio emergen como intentos de respuestas a ciertas cuestiones, continúan reorganizándose cada vez con mayor grado de complejidad a través de procesos en los que se originan nuevos problemas, perfeccionamiento de técnicas y explicaciones lógicas siempre más coherentes".

c) *Evolución* del logaritmo y de la función exponencial: Igualmente, en relación a lo señalado en el apartado 4-2-1) se puntualiza, que no parece ser una exageración afirmar que a lo largo del desarrollo la noción logaritmo, éste evoluciona mediante encuentros y recuentros con problemas que dan lugar a la necesidad de búsqueda de una manera (técnica) de abordarlos, al mismo tiempo, de constituir un marco racional (discurso lógico) para ellos".

En síntesis, las funciones logarítmica y exponencial han venido emergiendo mediante la evolución de situaciones problemáticas como alternancia entre una noción y otra; así como también, alternancia y complementariedad entre los ámbitos matemáticos en los que surgen o se desarrollan en sus dos dimensiones sinérgicas: la realidad concreta matemática obtenida (OM) y el proceso dinámico que la hace posible (OD). Por otra parte, los aspectos intrínsecos del desarrollo histórico anterior, se encuentra presentes en la Organización Matemática de Referencia (OMR) construida para la actual investigación: OM y OD, referente a las Funciones Logarítmica y Exponencial en el nivel de Educación Media. En este sentido, se refieren algunas características sociales y culturales de carácter históricas, que fortalecen la OMR señalada:

Los logaritmos emergen de la relación que deriva de la comparación entre los términos de una progresión aritmética y geométrica, sí como del problema de facilitar engorrosos y extensos cálculos a los que se enfrentaban, entre otros, los astrónomos;

mientras que la noción de función exponencial de base **e**, surge como inversa de la función logaritmo natural. En definitiva, los objetos matemáticos surgen como respuesta a problemas intra o extra-matemáticos; en otras palabras, como respuestas a problemas o cuestiones que representan su razón de ser. Evolucionando así, en ámbitos matemáticos diferentes sin una secuencia fija: aritmético, geométrico, analítico.

Estos rasgos de la actividad matemática señalados por la historia han de ser, a efecto de este estudio, condicionantes o, de otra manera, deben impregnar todos los elementos y relaciones de la TAD, entre ellos la Organización Matemática de Referencia (OMR) y la Organización Didáctica (OD) correspondiente. Esto, nos permite explicitar algunos rasgos esenciales tanto de la OMR como de la OD correspondiente

Rasgos de la OMR:

1) Una OMR es un producto de una sucesión de OM que surgen como respuestas a la razón de ser de la Función Logarítmica y la Función Exponencial, cuyo proceso global de estudio se encuentra en el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) del cálculo.
2) La razón de ser de la OMR: Se asume como razón de ser de la Función Logarítmica la siguiente cuestión: ¿Cómo plantear, describir, resolver e interpretar problemas, intra o extra-matemáticos, asociados a la comparación entre los términos de una progresión aritmética y una progresión geométrica?
   En el marco de esta interrogante planteamos la siguiente situación:

<u>Problema 1</u>: Conocidos los términos cualquiera, de una progresión aritmética y otra progresión geométrica:

I) ¿Qué relación existe entre los términos de ambas progresiones?

II) II) ¿Qué implicaciones matemática tiene esta relación?

III) ¿Qué modelo matemático facilita la representación de la relación propuesta en I?

Problema 2:

I) Dado un número real “a” llamado base (**a)** y otro “**x”** llamado exponente: ¿Cuál es el resultado de calcular a^x? ¿Cuáles son las características de esa operación?

II) Dado los números reales no nulos **y** y **a** ¿Cuál es el exponente al cual hay que elevar la base **a para obtener y**?

III) ¿Qué relación existe entre los problemas I y II?

3) Se involucran tareas que emergen de problemas socio-culturales, tales como T8: Modelizar situaciones de vida real a partir de la función logarítmica y exponencial y T13: Construir situaciones problemas que puedan ser modelizadas a través de las funciones logarítmicas y exponencial.
4) Aproximación al concepto de logaritmo, en la relación entre las series aritméticas y geométricas. Adicional, a la noción de función inversa y correspondencia con la noción y forma de la función exponencial.
5) Énfasis en el cuestionamiento tecnológico; o bien, justificación e interpretación de las técnicas, así como extensión de esas técnicas.
6) Presencia de tareas y técnicas inversas; así como tareas en las cuales se interpretan los resultados obtenidos.

En cuanto a los *rasgos de la OD correspondiente a la OMR*:

7) Se abordan problemas que propician el encuentro de los estudiantes con algún tipo de tarea relativa a la noción de logaritmo y/o de la exponencial.
8) Los estudiantes realizan actividades exploratorias, ensayan y elaboran técnicas que luego intentan justificar y validar.
9) Se desarrolan actividades de cuestionamiento tecnológico.

10) El profesor se desempeña como un miembro de la comunidad de estudio con el rango de director del proceso de estudio.
11) Los tipos de problemas de los que surge la Función Logarítmica responden, históricamente, a las características sociales y culturales de ciertas actividades humanas, llevadas a cabo en relación a la evolución de la noción logaritmo.
12) La Función Logarítmica y la Función Exponencial, al interpretarse desde la TAD, son explicitadas como praxeologias matemáticas.
13) Las praxeologías matemáticas u OM: Función Logarítmica y Función Exponencial, están estrechamente ligadas a los tipo de tareas: realizar grafica de la función logarítmica y realizar grafica de la función exponencial (natural y de base a), aplicar las propiedades logarítmicas; tarea ésta, que involucra una tarea inversa de la otra. Cabe destacar que los restantes constituyen tareas específicas.

A partir de este punto, se puntualiza que la OMR, considerada en esta investigación como el resultado matemático de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER); se precisa para estudiar el saber matemático antes referido, durante y después de ser enseñado. De tal manera, es posible dar cuenta no solo de la forma en que se interpretan las funciones logarítmicas y exponencial dentro del sistema de enseñanza, sino también, del porqué es posible encontrar en dicho sistema unos aspectos y no otros de tales funciones (Gascón, 2011). Naturalmente, en acuerdo al principio de codeterminación mutua entre lo matemático (OM) y lo didáctico (OD) que da lugar a la noción del fenómeno didáctico que refiere como dimensión esencial a la actividad matemática institucional. (Bosch; Chevallard y Gascón, 1997).

A continuación, se muestra tres (3) cuadros síntesis de la Organización Matemática de Referencia (OMR) en torno a la función logarítmica y la función exponencial:

Cuadro 8: Organización Matemática de Referencia (OMR)

PRAXIS (Bloque Práctico)

Tipos de Tareas y/o Tipos de Problemas Matemáticos	Técnicas Matemáticas
<u>**Problema Generador o Razón de ser de la OMR**</u> Problemas 1 y 2, descritos en el numeral 2 de los rasgos de la OMR, antes descritos. <u>La respuesta al problema planteado, se corresponde con los **Tipos de Tareas** siguientes:</u> T1: Realizar operaciones con potencias en R. T2: Representación gráfica de la función logarítmica (natural y de base a). T3: Representación gráfica de la función exponencial (natural y de base a). T4: Relacionar la función exponencial con la función logarítmica. T5: Aplicar las propiedades logarítmicas. T6: Resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales. T7: Realizar cálculos a través de los logaritmos y las exponenciales. T8: Modelizar situaciones de la vida real a partir de la función logarítmica y exponencial. T9: Interpretar resultados al emplear la función logarítmica y exponencial T10: Justificar técnicas de la función logarítmica y exponencial. T11: Describir tareas y técnicas inversas de las funciones logarítmica y exponencial. T12: Plantear problemas que permitan extender el empleo de las técnicas de las funciones logarítmicas y exponencial. T13: Construir situaciones problemas que puedan ser modelizadas a través de las funciones logarítmicas y exponencial	**A) Técnicas relativas al cálculo de potencias** 1) Técnica basada en el desarrollo de potencias 2) Técnica basada en el desarrollo de operaciones básicas en R. **B)Técnicas relativas a la representación y/o estudio de la gráfica de funciones exponencial y logarítmica** 1) Técnica basada en la aplicación de la definición de la función exponencial 2) Construcción de tabla de valores 3) Análisis e interpretación una expresión de la forma exponencial 4) Equivalencia entre expresiones de la forma logarítmica y la forma exponencial 5) Análisis gráfico. 6) Progresiones aritméticas y geométricas **C)Técnicas relativas a la aplicación de las propiedades logarítmicas** 1) Técnica basada en el desarrollo de logaritmo a través de propiedades. **D)Técnicas relativas a la resolución de ecuaciones logarítmicas y exponencial** 1) Técnica basada en la transformación a ecuaciones lineales. 2) Técnica basada en la aplicación de logaritmos. **E)Técnicas relativas al cálculo con logaritmos y las exponenciales** 1) Técnica basada en el desarrollo de potencias 2) Técnica basada en la equivalencia entre expresiones de la forma logarítmica y la forma exponencial 3) Técnica basada en el desarrollo de logaritmo a través de propiedades logarítmicas. 4) Técnica basada en el cálculo de logaritmos y antilogaritmos a través del uso de la calculadora.

Diseño: Acuña (2015)

Cuadro 9: Organización Matemática de Referencia (OMR)

LOGOS (Bloque Tecnológico-Teórico)

Tecnología	Teoría
-<u>Definición de función logarítmica:</u> Dado la función $y = \log_a x$ definida y: R*→R, donde a>o y a≠1; es biyectiva. Donde y es el exponente al cual hay elevar la base **a** para obtener **x**. Es decir, Para a>o y a≠1 el logaritmo de la base **a** de un número **x>o** es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número: **logax= y es equivalente a** $\boldsymbol{x = a^y}$ **(**p.47) -<u>Propiedades de la función logarítmica:</u> Su **dominio** está formado por el conjunto de todos los números reales positivos. Domf= (0,+∞) Su **rango** por el conjunto de todos los números reales. Rgf= (-∞,+∞)=R. Si la base es a>0, la función logarítmica $y = \log_a x$ es una **función creciente**. Si la base es 1<a>0, la función logarítmica $y = \log_a x$ es una **función decreciente**. La representación de la curva, que se obtiene en el plano cartesiano, muestra una grafica que pasa por el punto (1,0), indicando que el logaritmo de la unidad en cualquier base es cero. $\text{Log}_a 1=0$ La representación de la curva, que se obtiene en el plano cartesiano, muestra una grafica pasa por el punto (a,1), lo que significa que el logaritmo de la base es igual a la unidad. $\text{Log}_a\, a=1$ Dado que la función es positiva en el intervalo (1,+∞) del dominio, significa que los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo. Dado que la función es negativa en el intervalo (0,1) del dominio, significa que los números menores que 1 tienen logaritmo negativo. El $\text{Log}_a\, x$ no está definido si "x" es negativo o cero (0). La función es **inyectiva**, puesto que cualquier recta horizontal que se trace sobre la grafica la intercepta como máximo en un punto. La función es **sobreyectiva**, pues su recorrido es el conjunto R; por ende, es **biyectiva.**	I. Definición de función logarítmica. II. Propiedades de la función logarítmica III. Propiedades de los logaritmos IV. Gráfico de la función logarítmica. V. Cálculo diferencial e integral.

Diseño: Acuña (2015)

Cuadro 10: Organización Matemática de Referencia (OMR)

LOGOS (Bloque Tecnológico-Teórico)

Tecnología	Teoría
-Definición de función exponencial: Dada una función de la forma $y = f(x) = a^x$ definida y: R→R*, donde a>o y a≠1, siendo **a** la base de la función exponencial, es un número real positivo mayor que cero y diferente de 1; y **x** es su variable. -Propiedades de la función exponencial: Su dominio está formado por el conjunto de todos los números reales. Su rango está formado por el conjunto de todos los números reales positivos. La representación de la curva, que se obtiene en el plano cartesiano, muestra la grafica $y = a^x$ con un crecimiento exponencial si a>1. Función creciente. La representación de la curva, que se obtiene en el plano cartesiano, muestra la grafica $y = a^x$ con un decaimiento exponencial si 0<a>1. Función decreciente. La intersección de la curva con el eje Y es 1, no existiendo intersección con el eje X. Mientras que el eje x es una asíntota horizontal. Cuanto mayor es el valor de a (base de la función), mayor será la rapidez con que crece la función. La grafica de toda función exponencial pasa por el punto (0,1) porque $a^0 = 1$. Dado que $a^1 = a$, la grafica pasará siempre por el punto (1, a). Dado que la función exponencial es inyectiva y sobreyectiva; por ende, es biyectiva (p.40).	I. Definición y propiedades de la potenciación. II. Definición y propiedades de la función exponencial III. Criterio de la representación de funciones mediante tablas de valores. IV. Criterio de la representación gráfica de funciones. V. Grafico de la función exponencial. VI. Cálculo diferencial e integral.

Diseño: Acuña (2015)

CAPÍTULO V

5. PRESENTACIÓN E INTERPRETACIÓN DE LA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA Y ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA OBSERVADA EN LA ACTIVIDAD DOCENTE

Este capítulo contiene la información recabada y proveniente de las observaciones realizadas, aunado a su correspondiente interpretación didáctica. Como ya se ha dicho, las observaciones se realizaron a las unidades estudiadas, en el contexto o escenario de investigación, sobre la OMEE (Organización Matemática Efectivamente Enseñada) y la OD (Organización Didáctica) de las profesoras de matemática, sobre las funciones logarítmica y exponencial. Para tal fin, se destacan los siguientes elementos: **T** (Tipo de tareas y/o problemas matemáticos), **t** (Técnicas Matemáticas), **Ө** (Elementos tecnológicos teóricos) y los momentos didácticos: **MPE (**Momento del primer encuentro), **ME** (Momento exploratorio), **MTt (**Momento del trabajo de la técnica), **MTT** (Momento del entorno tecnológico-teórico) y **MI (**Momento de la institucionalización), así como: **P (**Profesor), **A** (Alumno), $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ (profesoras1 y 2).

Es preciso indicar que la descripción de las observaciones se presenta, en forma detallada en el apartado de los anexos. También se reporta, la información de los cuadernos de los estudiantes y las evaluaciones realizadas por cada profesora. Los escenarios considerados son: la Unidad Educativa Crispín Pérez, ubicada en el municipio Libertador, específicamente, en Tocuyito y la Unidad Educativa Barrera, ubicada en Barrera Campo de Carabobo. En cuanto al análisis didáctico, éste se conduce en identificar los momentos didácticos, elementos de las técnicas didácticas, así como la participación de docentes y alumnos.

5.1 Observación no Participante Efectuada en el Escenario 1

5.1.1 Institución 1: En esta institución se observó las clases de la profesora de matemática de cuarto (4to) año, de la Unidad Educativa Crispín Pérez (**P_1**); ubicada en Tocuyito. Cabe aclara que su nivel académico es Licenciada en Educación matemática. De igual modo, en este escenario, se realiza grabación en audio y, parcialmente, de video dado el inconveniente presentado por el recurso, antes de la clase numero 3 (ausencia de la cámara).

CLASE $N_0$1

Primera clase: función exponencial/ Episodio 1

La profesora inicia la clase diciendo en voz alta:	
1 **2** **3** **4**	P_ Esto es muy sencillo, es parte de lo que hemos visto, ya ustedes saben trabajar con funciones, saben graficar; prácticamente vamos es a trabajar con los exponentes. Hicimos un repaso en las propiedades de la potenciación que ellas son importantes. Vamos a empezar a dar una pequeña definición. (Pausa) !Función exponencial!

Primera clase: función exponencial/ Episodio 2

La profesora dicta la definición de la función exponencial:	
5	P _ Una Función Exponencial es una función de la forma, y copian: $f(x)=a^x$!ok ! coma, donde a
	La profesora escribe en el pizarrón:
9	P_ $f(x)=a^x$ (Pausa)
10	P_ donde a, donde a ¿quién es "a" la base? ¿Sí o no?¿ Eso no es una base?
11	P_ Donde a es un número real positivo, es un número real positivo, diferente de uno (1)
12	A _ ¿Diferente?
13	P_ diferente de uno, y x es una variable, y x es una variable.

El episodio 1 y 2 muestran esencialmente:

1) Un momento del primer encuentro (MPE) por cuanto P_1 dirige el encuentro de los estudiantes con la OM: Función Exponencial. Pero este encuentro se realiza a través de la presentación directa, por parte de P_1, de los elementos tecnológicos-teóricos al *definir la función exponencial*; y además, con protagonismo casi exclusivo del profesor. En consecuencia, en estos episodios

se observó una convergencia del Momento del primer encuentro (MPE), parcialmente el momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME) y el momento tecnológico-teórico (MTT). Adicionalmente, se evidenció una ausencia casi absoluta del problema generador de las actividades, de la razón de ser. La profesora comienza presentando las respuestas a las interrogantes, pero sin interrogantes iniciales.

2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno.
3) Uso de elementos ostensivos sin significado. La docente presenta el tema y se muestra la forma general de la función exponencial, como un elemento ostensivo y carente de justificación. Por ejemplo: *P _ "Una Función Exponencial es una función de la forma, y copian: f(x)=*a^x *!ok !"*
4) Tareas planteadas en forma muy genéricas, supuestas o implícitas dando así lugar a especulaciones, divagaciones, ambigüedades; las cuales tienden a propiciar la existencia de errores durante el trabajo matemático de los estudiantes.

Cabe destacar que la *definición de la función exponencial*, se comprende en el bloque tecnológico-teórico de la Organización Matemática de Referencia (OMR) (ver cuadro Nro. 10 ubicado en el capítulo IV).

Primera clase: función exponencial/ Episodio 3

La profesora copia en el pizarrón ejemplo de la función exponencial (Pausa)	
14 **15** **16**	**P_** Okey vamos hacer un primer ejemplo. El más sencillo, una función f de x igual a dos (2) equis. La profesora vuelve a dirigirse al pizarrón para borrar la expresión: $\boldsymbol{2^x}$, cambiándola por la expresión: $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$.

Primera clase: función exponencial/ Episodio 4

La profesora formula interrogantes que orientan la construcción de la tabla de valores

P_ ¿Qué es lo primero que debemos hacer, según el conocimiento que ustedes puedan tener? ¿Qué es lo primero que debemos hacer?
A_ ¡Sustituir!
P_ ¿Sustituir en donde? Ah?
A_ ¡En la "X"!
P_ En la "X", y que voy a sustituir? cualquier valor? O hacemos una tabla para ser organizados y damos valores arbitrarios?
A_ Hacemos una tabla.
P_ ¿Cuáles son los valores que generalmente usamos? Hacemos una tabla…

X	Y

P_ Qué valores?
P y A_ uno, dos, tres cuatro,…
P_ Le puedo dar números negativos?
A_ No!
P_ ¿No? ¿Por qué?
A_ ¡Sí!
P_ ¡Ah…! Vamos a empezar desde el -2,-1, 0, 1 y 2 ¿ Qué valores?
P y A_ uno, dos, tres cuatro,…
P_ ¿Ahora si podemos empezar a sustituir? Que vamos sustituir: cada uno de ellos? ¿No se acuerdan?

X	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	

Primera clase: función exponencial/ Episodio 5

	La profesora sustituye cada valor de x en la función $f(x) = 2^x$ para determinar, a traves del cálculo de potencias, los valores de y para la tabla de valores
38	P_ Empezamos a sustituir F(x); en "X" qué voy a colocar ? Cuál es el primer número
39	que voy a colocar?
40	A_ -2!
41	P_ -2 y sustituyo: F(-2)= $2^{(-2)}$ ¿Esto se puede resolver así?
42	A_ ¡No…!
43	P_ ¿Hay una propiedad de la potenciación?
44	A_ ¡si…/ No…!
45	P_ Si o No? Fíjense que el exponente es negativo, cuando el exponente es negativo por
46	propiedad de la potenciación; por propiedad de la potenciación ¿Qué pasa con ese
47	exponente negativo? Cómo hacemos para que quede positivo? Pasa…
50	P_ ¡Ah. Lo paso como forma de división! Y me quedaría de esta forma:
51	F(-2)=$\frac{1}{2^2}$ ¿Se acuerdan? Divido: uno entre dos elevado a la dos positivo. Puedo resolver
52	esto siempre que ustedes tengan !Jóvenes! Siempre que ustedes tengan un exponente
53	negativo, yo lo voy a pasar a dividir con el signo positivo, ok. Fíjense que me quedo
54	igual: dos a la dos ($\mathbf{2^2}$), pero en vez de estar negativo yo lo paso a qué? a positivo.
55	Siempre va a ser uno el numerador! Siempre va a ser uno. No es que me van a colocar
56	un: dos, tres o cuatro.
59	P_ Copien para borrar y graficar. (Pausa)

X	**Y**
-2	¼
-1	½
0	1
1	2
2	4

En los episodios 3, 4 y 5 se evidencia:

1) Un momento del primer encuentro (MPE) que realiza P_1, con protagonismo casi absoluto dentro del proceso de estudio, al presentar la función exponencial de la forma $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$; esto, con el propósito de recordar conocimientos previos. Para ello, formula interrogantes muy genéricas, preguntas y respuestas al mismo tiempo, tales como:

   P_ ¿Qué es lo primero que debemos hacer, según el conocimiento que ustedes puedan tener? ¿Qué es lo primero que debemos hacer?

P_ En la "X", y que voy a sustituir? cualquier valor? O hacemos una tabla para ser organizados y damos valores arbitrarios? ¿Cuáles son los valores que generalmente usamos?
P_ ¡Ah…! Vamos a empezar desde el -2,-1, 0, 1 y 2 ¿Qué valores?
P_ Empezamos a sustituir F(x); en "X" qué voy a colocar? Cuál es el primer número que voy a colocar?

En este sentido, se observó una convergencia del Momento del primer encuentro (MPE), un parcial momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME) y del momento tecnológico teórico (MTT).

2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático.
3) Uso de elementos ostensivos con ausencia de significado. P_1 presenta la función exponencial de la forma $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$, como un elemento ostensivo y carente de justificación.
4) Las tareas planteadas se muestran de forma muy genéricas, supuestas o implícitas dando así lugar a divagaciones, ambigüedades; las cuales podrían propiciar la existencia de errores durante el trabajo matemático de los estudiantes.

Cabe señalar que tanto el trabajo matemático relativo al cálculo de potencias para la elaboración de la técnica *Construcción de tabla de valores;* que responde a la tarea *Representación Gráfica de la Función Exponencial*, como la técnica y tarea referidas se comprenden en práctico de la OMR (ver cuadro Nro. 8 ubicado en el capítulo IV).

Primera clase: función exponencial/ Episodio 6

	La profesora dibuja en el pizarrón, el plano cartesiano sin la ayuda de una escuadra, es decir, a pulso. Formulando interrogantes al grupo
64	P_ Ok ¿El punto medio es llamado cómo?
65	A_ ¡Negativo, cero!
66	P_ ¡Cero! Ok, hacia arriba qué es?
67	A_ ¡Equis "X"!
68	P_ ¿Equis "X"? ¿Equis "X" positivo?
69	A_ ¿Si/No!
70	P_ ¡"Y" positivo! Tenemos un eje "Y" y ¿hacia abajo?
71	
72	A_ ¡Negativo!
73	P_ ¿Negativo quién "X"?
74	A_ "Y"!
75	P _ ¡Ah…! Menos "-Y" y hacia acá que tenemos, hacia el lado derecho?
76	A_ ¡"X" positivo/"X" negativo!
77	P_ "X" positivo! Y del otro lado?
78	A_ ¡"X" negativo!
	P _ ¡Ah…! Menos "-X"

Primera clase: función exponencial/ Episodio 7

	La profesora realiza gráfica de la función exponencial
79 **80** **81**	P_ Ah. Ahora sí, Ok y empezamos a darles los valores: cuando tenemos -2, ok "X" vale -2. Como es negativo me voy a ubicar hacia el eje "X" negativo. Sería el -1, el -2 estaría por aquí -2. Cuando "X" vale -2 "Y" vale cuánto ¼ y cuanto es ¼?
82	A_ ¡Cuatro rayitas!
83	P_ ¿¼ va a ser igual a cuánto? A 0,25.
84	P_ ¡Ustedes agarran y dividen uno entre cuatro: 0,25. Ok!
85	A_ ¡Más o menos!
86	P_ Entonces ese 0,25 iría primero ¿Va hacia los positivos o hacia los negativos?
87	A_ ¡Hacia los positivos!
88 **89** **90**	P_ Positivo ok. Entonces iría hacia arriba. Ese 0,25 si yo tengo el uno por aquí ese 0,25 ¿cuál sería? Bueno, yo ubico entre cero y uno, va cuánto? 0,5 ¡Verdad! La mitad entre cero y uno: es 0,5!
93	P_ 0,25. Ahí perdón! 0,5! Y entre 0 y 0,5 ¿Qué hay en la mitad?
94	A_ ¡0,25!
95 **96**	P_ ¡Entonces ese 0,25 iría por aquí lo que pasa es que ¡Ah, ok está bien! Cuando "X" vale 0-2, "Y" vale cuánto? 0,25. Interceptó las dos líneas y ese sería el primer punto.
97	Y ahora cuando "X" vale -1, "Y" vale cuánto?
99	P_ Y uno entre dos (1/2) ¿cuánto es?
100	A_ 0,5
101	P_ 0,5. Entonces ubico el -1 ¡que será este! Y el 0,5 es positivo o negativo?
102	P y A_ ¡Positivo!

Primera clase: función exponencial/ Episodio 7

	La profesora realiza gráfica de la función exponencial (continuación)
103	P_ Entoces intersecto dos líneas, ¡chacata! Ok. Según ustedes. Ok.
107	P_ entonces iria por aquí, va sobre el eje. Cuando x vale cero ese cero es tanto para x como para
108	y. (Pausa para explicar la ubicación del cero en el plano)
109	P_ Ahora cuando x vale 1 Y vale 2. Cuando x vale uno positivo, ahora me voy hacia el lado…
111	P_ Ahora me voy hacia el lado positivo, cuando x Vale uno Y vale 2,si uno esta aquí en x el dos
112	debe estar por aquí…!Ah bueno! (Pausa).
113	P_ ¡Ok, este… quedamos en que X valia 1 y Y vale cuánto? Dos.
117	P_ Intersectamos, intersectan to…dos los puntos o los unen todos, ok y no da ninguna línea recta
118	(profesora traza líneas entre cortdas y paralelas a los ejes, a pulso). La grafica les tiene que dar de
119	esta forma (curva), ok. Ojo con esto, muchachos, este punto cero yo les los marco aquí para que
120	ustedes sepan que esta es una intersección de los ejes; pero ustedes no van a unir la grafica con el
121	punto cero porque la unica manera que que quede ahí es que X valga cero y Y tambien valga cero
122	¿estamos claro?
124	P_ Ese punto se los marque bien definido, de esa forma, para que ustedes vean que ese es el único
125	punto cero, pero en realidad, no deberia haber ningun punto. Intersectan todos los puntos y te
126	queda de esta forma la grafica.

En los episodios 6 y 7 se muestra esencialmente:

1) Cómo P_1, con protagonismo casi absoluto dentro del proceso de estudio, promueve la participación de los estudiantes. Pero esta participación, se efectúa mediante la presentación directa de la *representación gráfica* de la función exponencial $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$. Para ello, P_1 formula interrogantes muy genéricas y supuestas que conducen a recordar conocimientos previos tanto del trazado como de la ubicación de los pares ordenados en el plano cartesiano. Desde luego, en los episodios se observó una convergencia de un parcial momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento del primer encuentro (MPE), momento exploratorio (ME) y del momento tecnológico teórico (MTT).

   P_ Ok ¿El punto medio es llamado cómo?
   A_ ¡Negativo, cero!
   P_ ¡Cero! Ok, hacia arriba qué es?
   A_ ¡Equis “X”!

2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático.
3) Uso de elementos ostensivos con ausencia de significado. P_1 presenta representación de la función exponencial $f(x) = 2^x$, como un elemento ostensivo y carente de justificación.
4) La actividad matemática planteada, se muestra de forma muy genérica, supuesta o implícita dando así lugar a divagaciones, ambigüedades; las cuales podrían propiciar la existencia de errores durante el trabajo matemático de los estudiantes al momento de realizar la representación gráfica de la función propuesta.

Cabe señalar que la tarea *Graficar Función Exponencial*, se comprenden en el bloque práctico de la OMR (ver cuadro Nro. 8 ubicado en el capítulo IV).

Primera clase: función exponencial/ Episodio 8

	La profesora indica concluir sobre la curva obtenida
127 **128** **129**	P_ Copien o dejen el espacio de la grafica para sacar unas conclusiones de la copia, porque ustedes despues me tienen que decir si fue ascendente o desciende, este en donde corta la grafica y todo eso. ¡Asi que dele pues!

En este episodio se observa esencialmente un momento del primer encuentro (MPE) dado que P_1 indica la actividad matemática: sacar unas *conclusiones sobre el comportamiento de la curva de la Función Exponencial*, trazada en el plano. Por consiguiente, en el episodio predomina el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME), momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento tecnológico-teórico. Por otro lado, uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno.

Evidentemente, la actividad matemática propuesta representa la culminación de la clase. La misma, es planteada de forma muy genérica, supuesta o implícita; situación que podría dar lugar a especulaciones, divagaciones y ambigüedades.

CLASE N$_{0}$2

Segunda clase: función exponencial/ Episodio 1

	P_1 escribe en la pizarra y presenta la siguiente función exponencial $f(x)= 6^{-x} -3$
1	P_ ¡Ok, continuamos con la clase de ayer!¡Ok, seguimos!
5	P_ Aja, tenemos este tipo de ejercicios. También ayer era el más sencillo. Vamos desde lo más
6	sencillo hasta lo más dificultoso, ¡ok!
7	P_ En este caso ¿Qué es lo primero que debemos hacer en una función exponencial para
8	empezar a resolverla? ¿No puedo graficar, verdad?
9	A_ ¡No…! ¿Por qué no puedo graficar? No podemos.
10	P_ Aja ¿Por qué no puedo graficar?
11	A_ ¡Porque no tenemos las bromas en X y Y!
14	P_ X yo se lo puedo dar pero ¿Y yo necesito qué? ¡Hallar! Entonces vamos a empezar a darle
15	valores a “X” para obtener el valor ¿De quién?
16	P y A_ ¡De “Y” OK!
17	P y A_ ¿Y qué valores le vamos a dar? Le vamos a dar lo mismo: -2, -1,0,1,2

Segunda clase: función exponencial/ Episodio 2

	P_1 sustituye valores de x en la función $f(x)= 6^{-x} -3$ para determinar los valores de y para la tabla de valores
18	P_ Y empezamos a sustituir en la variable “X” cada valor de “X” Ok. Entonces empezamos
19	con cuál? F de quién?
20	A_! -2!
21	P_ En donde este la variable “X” yo voy a sustituir por -2; entonces la tenemos aquí y la
22	tenemos aquí: $F(-2)= 6^{-(-2)} -3$ ¡Seis a la menos 2 menos 3! ¡Ya va! Ok, fíjense aquí, la variable
23	“X” es negativa pero el número también es negativo, ok; entonces este -2 es el número que
24	nosotros tomamos en “X”, pero ese signo negativo que está afuera ¿quién sería? el signo que
25	tiene la variable, ok. Entonces yo veo ¿Qué es lo primero que debo hacer? Multiplico los
26	signos ¿Sí o no?
27	A_ ¡Sí!
28	P_ ¿Menos por menos?
29	A_ ¡Más!
30	P_ Me quedaría: $F(-2)= 6^{2}-3$. Ahora si resuelvo mi potencia y me quedaría: Seis por seis.
31	P y A_ ¡Treinta y seis!
	F(-2)= 36 -3(Pausa)
32	P_ Ojo con esto porque sé que cometen errores. ¡Métanselo en la cabeza: es potenciación y yo
33	no puedo decir seis por dos! Grábense que todo número que está como exponente, te va a
34	indicar cuantas veces vas a multiplicar ¿Quién? la base. Entonces si tenemos el número dos,
35	yo voy a multiplicar el seis dos veces y sería seis por seis treinta y seis menos tres. Y treinta y
36	seis menos tres cuánto es?
37	A_ ¡33!
38	F(-2)= 36 -3
	F(-2)= 33
39	P_ Entonces cuando “X” vale -2 ¿“Y” vale cuánto?
40	A_ ¡33!
41	P_ Ahora vamos $F(-1)= 6^{-(-1)}-3$ y sucede lo mismo, el signo negativo de la variable “X” y a su
42	vez “X” también es negativo: -1.

En los episodios 1 y 2 se evidencia:

1) Un momento del primer encuentro (MPE) por cuanto P_1, con protagonismo casi absoluto dentro del proceso de estudio, presenta la función exponencial $\boldsymbol{f(x) = 6^{-x}} - 3$; esto, con el propósito de recordar conocimientos previos. Para ello, formula interrogantes muy genéricas, preguntas y respuestas al mismo tiempo, entre ellas:

   P_ En este caso ¿Qué es lo primero que debemos hacer en una función exponencial para empezar a resolverla? ¿No puedo graficar, verdad?
   P_ X yo se lo puedo dar pero ¿Y yo necesito qué? ¡Hallar! Entonces vamos a empezar a darle valores a "X" para obtener el valor ¿De quién?
   P y A_ ¿Y qué valores le vamos a dar? Le vamos a dar lo mismo: -2, -1,0,1,2

   En este sentido, se muestra una convergencia del Momento del primer encuentro (MPE), un parcial momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME) y del momento tecnológico teórico (MTT).

2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático.

3) Uso de elementos ostensivos con ausencia de significado. P_1 presenta la función exponencial de la forma $\boldsymbol{f(x) = 6^{-x}} - 3$, como elemento ostensivo y carente de justificación.

4) Las tareas planteadas se muestran de forma muy genéricas, supuestas o implícitas dando así lugar a divagaciones, ambigüedades; las cuales podrían propiciar la existencia de errores durante el trabajo matemático de los estudiantes.

Cabe señalar que tanto el trabajo matemático relativo al cálculo de potencias para la elaboración de la técnica *Construcción de tabla de valores;* que responde a la tarea *Representación Gráfica de la Función Exponencial*, como la técnica y tarea referidas se comprenden en el bloque práctico de la OMR (ver cuadro Nro. 8 ubicado en el capítulo IV).

Segunda clase: función exponencial/ Episodio 3

	P_1 se acerca al pizarrón para expresar al grupo, en voz alta, elaboración de la grafica
138	P_ Ok, y empiezo a graficar: cuando X vale -2 Y vale 33.
139 **140**	P_ Cuando X vale -2, pongamos que el -2 está por aquí, Y vale 33 positivo hacia el eje Y, ok. Como 33 es más alto, lo podemos hacer allí, 33. Intercepto.
143	P_ cuando X vale -1 Y vale 3. Cuando X vale -1 Y vale 3. Supongamos que el 3 por aquí.
145 **146** **147**	P_ cuando X vale 0 Y vale -2. Hacia el eje qué? Negativo. El menos -2 supongamos que está aquí. Entonces cuando X vale 0, acuérdense que el 0 es para X como para Y ¡Adriana y Ana quiero que estén en el pizarrón!
149 **150**	P_ Y vale -2, entonces ese -2 es sobre el eje Y, ok, menos Y. cuando X vale 1; supongamos que el 1 está por aquí, Y vale -2,83 ¿Ese 2,83 se acerca al 3?
151	A_ ¡Sí!
152 **153**	P_ ¡Si, verdad! Entonces vamos a ubicar el punto 3, digamos que el punto 3 está por aquí y ese 2,83, digamos que está por aquí, 2,83. Interceptamos el punto 1 con el 2,83.
155 **156**	P_ Y cuando x vale 2, si el 1 estaba por aquí, supongamos que 2 está por aquí. Y vale 2,97. Ese 2,97 se acerca aún más a 3 ¿Cierto?
157	A_ ¡Sí!
158 **159**	P_ 1ero viene el 2,8 y luego el 2,9. Entonces supongamos que ese 2,97 está por aquí. Interceptamos puntos…
160	P y A_ ¡Aja, chacata! Risas.
161	P_ Y como yo no tengo regla, entonces nos va a quedar algo como…(Pausa)

Segunda clase: función exponencial/ Episodio 4

	Mediante formulación de preguntas, P_1 motiva al grupo para realizar análisis de la curva
162	P_ De esa grafica ¿Qué podemos acordar? Es una gráfica que va ¿creciendo o decreciendo?
163	A_ ¡Decreciendo!
164	P_ decreciendo ¿Por qué va hacia dónde?
165	A_ ¡hacia, hacia!
166 **167**	P_ Hacia, hacia. Hacia abajo, ok; entonces es una gráfica que va decreciendo. Y ¿en qué punto del eje corta? Entonces ¿En qué parte del eje toca al punto?
168	P_ ¡Señores! Los ejes son X o Y ¿en qué punto exactamente corta? ¿Corta en cero?
170	A_ ¡No!
171	P_ ¿En qué corta? en -3, pero en ¿En qué número?
172	A_ ¡2!
173 **174** **175** **176** **177**	P_ ¡-2! Este es el punto en que la gráfica toca al eje, porque aquí toca la gráfica; pero ¿Hay un punto determinado? En cambio aquí sí, ok, entonces estamos claro. Cuando yo les diga que concluyan o que me den características de la gráfica, esto es lo que me pueden decir: si la gráfica toca al punto, el eje X o el eje Y, cuál es el punto que corta y si es creciente o decreciente.

En los episodios 3 y 4 se pudo evidenciar:

1) Cómo P_1, en su rol protagónico casi absoluto, promueve la participación de los estudiantes. Pero una participación, efectuada mediante la presentación de la representación gráfica de la función exponencial $\boldsymbol{f(x) = 6^{-x}} - 3$. Para ello, P_1 formula interrogantes muy genéricas y supuestas que conducen a recordar conocimientos previos tanto del trazado como de la ubicación de los pares ordenados en el plano cartesiano. Ante todo, en los episodios se muestra una convergencia de un parcial momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento del primer encuentro (MPE), momento exploratorio (ME) y del momento tecnológico teórico (MTT).
2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático.
3) Uso de elementos ostensivos con ausencia de significado. P_1 presenta representación de la función exponencial $\boldsymbol{f(x) = 2^{x}}$, como un elemento ostensivo y carente de justificación.
4) La actividad matemática descrita, se presenta de forma muy genérica, supuesta o implícita dando así lugar a divagaciones, ambigüedades; las cuales podrían propiciar la existencia de errores durante el trabajo matemático de los estudiantes al momento de realizar la representación grafica de la función propuesta.

Cabe señalar que la tarea *Graficar Función Exponencial*, se comprenden en el bloque práctico de la OMR (ver cuadro Nro. 8 ubicado en el capítulo IV).

Segunda clase: función exponencial/ Episodio 5

P_1 escribe en el pizarrón otro ejercicio de función exponencial, cuando la base es fracción $y = \frac{3^{x+1}}{5}$
P_ Y trabajamos con fracción. Ok con fracciones ¡Naguara, difícil profesora. A mí no me gustan las fracciones! ¿Verdad?
A_ ¡Claro, no me gustan!
P_ Ok y empezamos a sustituir el primero que es con menos dos. Tres quintos, X vale menos dos más uno (-2+1). Cuando yo tengo algo así parecido a esto que yo tengo una operación aquí arriba. Una operación matemática, signos distintos ¿Qué pasa?
A_ se restan. Se coloca el signo del número mayor.
P_ se restan, ok entonces yo digo: ¿-2+1 cuanto seria?
A_ -1,-3!
P_ ¡-1, ok! Ok.
A_ ¿Por qué? Ah, porque… ¿Queda así profesora?
P_ Aja, Ok ¿Qué pasa con el signo que está negativo? ¿Qué debemos hacer? ¿Aplicamos propiedad?
A_ ¡Sí!
P_ Si pero profesora yo no sé aplicar propiedad porque ahí tengo una fracción ¿Qué es eso? Bueno, yo igual aplico mi propiedad de la potenciación y digo uno entre todo esto con signo positivo, porque este exponente es para los dos, tanto para el numerador como el denominador.

En el episodio 5, se evidencia un momento del primer encuentro (MPE) que realiza P_1, con la presentación de la **tarea:** $\mathbf{y} = \frac{3^{x+1}}{5}$, y con protagonismo casi absoluto, recuerda conocimientos previos y el procedimiento empleados en los episodios precedentes. Para ello, de forma directa comienza con la sustitución de elementos en la variable **x**. De forma análoga, en el episodio se muestra una convergencia del Momento del primer encuentro (MPE), un parcial momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME) y del momento tecnológico teórico (MTT). Adicionalmente, el uso de un lenguaje natural sin rigor matemático. Uso de elementos ostensivos con ausencia de significado; es decir, P_1 presenta la función exponencial $\mathbf{y} = \frac{3^{x+1}}{5}$, como elemento ostensivo y carente de justificación.

Por otra parte, la tarea se plantea de forma muy genérica, supuesta o implícita dando así lugar a divagaciones, ambigüedades; las cuales podrían propiciar la existencia de errores durante el trabajo matemático de los estudiantes. Sólo se especifica que la base de la función es fracción.

Cabe señalar que tanto el trabajo matemático relativo al cálculo de potencias para la elaboración de la técnica *Construcción de tabla de valores;* que responde a la tarea *Representación Gráfica de la Función Exponencial*, como la técnica y tarea referidas se comprenden en el bloque práctico de la OMR (ver cuadro Nro. 8 ubicado en el capítulo IV).

Segunda clase: función exponencial/ Episodio 6

P_1 continua la resolución del ejercicio (construcción de tabla de valores); pero, haciendo especial énfasis en el desarrollo de potencias y operaciones básicas en R con fracciones.

Segunda clase: función exponencial/ Episodio 7

	P_1 indica al grupo la realización de la grafica
198	P_ Y grafican ustedes porque ya tienen que empezar a graficar.

En los episodios 6 y 7 se muestra cómo P_1, con un protagonismo casi absoluto, promueve a los estudiantes *graficar la función exponencial*, de forma independiente. En consecuencia, en estos episodios se observó una convergencia de parcial el momento del trabajo de la técnica (MTt) y momento de la institucionalización; en detrimento del momento del momento del primer encuentro (MPE), el momento exploratorio (ME) y el momento tecnológico-teórico (MTT).

De igual modo, la profesora emplea un lenguaje natural sin rigor matemático. La tarea es planteada de forma muy genérica, sobreentendida e implícita; situación que podría generar especulaciones, especulaciones, divagaciones, ambigüedades; y por tanto, la presencia de errores durante el trabajo matemático de los estudiantes al momento de realizar la representación gráfica de una función exponencial que posee en su base una fracción.

Segunda clase: función exponencial/ Episodio 8

	P_1 escribe la actividad en la pizarra:
199 200 201 202	1) $f(x) = 2^x$ 2) $f(x) = -2^x$ 3) $f(x) = 2^x + 4$ 4) $f(x) = 2^{x-3}$ P_ Bueno chicos la evaluación es el lunes, de esto. Resuelvan estos cuatros. A_ Ok. P_ de regalo de navidad, de estos cuatro le va a salir uno en el examen, ok. A_ Ah, bueno! (Pausa)

En el episodio 8, se evidencia como P_1 a través de la asignación de cuatro funciones exponenciales, indica a los estudiantes realizar su representación gráfica y efectuar conclusiones sobre las mismas. En este contexto la profesora, empleando un lenguaje natural sin rigor matemático, plantea la tarea de forma muy genérica, sobreentendida e implícita; situación que podría generar especulaciones, especulaciones, divagaciones, ambigüedades.

Además, se promueve la actividad matemática al enfatizar que, una de las funciones exponenciales propuestas, se tomará en cuenta para la evaluación.

CLASE $N_0$3

Tercera clase: función exponencial/ Episodio 1

	(Pausa) P_1 escribe en la pizarra y presenta la evaluación de función exponencial: Taller Evaluación de Función Exponencial Resuelve y grafica la siguiente función exponencial a) $f(x) = 4^{-x+2}$ b) $f(x) = 3^x + 5$ 6 puntos cada una $f(x) = 4^{x-3}$

Tercera clase: función exponencial/ Episodio 2

1	P_1 indica al grupo la realización del taller **A_ Vamos hacer lo mismo que en la otra prueba ¿Verdad?** **<u>Nota:</u> estudiantes discuten sobre ejercicios del taller.** La profesora atiende asesorías al grupo, sobre dudas ante la solución de ejercicios de la evaluación. Esto, de forma constante. **(Pausas en forma paralelo a la evaluación)**.

Tercera clase: función exponencial/ Episodio 3

P_1 indica al grupo retirarse del aula a medida que van terminando la evaluación.

<u>5.1.2 Característica de la OMEE de P_1 en torno la Función Exponencial:</u> La reconstrucción de una Organización Matemática (OM) de la profesora, responde a los *tipos de tareas* matemáticas

T1: Presentar la función exponencial ¡Se infiere!

T2: Definir función exponencial. T3: Graficar función exponencial. T4: Analizar función exponencial ¡Se infiere!

Así pues, para abordar las *tareas matemáticas*, P_1 plantea siete (7) técnicas matemáticas, entre ellas: t3: Construcción de tabla de valores, t4: Ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano y t5: Representación de la curva en el plano cartesiano.

Naturalmente, las técnicas proporcionadas por P_1 se interpretan y justifican mediante los siguientes elementos *tecnológicos-teóricos*: Θ_3: Definición y propiedades de la potenciación en R, Θ_4: Definición de la función exponencial y Θ_5: Grafico de la función exponencial.

<u>5.1.3 Característica del Proceso de estudio u OD de P_1:</u> durante el proceso de estudio, P_1 emplea elementos de la OM: Potenciación y la OM: Funciones Reales de variable real. Asimismo, actividades de recordación y repetición, de carácter general solicitadas y dirigidas por la profesora quien, con protagonismo casi exclusivo, comienza dictando la definición de la función exponencial y luego propone un ejemplo. Utiliza un lenguaje natural sin rigor matemático alguno y emplea elementos

ostensivos carentes de significados (por ejemplo, la forma general de la función exponencial). Por otro lado, las tareas son presentadas de manera muy general supuestas e implícitas; de ahí que las técnicas sean presentadas de manera preestablecidas. Así pues, preeminencia del momento del primer encuentro con el elemento tecnológico-teórico, un parcial momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME) y momento tecnológico-teórico (MTT). En otras palabras, se hace énfasis en recordar los conocimientos previos que posee el estudiante, más que en la verdadera exploración de la técnica; aunado, al empleo exclusivo de la técnica que se deriva del elemento tecnológico-teórico.

5.1.4 OM del Cuaderno de los Estudiantes: En la revisión llevada a cabo a las notas del cuaderno personal de seis (6) estudiantes, tomadas durante las clases de la función exponencial, se evidenció: 1) Escritura parcial del contenido enseñado en las clases, 2) Presencia de errores matemáticos, durante el procedimiento para abordar las tareas. Por ejemplo, trazado inadecuado de la gráfica de la función $f(x) = 6^{-x} - 3$; ésta, es ubicada entre el segundo y cuarto cuadrante; 3) Ausencia de tareas resueltas: no se realiza la representación gráfica de la función $f(x) = \frac{3^{x+1}}{5}$; sólo se ubicaron los puntos en el plano y los ejercicios asignados no fueron resueltos.

5.1.5 OM de la Evaluación de los Estudiantes: La revisión efectuada a la evaluación aplicada a los estudiantes por P_1 muestra; por un lado, que la profesora se centra su atención en la tarea matemática *Resolver Función Exponencial* siguiente:

Resuelve y grafica la siguiente función exponencial

$f(x) = 4^{-x+2}$; $f(x) = 3^x + 5$; $f(x) = 4^{x-3}$

5.2 Observación no Participante Efectuada en el Escenario 2

5.2.1 Institución 2: En esta institución se observaron las clases de la profesora de matemática de cuarto (4to) año, de la Unidad Educativa Barrera (P_2); ubicada en Barrera. Es conveniente señalar que su nivel académico es Magister en Educación Matemática. Cabe señalar que en este escenario, se realiza la grabación en audio y, parcialmente, de video dado el inconveniente presentado por el recurso, antes de la clase numero 3 (ausencia de la cámara).

CLASE $N_0$1

Primera clase: función exponencial/ Episodio 1

	P_2 se dirige al grupo y expresa en voz alta:
1	P_ Miren jóvenes, vamos a recordar lo que vimos en la clase pasada ¿Qué fue lo que vimos?
2	A_ ¡Este, las funciones reales!
3	P_ Las funciones reales ¿Y qué trabajamos en las funciones reales?
4	A_ función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva ¡Funciones reales!
5	P_ ¡Ah! Y ¿Qué es eso? Yo, pero a ¿Qué parte de las funciones estamos trabajando allí?
6	A_ ¡funciones reales!
7	P_ su clasificación estamos trabajando allí, su clasificación de las funciones. Que ya fue
8	evaluado.

Primera clase: función exponencial/ Episodio 2

	P_2 presenta el tema de la función exponencial
11	P_ El contenido que se va a ver, tiene que ver algo de lo que ella hablaba en la clase anterior
12	que son las funciones exponenciales

Primera clase: función exponencial/ Episodio 3

	P_2 repasa las Propiedades de la Potenciación
13	P_ Ahora para poder ver las funciones exponenciales, primero tenemos que recordar algo, porque fíjense
14	bien, el nombre función exponencial ¿Qué se les viene a la mente cuando se les menciona la palabra
15	exponencial?
16	A_ ¡Exponentes!
17	P_ ¡Exponente! ¿Verdad? que quiere decir, que tenemos que reconocer todas las propiedades donde
18	aparecen ¿Qué? Potenciación, y vamos a recordar las propiedades de la potencia. Fíjense ustedes. Y
19	colocamos, me aparece esta expresión: $a^m.a^n$, producto de una potencia ¿de?
20	A_ ¡Igual base!
21	P_ ¿Qué pasa cuando tenemos producto de potencia de igual base?

Primera clase: función exponencial/ Episodio 3

	P_2 repasa las Propiedades de la Potenciación (continuación)
22	A_ ¡Sumamos los exponentes!
23	P_ colocamos la misma base ¡Tengo la división!
24	A_ ¡Restamos!
25	P_ ¡Se restan los exponentes! Se coloca la misma base y se restan los exponentes. Pero, ¿Qué pasa
26	cuando tengo esta expresión $(a^m)^n$?
27	A_ Se pone la misma base y se multiplican los exponentes.
28	P_ ¡Muy bien!
29	P_ ¡Muy bien Freddy! Esto es lo que llamamos potencia de una potencia.
31	P_ Se coloca la misma base y se multiplican los exponentes. Ahora vamos a recordar otro caso ¿Qué va a
32	ocurrir aquí? $(2.3)^2$; sencillo, ¿Qué es lo que la propiedad dice en este caso?
33	A_ ¿Resolvemos lo que está entre paréntesis?
34	P_ Se resuelve lo que está entre paréntesis Ok ¡Vamos a resolverla! ¿2 por 3? ¿Sería? 6 y si resuelvo este
35	cuadrado ¿Qué me va a dar?
36	A_ 36
37	P_ Pero ¿Que va a ocurrir si lo resuelvo de otra manera? Aplicando la propiedad de la potencia indicada
38	acá; fíjense bien ¿Qué me diría la propiedad en este caso? ¿Qué es lo que me indica? Fíjense bien, esta
39	propiedad $(a.b)^n$ quiere decir, que es igual si resolvemos la potencia de a por la potencia de b, vamos a
40	ver con este ejemplo:
41	P_ ¿Cuánto es 2 a la 2 $(2)^2$?
49	P_ Entonces, por los lados que ustedes lo resuelvan, el resultado va a ser el mismo.
50	Esto es lo que llamamos potencia de un producto.
	$(2.3)^2 = (2)^2 . (3)^2$
	$(6)^2 = 4.9$
	$36 = 36$
51	P_ Va a ocurrir lo mismo con la potencia de un cociente. Ah!, que si tenemos a÷b elevado a m y
52	resuelvo igual, resuelvo primero $a^m \div b^m$. Ahora vemos los casos especiales, ¿Cuáles son esos casos
53	especiales? Si tengo a^0 ¿Cuánto es?
54	A_ Uno
55	P_ me dice que es igual a uno, pero ¿De dónde viene ese a^0? Porque me dice que es un caso especial,
56 **57**	por lo siguiente: me dice que estoy aplicando esta propiedad, la número 2 que es $\frac{a^m}{a^m}$, pero esto es igual a
58	uno.
59	P y A_ ¡Se copia la misma base y se restan los exponentes! Cuando copiamos la misma base y se restan
60	los exponentes ¿Qué obtenemos? En este caso
62	P_ Copia a^0, que es este "a" a la cero que está allí ¿Qué es lo que quiere decir, es uno ¿Por qué? Porque
63	todo número dividido entre el mismo ¿Cuándo me da?
65	A_ ¡Uno!
74	P_ ¡Uno! $\frac{a}{a}$ Es igual a uno, por eso es que me dice que, debemos recordar aquí que esta a tiene que ser
75	distinta de cero ($a \neq 0$) recuerdas que la división por cero no está definida para cero, porque uno entre
76	cero no sabemos como es.
80	P_ Todo número elevado a uno (a^1) ¿Cuánto me da?
82	P_ Ya va, ¿5 a la uno 5^1?
84	P_ Es la misma base, porque este uno me está diciendo que no voy a resolver nada. (Pausa)

Primera clase: función exponencial/ Episodio 3

	P_2 repasa las Propiedades de la Potenciación (continuación)
86	P_ Se va a modificar esta potencia, queda igual la "a", copien por favor, para continuar Propiedades que se repasan en esta parte de la clase: $a^m.a^n = a^{m+n}$ $a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m.n}$ $(a.b)^n = a^m.b^n$ $(2.3)^2 = 2^2.3^2$ $(a \div b)^n = a^m \div b^n$ $6^2 = 4.9$ $36 = 36$ $a^0 = 1, a \neq 1$ $a^1 \div a^1 = a^{1-1} = a^0$ $a^1 = a$

En los episodios 1, 2 y 3 se muestran esencialmente:

1) Un momento del primer encuentro (MPE) que realiza P_2 al recordar, a los estudiantes el contenido de las funciones reales, visto en la clase anterior. Este encuentro se da con el fin de presentar, directamente por parte de P_2, la OM: función exponencial. Para ello, se hace referencia *recordar la OM: potenciación*, con un protagonismo casi exclusivo del profesor. Por consiguiente, en estos episodios se observaron un convergencia del momento del primer encuentro (MPE) con los elementos tecnológicos-teóricos y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME), del momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento tecnológico-teórico (MTT). *P_2 _recordar las propiedades de la potencia.* Las propiedades descritas representan doble papel, dentro de la actividad matemática de P_2: son técnica y tecnología al mismo tiempo. Técnica y tecnología éstas, presentadas en forma institucional e incuestionable; o bien, conocimiento trivial (Gascón, 2001).
2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno.
3) Empleo de elementos ostensivos carentes de significado.

Cabe destacar que el contenido de las propiedades de la potenciación se comprende en la Organización Matemática de referencia (OMR) (ver cuadros nro. 8, 9, 10 descritos en el capítulo IV).

Primera clase: función exponencial/ Episodio 4

	La profesora escribe en la pizarra y presenta la función exponencial
87	P_ ¡Función exponencial!
89	P_ ¡Función exponencial! es el título, estas son las propiedades de la potenciación.
90	P_ ¡Función exponencial! (Pausa)

Primera clase: función exponencial/ Episodio 5

	La profesora expresa en voz alta
92	P_ Ok, allí nos falta una de las propiedades que vamos a estar utilizando, muchísimo, en lo que es aquí
93	la función exponencial
95	P_ Una propiedad que vamos a utilizar, muchísimo, cuando el exponente es negativo ¿Qué pasa
96	cuando el exponente es negativo? Vamos a recordar que en la física de 3er año, se utiliza mucho esos
97	exponentes negativos:
98	Se deja la constante en el numerador que este caso es 1 ¿qué es lo que colocamos en el denominador?
99	Exponente 1÷$\boldsymbol{a^m}$ con exponente positivo
100	La constante
101	$\boldsymbol{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$ Exponente positivo
102	P_ Entonces, decíamos en 9no grado que para nosotros cambiar el signo a un exponente, y el
103	exponente de la expresión está en el denominador, basta con pasar esa expresión al denominador para
104	que sea positivo. Podemos cambiar el signo cambiando la expresión al numerador o al denominador.
105	Ok, o sea que si estuviera allí $\boldsymbol{a^{-6}}$ en el denominador lo que hay que hacer es pasarla al numerador
106	cambiándole el signo al exponente. Esta es una de las propiedades que vamos a estar utilizando, esta
107	propiedad: $\boldsymbol{a^0 = 1}$, esta propiedad (en el estudio de las funciones $\boldsymbol{a^1}$ = a) y este caso especial: $\boldsymbol{a^{-m}}$ =
108	$\frac{\boldsymbol{1}}{a^m}$ las vamos a estar utilizando en el estudio de las funciones exponenciales. Por eso deben recordarlo
109	bien ¡Ubíquense!
110	P_ Si yo tengo 3^{-3} ¿qué va a ocurrir para poder resolver 3^{-3}? Con este exponente negativo no la
111	podemos resolver ¿Qué es lo que haríamos?

Primera clase: función exponencial/ Episodio 5

	La profesora expresa en voz alta:
122 **123** **124** **125** **126** **127** **128** **129** **130** **131**	P_ Ahora, el caso contrario que me aparezca esta expresión $\frac{1}{2^{-4}}$ ¿cómo hago para resolver ese $\frac{1}{2^{-4}}$? ¿Qué es lo que te dice la propiedad? Lo que debes de cambiar. P y A_ Si está en el numerador pasa al denominador, si está en el numerador pasa al denominador con solamente cambiarle el signo ¿A quién? Al exponente. P_ ¡Con sólo cambiar el signo al exponente! A_ ¿Sí esta negativo pasa positivo? P_ Uno entre 2^{-4}, ahora vamos a tener… P y A_ 2 a la 4 (2^4) $\frac{1}{2^{-4}} = 2^4$ P_ ¿Y cuánto es 2^4? (Pausa)

En los episodios 4 y 5 se evidenció:

1) Un momento del primer encuentro (MPE) en el cual P_2 dirige el encuentro de los estudiantes con la OM: Función Exponencial con el repaso que realiza la profesora, con protagonismo casi exclusivo, de la propiedad de la potenciación con exponente negativo.

   P_ este caso especial: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ *las vamos a estar utilizando en el estudio de las funciones exponenciales. Por eso deben recordarlo bien*
   P_ el caso contrario que me aparezca esta expresión $\frac{1}{2^{-4}}$ *¿cómo hago para resolver ese* $\frac{1}{2^{-4}}$*? ¿Qué es lo que te dice la propiedad? Lo que debes de cambiar. Si está en el numerador pasa al denominador, si está en el numerador pasa al denominador con solamente cambiarle el signo ¿A quién? Al exponente.*

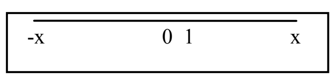
   En consecuencia, en estos episodios se observó una convergencia del Momento del primer encuentro (MPE), parcialmente el momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME) y el momento tecnológico-teórico (MTT). Adicionalmente, se observó una ausencia casi absoluta del problema generador de las actividades, de la razón de ser.

2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno.

3) Uso de elementos ostensivos sin significado. La docente presenta el tema y la propiedad del exponente negativo, como un elemento ostensivo y carente de justificación.
4) La actividad es desarrollada en forma muy genéricas, supuestas o implícitas dando así lugar a especulaciones, divagaciones, ambigüedades; incluso errores, al momento de que los estudiantes empleen las propiedad de la potencia con exponente negativo.

Según se aprecia, las *propiedades de la potencia*, se comprende en la OMR (ver cuadro Nro. 8, 9 y 10 descritos en el capítulo IV).

Primera clase: función exponencial/ Episodio 6

	La profesora dicta en voz alta la definición de la función exponencial
143	P_ Listo; colocamos entonces, una función exponencial es una función de la forma: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$,
144	donde a es un número real, a mayor que cero ($\boldsymbol{a} > 0$) y distinto de uno a$\neq$ 1
145	P_ ¿Se acuerdan cuando vimos las funciones trigonométricas que decíamos $\boldsymbol{y} = \mathbf{sen}\,\boldsymbol{x}$?
146	Ok, esa y la tomamos como f(x), ahora no es $\mathbf{sen}\,\boldsymbol{x}$ sino esta forma que tenemos acá. Fíjense $\boldsymbol{y} =$
147	$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ va a ser igual a “a” a la x $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$
149	P_ ¿Qué quiere decir que va a ser mayor que cero? Qué va a ser un número positivo, nunca vamos a
150	conseguir una base negativa. Siempre va a ser mayor que cero (a> 0).
	La profesora repite la definición e ilustra sobre la recta real el por qué es (a> 0).
151	P_ ¿Qué es lo que quiere decir? Lo ubicamos en la recta real (es dibujada en la pizarra). Por aquí está
152	el cero, por acá los negativos, para acá están los positivos ¿pero qué pasa? Que dice que es mayor que
153	cero; o sea, que va a tomar todos estos elementos que están por aquí y también todo estos que están
154	por acá
	
155	Pero no va a tener este elemento
156	A_ ¿El cero?
157	P_ Porque, fíjense que dice que a es mayor que cero, pero distinto de 1 ($\boldsymbol{a} > 0$ pero $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$). O sea
158	que puede ser igual a 0,1; 0,2; 0,3; 0; 1000, pero nunca va a ser 1. Ok, después 1,6; 1; 20
159	Pero no va a tener este elemento.

Primera clase: función exponencial/ Episodio 7

La profesora escribe en la pizarra ejemplos de función exponencial
166 P_ Son ejemplos, copien; punto y aparte, son ejemplo de función exponencial

171 P_ Vamos a colocar otro (Escribe en la pizarra $(\frac{1}{3})^{x}$). También puede ser $(\frac{1}{2})^{-x}$, negativo también. O
172
173 sea que no siempre “x” les va a aparecer positivo, puede ser que les aparezca de esta forma, ok ($\frac{1}{2}$)-^{x}
(Pausa)

El episodio 6 y 7 muestran esencialmente:

1) Un momento del primer encuentro (MPE) por cuanto P_2 dirige el encuentro de los estudiantes con la OM: Función Exponencial. Pero este encuentro se realiza a través de la presentación directa, por parte de P_2, de los elementos tecnológicos-teóricos al definir la función exponencial; y además, con protagonismo casi exclusivo la profesora presenta algunos ejemplos. En consecuencia, en estos episodios se observó una convergencia del Momento del primer encuentro (MPE) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME), el momento tecnológico-teórico (MTT) y el momento del trabajo de la técnica (MTt). Adicional, se evidenció una ausencia casi absoluta del problema generador de las actividades, de la razón de ser. La profesora comienza presentando las respuestas a las interrogantes, pero sin interrogantes iniciales.
2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno.
3) Uso de elementos ostensivos sin significado. La docente presenta el tema y se muestra la forma general de la función exponencial, como un elemento ostensivo y carente de justificación. P_ Listo; colocamos entonces, una función exponencial es una función de la forma: $\boldsymbol{y = f(x) = a^x}$, donde a es un número real, a mayor que cero ($\boldsymbol{a} > 0$) y distinto de uno a$\neq$ 1

   P_2 hace referencia a las funciones trigonométricas para presentar la forma general de la función exponencial e ilustra con la recta numérica para cuáles valores está definida.

4) Tareas planteadas en forma muy genéricas, supuestas o implícitas dando así lugar a especulaciones, divagaciones, ambigüedades.

Sin duda, la *definición de la función exponencial*, se comprende en el bloque tecnológico-teórico de la OMR (ver cuadro Nro. 10, ubicado en el capítulo IV).

Primera clase: función exponencial/ Episodio 8

La profesora dicta en voz alta al grupo:
P_ Coloquen allí, gráfica de una función exponencial
P_ de una función exponencial. Gráfica de una función exponencial. Fíjense bien, aquí presten bien atención a lo que es la gráfica. La vamos a estar trabajando en el cuaderno y para la próxima clase la vamos a estar trabajando más formales, en el papel milimetrado. Así que deben traer sus escuadras para hacer ese trabajo en esa próxima clase, bien ¡ojo con eso!
P_ Vamos entonces a hacer la gráfica de esta función exponencial $y = 2^x$
P_ Ubicamos los puntos para poder nosotros representar gráficamente esta función exponencial ¡Era lo que haríamos!
P_ ¿Qué vamos a hacer entonces? Ubicamos la función, recordemos que siempre le damos los valores arbitrarios ¿a quién? ¿A quién le damos los valores arbitrarios?
A_ ¿A la variable?
P_ ¿A qué variable? ¡A la variable "x", aja!
P_ Entonces coloquen allí representar gráficamente. Representar gráficamente la función $y = 2^x$, allí está en la pizarra, $y = 2^x$. Entonces me decían que para poder representar esa función lo primero que tenemos que hacer ¿Es? ¿Qué es lo primero que tenemos que hacer para representarla gráficamente? Construir la tabla de valores; donde le damos valores arbitrarios a la x para hallar los de "y". En este caso es igual a 2^x ¿qué es lo que hacemos? Desde el valor -3. Para hacerlo más sencillo, vamos a tomar aquí hasta el 3.

x	Y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Primera clase: función exponencial/ Episodio 9

	La profesora sustituye cada valor de x en la función $y = 2^x$ para determinar, a traves del cálculo de potencias, los valores de y
194 **195** **196** **197** **198** **199** **200**	P_ ¿Qué es lo que vamos a hacer? Donde aparece la x ¿a quién voy a sustituir? A_ ¡-3! P_ ¡-3! ¿Qué más? $y = 2^{-3}$ Como el exponente es negativo ¿Qué es lo que tengo que hacer para poderlo resolver? A_ Lo paso, 1 sobre 2 me da positivo. P_ Ok, 1 sobre 2^3 y ¿cuánto me da ese resultado? ¿ 2^3 a qué es igual? Entonces ¿me quedaría cuánto? A_ Uno sobre 8: $\frac{1}{8}$ ...
208 **209**	P_ Fíjense que siempre es positiva porque la base es positiva. El negativo del exponente, no me va a alterar el signo de esta base. Seguimos entonces, cuando x vale -1, 2^{-1} ¿a qué va a ser igual?
228 **229**	P_ ¿qué quiere decir? Realmente qué es lo que va a pasar; realmente que va ser lo nuevo; fíjense acá (lo escrito en la pizarrón) $y = 2^{-3}$ $y = \frac{1}{2^3}$ $y = \frac{1}{8}$ $y = 2^{-2}$ $y = \frac{1}{2^2}$ $y = 2^{-1}$ $y = \frac{1}{2^1}$ $y = \frac{1}{2}$/ $y = 2^0$/$y = 1$ $y = 2^1$ $y = 2$ $y = 2^2$ $y = 4$ $y = 2^3$ $y = 8$ X Y -3 $\frac{1}{8}$ -2 $\frac{1}{4}$ -1 $\frac{1}{2}$ 0 1 1 2 2 4 3 8 $y = 2^1$ $y = 2$ $y = 2^2$ $y = 4$ $y = 2^3$ $y = 8$

En los episodios 8 y 9 se observó, fundamentalmente:

1) Un momento del primer encuentro (MPE) dado que P_2, con protagonismo casi absoluto dentro del proceso de estudio, al presentar la función exponencial de la forma $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$. Para ello, formula interrogantes muy genéricas, preguntas y respuestas al mismo tiempo, tales como:

   P_ Entonces coloquen allí representar gráficamente. Representar gráficamente la función $y = 2^x$, allí está en la pizarra, $y = 2^x$. Entonces me decían que para poder representar esa función lo primero que tenemos que hacer ¿Es? ¿Qué es lo primero que tenemos que hacer para representarla gráficamente? Construir la tabla de valores; donde le damos valores arbitrarios a la x para hallar los de "y". En este caso es igual a 2^x ¿qué es *lo que hacemos? Desde el valor -3. Para hacerlo más sencillo, vamos a tomar aquí hasta el 3.*

En este sentido, se muestra una convergencia del Momento del primer encuentro (MPE), un parcial momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME) y del momento tecnológico teórico (MTT).

2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático.
3) Uso de elementos ostensivos con ausencia de significado. P_2 presenta la función exponencial de la forma $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$, como un elemento ostensivo y carente de justificación.
4) Las tareas planteadas se muestran de forma muy genéricas, supuestas o implícitas dando así lugar a divagaciones, ambigüedades; las cuales podrían propiciar la existencia de errores durante el trabajo matemático de los estudiantes.

Conviene destacar que tanto el trabajo matemático relativo al cálculo de potencias para la elaboración de la técnica *Construcción de tabla de valores;* que responde a la tarea *Representación Grafica de la Función Exponencial*, como la técnica y tarea referidas se corresponde en la OMR (ver cuadro Nro. 8, ubicado en el capítulo IV).

Primera clase: función exponencial/ Episodio 10

P_2 puntualiza la Presencia de los exponentes negativos en física, así como trabajo previo de funciones

P_ ¡La potenciación! ya ustedes la conocen y esta parte de los signos negativos ya ustedes lo habían trabajado en física. Los signos de exponente negativo, lo nuevo acá realmente va a ser es la construcción de la gráfica; porque va a ser una gráfica diferente va a tener una forma diferente a la que ya hemos visto. De paso, ya ustedes vieron la construcción de la función seno, coseno, tangente ¡que les quedo buenísimo! Vamos a ver si ya aprendieron eso; si ya graficaron pueden…

A_ ¡Profe…!

P_ ¡Vamos a copiar esto! (tabla de valores). Así es como les va a salir, lo único que les puede cambiar es la base. Más adelante lo verán. ¿Hasta aquí alguna pregunta? (Pausa)

P_ Es importante destacar el realizar divisiones tales como:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 8 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}125 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

En el episodio 10 se muestra un momento del primer encuentro (MPE), pero un primer encuentro que realiza P_2, en forma protagónica y directa, al referir el *trabajo de potencias con exponentes negativos en física y la construcción de la gráfica* como un elemento nuevo en el proceso de estudio de la OM: función exponencial. De hecho, la profesora recuerda la construcción de la gráfica de las funciones trigonométricas. De allí la preeminencia del MPE y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME), el momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento tecnológico-teórico (MTT); durante el episodio. Por otro lado, uso de un lenguaje natural sin rigor matemático.

Cabe señalar que la actividad matemática se muestra de formas muy genéricas, supuestas o implícitas dando lugar a divagaciones, ambigüedades; las cuales podrían propiciar la existencia de errores durante el trabajo matemático de los estudiantes. En efecto, la referida actividad no se encuentra en la OMR (ver cuadro Nro. 8, 9 y 10, ubicados en el capítulo IV).

Primera clase: función exponencial/ Episodio 11

	La profesora ubica puntos (valores de la tabla) en el plano, a pulso. Luego, verifica cómo escritura de la clase. Posteriormente, dicta en voz alta, las propiedades de la función exponencial
248	P_ Propiedades de la Función Exponencial *El dominio de la función exponencial es el conjunto de todos los números reales. *El rango de la función exponencial es el conjunto de todos los números reales positivos. *La grafica $\boldsymbol{y = a^x}$ muestra un crecimiento exponencial si a es mayor que 1, $\boldsymbol{a} > 1$ y se dice que la función es creciente. *La grafica $\boldsymbol{y = a^x}$ muestra un decrecimiento exponencial si $\boldsymbol{1} > \boldsymbol{a} > 1$, si a esta entre 0 y 1; o sea muestra un decrecimiento exponencial, si a es mayor que cero y menor que 1. A esta función se le llama función decreciente. *Esta función es inyectiva y sobreyectiva a la vez, lo que quiere decir, que es biyectiva.
249	P_ ¿Si es inyectiva y sobreyectiva qué es?
250	A_ Biyectiva
251	P_ Biyectiva.

El episodio 11 se evidencia un momento del primer encuentro (MPE) por cuanto P_2 dirige el encuentro de los estudiantes con las propiedades de la función exponencial; pero este encuentro se efectúa mediante la presentación directa, por parte de P_2, de los elementos tecnológicos-teóricos, con protagonismo casi exclusivo de la profesora. En consecuencia, en el episodio se muestra una convergencia del Momento del primer encuentro (MPE) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME), el momento tecnológico-teórico (MTT) y el momento del trabajo de la técnica (MTt).

Asimismo, se muestra en el episodio una ausencia casi absoluta del problema generador de las actividades; esto es la razón de ser. La profesora comienza presentando las respuestas a las interrogantes, pero sin interrogantes iniciales. Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno. Uso de elementos ostensivos sin significado. Asimismo, tareas planteadas en forma muy genéricas, así lugar a especulaciones, divagaciones, ambigüedades.

Cabe aclarar que las *propiedades de la función exponencial*, se comprende en el bloque tecnológico-teórico de la OMR (ver cuadro Nro. 10, ubicado en el capítulo IV).

Primera clase: función exponencial/ Episodio 12

	La profesora indica otra actividad a realizar
252 253 254	P_ Vamos a ser un ejercicio aquí en la pizarra para repasa la forma que va a tomar las funciones exponenciales que van hacer en su cuaderno, y luego, vamos hacer otra en el papel milimetrado que es lo que me van a entregar a mí.
256 257 258	P_ La del papel milimetrado la van hacer ustedes solos. Estas las vamos a hacer entre todos ¡Colocamos allí entonces, Calcula los valores, calcula los valores! Calcula los valores que toman las siguientes funciones para x igual
259	A_ ¿Igual?
260	P_ -2, -1, 0, 1 y 2. Desde -2 hasta 2
261	P y A_ -2, -1, 0, 1 y 2.
262	Y represéntalas gráficamente. Calcular que toma las siguientes funciones exponenciales para $\boldsymbol{x = -2,\ -1, 0, 1, 2}$ y represéntalas gráficamente a) $\boldsymbol{y = 5^x}$ b) $\boldsymbol{y = 5^{-x}}$
263 264	P_ Fíjense bien las dos funciones que tenemos allí $\boldsymbol{y = 5^x}$ y $\boldsymbol{y = 5^{-x}}$. Vamos a calcular los valores para esas funciones ¿Qué es lo primero que van a ser? (Pausa)

En este episodio, P_2 plantea a los estudiantes *dos funciones exponenciales*: $\boldsymbol{y = 5^x}$ y $y = 5^{-x}$, de forma directa y con protagonismo casi exclusivo, con la intención de asignar su *representación gráfica y efectuar conclusiones sobre las mismas*. De tal manera, en la actividad matemática se muestra la preeminencia del momento del primer encuentro (MPE) y el momento de la institucionalización (MI); lejos del momento exploratorio del momento (ME), un parcial momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento tecnológico-teórico (MTT).

CLASE $N_0$2

Segunda clase: función exponencial/ Episodio 1

	P_2 escribe en la pizarra y dicta en voz alta:
1 **2**	P_ Trazar las gráficas de las funciones $\boldsymbol{y = (\frac{1}{2})^x}$, $\boldsymbol{y = (\frac{1}{3})^x}$ y $\boldsymbol{y = (\frac{1}{5})^x}$ sobre un mismo eje y analizar las similitudes y diferencias. (Pausas) <u>Nota:</u> P_2 elimina la función $\boldsymbol{y = (\frac{1}{5})^x}$
3 **4**	P_ Pueden sacar el cuaderno pero no deben estar hablando con los compañeros. El salón debe estar en absoluto silencio.

Segunda clase: función exponencial/ Episodio 2

	P_2 verifica asistencia y realiza observaciones
5 6 7 8	P_ Recuerden que este exponente le pertenece tanto al numerador como al denominador. Si me quedara el exponente negativo ¿$\frac{1}{3}^{-3}$? Nota: Se detiene en la pizarra para hacer aclaración P_ $a^{-n} = (\frac{1}{a})^m = (\frac{1}{a^m}).\ (\frac{1}{3^{-3}})$. ¿Cómo hacen para resolverlo? Lo único que tienen que hacer es pasarlo al numerador con ¿signo?

Segunda clase: función exponencial/ Episodio 3

	P_2 verifica asistencia y realiza observaciones (Continuación)
9 10 11 12 13 14	A_ ¡Contrario! P_ Con signo positivo me quedaría $\left(\frac{1}{3^{-3}}\right) = 3^3$. (Pausa) P_ ¡Recuerden el trabajo previo de las gráficas en un mismo plano! Ahora van a realizar estas 3 gráficas (señala las planteadas en pizarra) para la evaluación. A_ ¡Naguará! P_ ¿Cuál es la dificultad? Nota: La P_2 atiende asesorías al grupo, sobre dudas ante la solución de ejercicios de la evaluación. Esto, de forma constante. (Pausas en forma paralelo a la evaluación).

Segunda clase: función exponencial/ Episodio 4

	La profesora expresa al grupo en voz alta, antes de retirarse del aula
15	P_ ¡Vamos a ver como salen en esta evaluación! (Pausas)

5.2.2 Característica de la OMEE de P_2 en torno la Función Exponencial: La reconstrucción de una Organización Matemática (OM) que responde a los *tipos de tareas* matemáticas:

T1: Recordar propiedades de la potenciación. T2: Calcular potencias. T3: Definir función exponencial. T4: Hacer la gráfica de la función exponencial $y = 2^x$. Realizar la grafica en el plano. T5: Enunciar propiedades de la función exponencial

T6: Calcular qué valores toma las siguientes funciones exponenciales para $x = -2$, $-1, 0, 1, 2$

Con todo, se observa que para abordar las *tareas matemáticas*, P_2 plantea siete (7) técnicas matemáticas, entre ellas: t4: Construir tabla de valores, ubicar puntos en el plano cartesiano, representación gráfica de una función exponencial y t5: Enunciado de las propiedades de la función exponencial

Naturalmente, las técnicas proporcionadas por P_2 se interpretan y justifican mediante los siguientes elementos *tecnológicos-teóricos*: Θ_4: Construcción de tabla de valores, grafico de la función exponencial y Θ_5: propiedades de la función exponencial.

5.2.3 Característica del Proceso de estudio u OD de P_2: En el proceso de estudio llevado a cabo por P_2 se muestra el uso de los elementos de la OM: Potenciación, la OM: Funciones Reales y la OM: Funciones Trigonométricas. Actividades de recordación y repetición de carácter muy general, supuestas o implícitas, solicitadas y dirigidas por la profesora quien, con protagonismo casi absoluto, comienza recordando tanto el tema de las funciones reales como las propiedades de la potenciación. Posteriormente, P_2 dicta la definición de función exponencial y escribe algunos ejemplos, para proponer su resolución. Para ello, emplea un lenguaje natural sin rigor matemático alguno; asimismo, utiliza elementos ostensivos y carentes de significados (tal como, la forma general de la función exponencial). Por ejemplo, la tarea T4 se plantea de forma muy general, supuesta e implícita; y por ende, las técnicas para abordar tanto esta como las demás tareas, se proporcionan de manera preestablecida.

En consecuencia, se evidenció una convergencia del momento del primer encuentro (MPE), un parcial momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME) y el momento tecnológico-teórico (MTT). En este sentido, énfasis en la recordar los conocimientos previos que posee el estudiante, más que en la verdadera exploración de la técnica; asimismo, el empleo exclusivo de un técnica que se deriva del elemento tecnológico-teórico.

CLASE N$_0$3

Tercera clase: función logarítmica/ Episodio 1

P$_2$ introduce el tema de la función logarítmica, destacando su presencia en la química
P_ ¡Anoten entonces! Nuestro tema de hoy es función logarítmica. (Pausa). P_ Para hablar de la función logarítmica, primero tengo que hablar de lo que es función exponencial, que fue el tema que estuvimos viendo. Ya ustedes han trabajado un poco con los logaritmos en química ¿cierto? A_ No ¿Cómo es eso? (Pausa)

Tercera clase: función logarítmica/ Episodio 2

P$_2$ introduce el tema de la función logarítmica, destacando su presencia en la química
P_ Esos son ejemplos de lo que son funciones exponenciales. Ahora ¿qué va a pasar? ¡Les repito nuevamente! para poder estudiar la función logarítmica, debemos recordar la función exponencial, porque lo vamos a seguir utilizando. Para poder resolver los ejercicios con logaritmos. P_ Que nos dice, hemos visto el grafico donde tenemos que despejar variable; pues si yo tengo la ecuación, vamos a ponérselas sencillitas $\boldsymbol{x+2=13}$, me piden despejar la variable "X"? A_ Sumamos el opuesto de 2. P_ Sumamos el opuesto de 2 en ambos miembros. Entonces nos quedaría $\boldsymbol{x+2-2=13-2}$, aquí (2do. Miembro) nos quedaría 13 – 2 $\boldsymbol{x=13-2}$, que vamos a tener aquí el valor de x sería -2, $\boldsymbol{x=-2}$, y ya allí quedo la variable despejada pero ¿qué pasa cuando tengo dos variables? Tengo $\boldsymbol{y+3x=6}$, tengo 2 variables pero me piden despejar la variable y ¿qué hacemos para despejar la variable y? A_ ¿Tiene que pasar primero la X? P_ Nos quedaría entonces. Fíjense, lo que hacemos es sumar el opuesto de $\boldsymbol{3x}$, lo que decimos pasarlo al otro lado. Estamos sumándole el opuesto ¿ $\boldsymbol{3x-3x}$? Aquí nos daría cero (0) ¿correcto? A_ ¡Sí! P_ Y acá nos quedaría 6 – 3 X, me queda la variable despejada y allí tengo la variable y despejada $\boldsymbol{y+3x=6}$ $\boldsymbol{y+3x-3x=6-3x}$ $\boldsymbol{y+0=6-3x}$ $\boldsymbol{y=6-3x}$. Aquí tengo la variable X despejada (refiriéndose al despeje anterior) ¿qué pasa aquí en esta función Y= 6 – 3 x?

En los episodios 1 y 2, se observa un momento del primer encuentro (MPE) en el cual P_2 introduce, de forma directa y con un rol protagónico, del tema de la función logarítmica. Por un lado, refiere la presencia de la noción de los logaritmos en el área de la química; y por otro, recuerda el tema de la función exponencial para estudiar la función logarítmica. En este orden, realiza el despeje de ecuaciones, empleando la transposición de términos en ambos miembros de las de la igualdad.

De acuerdo a lo anterior, el los episodios se muestra una convergencia del MPE y el momento de la institucionalización; esto, lejos del momento exploratorio (ME), momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento tecnológico-teórico (MTT). Asimismo, uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno; así como de elementos ostensivos carentes se significados. Tanto el tema como la tarea despejar variables, son planteadas de forma muy general, supuesta e implícita, dando así lugar a especulaciones, divagaciones y ambigüedades.

P_ Que nos dice, hemos visto el grafico donde tenemos que despejar variable; pues si yo tengo la ecuación, vamos a ponérselas sencillitas $x + 2 = 13$*, me piden despejar la variable "X"?*
P_ Sumamos el opuesto de 2 en ambos miembros. Entonces nos quedaría $x + 2 - 2 = 13 - 2$
¿qué pasa cuando tengo dos variables? Tengo $y + 3x = 6$*, tengo 2 variables pero me piden despejar la variable* y *¿qué hacemos para despejar la variable* y*?*
A_ ¿Tiene que pasar primero la X?
P_ Nos quedaría entonces. Fíjense, lo que hacemos es sumar el opuesto de $3x$*, lo que decimos pasarlo al otro lado.*

En relación al espacio analizado, la actividad matemática descrita se contrapone con la OMR (ver cuadros Nro. 8, 9 y10; ubicados en el capítulo IV).

Tercera clase: función logarítmica/ Episodio 3

P_2 repasa la noción de función inversa
A la función Y= 6 – 3 x, así como a la función exponencial.
P_ Necesitamos despejar aquí también. Hallar la inversa en esta función ¿Qué hacemos? Vamos hacer un cambio de variable y va a quedar $\boldsymbol{x = a^y}$ (docente y alumnos)
$\boldsymbol{y = a^x}$
C.V; a en Y es esto; esto es a entre Y, $\boldsymbol{x = a^y}$, a en y es esto; esto es a entre y, esta expresión $\frac{a}{y}$.
Esto es $\boldsymbol{a^y}$ (2do miembro). Entonces tenemos allí esa $\boldsymbol{a^y}$ ¿qué vamos hacer con ella? $\boldsymbol{x = a^y}$¿Qué es lo que ocurre aquí en este caso? Yo necesito despejar y, necesitamos que Y nos quede solita. Es aquí donde empezamos a introducir lo que son los logaritmos, el símbolo de logaritmo Log. Algunas veces parece escrito de esta manera Log, significa logaritmo (log = Lg = Logaritmo).
A_ ¡No lo hemos visto!
P_ Bueno, en este caso para poder despejar esta Y aquí vamos a utilizar la siguiente expresión $\boldsymbol{x = a^y}$ y el logaritmo pero el llamado logaritmo en base a de esta manera.
$\boldsymbol{\log a = \log_a a^y}$ ¿Cómo lo hacemos entonces? lo voy hacer en este primer miembro y lo vamos hacer en este 2do miembro.(Pausa)
P_ Aplicamos entonces el logaritmo, en base a, de X va a ser igual que el logaritmo, en base a, de $\boldsymbol{a^y}$. Entonces ¿qué es lo que ocurre? Aquí en lo que acabamos de entender ¿qué va a pasar aquí? Este $\boldsymbol{\log_a a^y}$se va a simplificar; esto se cancela $\boldsymbol{\log_a a^y}$ ¿y a mí solo me va a quedar?
A_ ¡La y!
P_ ¡Solo la y! Y entonces la expresión queda como $\boldsymbol{\log_a x = y}$
A_ ¡Profe, hágale la rayita para acordarnos siempre!
P_ $\boldsymbol{\log_a x = y}$. Esta Es la expresión con la que vamos a estar trabajando: $\boldsymbol{\log_a x = y}$. Ya sabemos que esta es la expresión $\boldsymbol{x = a^y}$ ósea que cuando intente resolver esto: $\boldsymbol{y = \log_a x}$ Lo llevo a una función exponencial.
Si me dan un logaritmo y debo resolver un logaritmo y tengo una incógnita lo llevo a la función exponencial, para hallar ese valor de la incógnita; es por eso que primero tenemos que ver la función exponencial, que es la inversa de la función logarítmica, para luego poder ver que es la función logarítmica, Vamos a copiar hasta aquí. (Pausa)
P_ Copiamos entonces, esta expresión $y = \log_a x$ es equivalente a $x = a^y$ (Pausa)

Tercera clase: función logarítmica/ Episodio 3

P_2 Expresa definición de la Función Logaritmica
P_ Sabiendo que la expresión $\boldsymbol{y = \log_a x}$ es equivalente a $\boldsymbol{x = a^y}$que es exponencial; entonces debemos recordar que a deber ser ¿mayor que quien?
A_ ¡Que cero (0)!
P_ Cero (0), distinto a uno (1). Recuerden que esto es una de las condiciones de la función exponencial, como me está diciendo que la expresión es equivalente, entonces se debe cumplir esta misma condición. Entonces escriban allí como se escribe esta expresión.
A_! Ya va, profe!
P_ $\boldsymbol{y = \log_a x}$ (y igual al logaritmo en base a de x)
A_ ¿Ah?
P_ Logaritmo en base a de x. Nuestra definición

El episodio 3 muestra esencialmente:

1) Un momento del primer encuentro (MPE) por cuanto P_2 dirige el encuentro de los estudiantes con la OM: Función logarítmica. Pero el encuentro se da a través de la presentación directa, por parte de P_2, de la tarea *hallar la inversa de la función exponencial* y los elementos tecnológicos-teóricos al definir la función logarítmica; con protagonismo casi exclusivo, la profesora presenta algunos ejemplos. Así pues, en los episodios se observaron preeminencia del Momento del primer encuentro (MPE) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME), el momento tecnológico-teórico (MTT) y el momento del trabajo de la técnica (MTt). Adicional, se evidenció una ausencia casi absoluta del problema generador de las actividades, de la razón de ser. La profesora comienza presentando las respuestas a las interrogantes, pero sin interrogantes iniciales.
2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno.
3) La docente presenta el tema y se muestra la forma general de la función logarítmica, como un elemento ostensivo y carente de justificación.
4) Tareas planteadas en forma muy genéricas, supuestas o implícitas dando así lugar a especulaciones, divagaciones, ambigüedades; y por consiguiente, errores por parte de los estudiantes.

Vale la pena aclarar que la tarea *hallar la inversa de la función exponencial* no se comprende en el bloque práctico de la OMR, mientras que la *definición de la función logarítmica*, si se comprende en el bloque tecnológico-teórico de la referida OMR (ver cuadros Nro. 8 y 9; ubicados en el capítulo IV).

Tercera clase: función logarítmica/ Episodio 4

P_2 escribe en la pizarra el siguiente cuadro, con algunas expresiones, para hallar equivalencias de la forma logarítmica

P_ ¡Entonces vamos a ver algunas expresiones! Algunas expresiones. <u>Vamos hallar las Equivalencias</u>

Forma Exponencial	Forma Logarítmica
$5^2 = 25$	
$2^5 = 32$	
$3^{-2} = \frac{1}{9}$	
$P^n = k$	

P_ ¡Ok, jóvenes vamos aquí! Tenemos aquí estas expresiones en forma exponencial, escribir ahora en forma logarítmica ¿Qué nos dice la forma exponencial $\boldsymbol{y = a^x}$ es lo mismo decir $\boldsymbol{a^x = y}$ ¿Quién es a?
A_5
P_ ¿quién es x?
A_ 2
P_ ¿quién es Y?
A_ 25
P_ Ok, llevemos entonces a la forma logarítmica. Dígame que tendría que escribir.
A_ ¡Ah, Log!
P y A_ Log_a
P_ ¿cuál es la base?
A_ ¡a!
P_ ¿cuál es a?
A_ 5
P_ ¿5... a la 2? ¡No!
A la x.
P_ Pero ¿quién es x?
A_ 2
P_ ¡Ok, mire!
A_ ¡Ah...! Lo que pasa es que uno se confunde.
P_ $\boldsymbol{\log_a x}$ ¿quién es "a"? Aquí esta, es la base ¿quien es x el exponente? Y ¿quién es Y?
P y A_ ¡El resultado!
P_ ¡El resultado! $\boldsymbol{\log_5 2 = 25}$
P_ ¡Vamos con la segunda (2da)!

Tercera clase: función logarítmica/ Episodio 4

P_2 escribe en la pizarra el siguiente cuadro, con algunas expresiones, para hallar equivalencias de la forma logarítmica (continuación)

Se obtienen e interpretan los resultados

Forma Exponencial	**Forma Logarítmica**
$\mathbf{5^2 = 25}$	$\mathbf{\log_5 2 = 25}$
$\mathbf{2^5 = 32}$	$\mathbf{\log_2 5 = 32}$
$\mathbf{3^{-2} = \frac{1}{9}}$	$\mathbf{\log_3(-2) = \frac{1}{9}}$
$\mathbf{P^{\boldsymbol{n}} = k}$	$\mathbf{\log_p \boldsymbol{n} = k}$

108 P_ Ósea que si se les da el logaritmo, ustedes lo pasan a la forma exponencial, si se les da en
109 forma exponencial ustedes lo pasan a la forma logarítmica.
110 A_ y ¿cómo es en la forma exponencial?
111 P_ Igual, tienes a "a"
112 A_ ¡Ah!..., Ok!
113 P_ ¿quién es X? Esta expresión que está aquí (exponente) y ¿quién es y? El resultado
114 A_ ¡Ah, ya entendí! Lo que prácticamente se le va a quitar es el logaritmo ¡Mas Nada! Cuando se
115 vaya a pasar para acá (exponencial) se quita el logaritmo, y cuando se vaya a pasar para acá
116 (logarítmica). ¿Copiamos?
117 P_ Fíjense aquí, ustedes lo tienen
118 $5^{\overline{2}}$, $5^2 = 25$ ¿qué es lo que tiene aquí de diferente? Que no aparece el logaritmo. Lo que tienen es
119 quitar el logaritmo. (Pausa).
120 P_ Fíjense bien jóvenes, lo que tienen que recordar para que esta parte es la potenciación. Si
121 recuerden la potenciación es más fácil resolver.

Tercera clase: función logarítmica/ Episodio 6

P_2 presenta la siguiente actividad, indicando a los alumnos pasar a la pizarra. O bien, hacerlo tanto en el cuaderno como en la pizarra; tomando en cuenta el ejemplo ya realizado.

126 P_ Escribir en forma logarítmica las siguientes expresiones:

$h^{\overline{k}} = P \rightarrow \log_h k = P$

$7^2 = 49 \rightarrow \log_7 2 = 49$

$(\frac{1}{3})^4 = 81 \rightarrow \log_{(\frac{1}{3})} 4 = 81$

$(m^2)^{1/2} = a \rightarrow \log_{m^2}(\frac{1}{2}) = a$

$(\sqrt{2})^x = 100 \rightarrow \log_{\sqrt{2}} x = 100$

$27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \rightarrow \log_{27}(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$

$(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \rightarrow$ $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

127 P_ <u>Ok, ya vimos como pasar de la forma exponencial a la forma logarítmica</u>. (Pausa).

En los episodios 4 y 6 se pueden observar un momento del primer encuentro (MPE) por cuanto P_2 plantea la *tarea de hallar equivalencias*, de forma directa y con rol protagónico. En este sentido, recuerda la definición de la función logarítmica. De ahí que en los episodios se muestra una convergencia del momento del MPE, un parcial momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME) y el momento tecnológico-teórico (MTT).

P_ ¡Ok, jóvenes vamos aquí! Tenemos aquí estas expresiones en forma exponencial, escribir ahora en forma logarítmica ¿Qué nos dice la forma exponencial $y = a^x$ es lo mismo decir $a^x = y$ ¿Quién es a?
P_ $log_a x$ ¿quién es "a"? Aquí esta, es la base ¿quien es x el exponente? Y ¿quién es Y?
P y A_ ¡El resultado!
P_ ¡El resultado! $log_5 2 = 25$
P_ Ósea que si se les da el logaritmo, ustedes lo pasan a la forma exponencial, si se les da en forma exponencial ustedes lo pasan a la forma logarítmica.
P_ ¿quién es X? Esta expresión que está aquí (exponente) y ¿quién es y? El resultado.

A decir verdad, en la tarea planteada por P_2 no se encuentra en el bloque de tareas de la OMR; sin embargo, la equivalencia entre expresiones de la forma logarítmica y la forma exponencial se comprende en las técnicas matemáticas. Por consiguiente, la definición de la función logarítmica se corresponde con el bloque tecnológico-tecnológico de la referida OMR (ver cuadros Nro. 8, 9 y 10; ubicados en el capítulo IV).

Dentro del espacio analizado, se muestra durante la actividad matemática, errores matemáticos significativos, en relación a la equivalencia expresada por P_2 Por ejemplo: "*P_ ¡El resultado! $log_5 2 = 25$*". Ahora bien, al comparar elementos de la expresión dada: $5^2 = 25$, con la ecuación $y = \log_a x$ es equivalente a $x = a^y$, se debe obtener $\log_5 25 = 2$: no obstante, P_2 expresa que solo hay que suprimir el logaritmo: "*P_ Fíjense aquí, ustedes lo tienen*

5^2, $5^2 = 25$ *¿qué es lo que tiene aquí de diferente? Que no aparece el logaritmo. Lo que tienen es quitar el logaritmo"*

En este sentido, podría afirmarse que no muestra una correspondencia entre el procedimiento indicado y el procedimiento realizado durante la actividad matemática desarrollado por la docente en su proceso de estudio.

A esta altura, emergen en la autora de la actual investigación, interrogantes tales como: ¿Qué aspectos fueron considerados al momento de plantear la tarea hallar equivalencias entre expresiones de la forma logarítmica y de la forma exponencial? ¿Qué elementos podrían generar diferencias entre el procedimiento que expresa y el que escribe para abordar la tarea planteada?

¿Por qué ningún estudiante identifico diferencias entre la equivalencia dada $y = \log_a x$ es equivalente a $x = a^y$ y los resultados obtenidos? Es decir, los resultados obtenidos no se interpretan son cuestionados por el grupo de estudiantes.

De igual modo, en los episodios 4 y 6 se emplea un lenguaje natural sin rigor matemático y elementos ostensivos carentes de significados. La tarea matemática es planteada de forma muy general, dando lugar a especulaciones, divagaciones y ambigüedades.

Tercera clase: función logarítmica/ Episodio 5

	P_2 dicta en voz alta, algunos logaritmos especiales
122	P_ Logaritmos Especiales
123	Se le llaman logaritmos decimales o de Briggs cuando la base es $a = 10$ $\log_{10} x = \log x$
124	Se le llama logaritmos naturales o neperianos cuando la base es $a = e$, estos
125	logaritmos se simboliza $\ln_e x = \ln x$

En el episodio 5, se evidencia un momento del primer encuentro (MPE) dado que P_2 dirige el encuentro con los tipos de logaritmos. Para ello, P_2 presenta directamente *la definición de dos logaritmos especiales:* $\log_{10} \mathrm{x} = \log \mathrm{x}$ y el $\ln_{\mathrm{e}} \mathrm{x} = \ln \mathrm{x}$; con protagonismo casi exclusivo. En la actividad matemática, se observa la preeminencia del momento del primer encuentro (MPE) y del momento de la institucionalización (MI); al margen del momento exploratorio (ME), momento del trabajo de la técnica

(MTt) y el momento tecnológico-teórico (MTT). Análogamente, la profesora emplea un lenguaje natural sin rigor matemático y elementos ostensivos carentes de significados. Sin duda, la tarea *definir Logaritmos Especiales*, se encuentra ausente entre las tareas de la OMR (ver cuadro Nro. 08, ubicado en el capítulo IV); aun cuando, en la tecnología se comprenden estos logaritmos (ver cuadro Nro. 9, ubicado en el capítulo IV).

Tercera clase: función logarítmica/ Episodio 7

	P_2 dicta en voz alta y escribe en la pizarra
128	P_ ¡Ok, vamos entonces! Grafica de la Función Logarítmica.
130	P_ Grafica de la Función Logarítmica.
132	P_ Primer caso: Para $a > 1$. Recuerden que la función logarítmica es $y = \log_a x$
133	A_ ¿Para $a > 1$?
134	P_ ¡Para $a > 1$! Ok, vamos a estudiar un caso en particular. Miren aquí, esto va a ser parecido,
135	la grafica de la función logarítmica, el procedimiento de lo que es la función exponencial;
136	porqué para hacerlo vamos a ser uso de lo que es la función exponencial.
137	Me dice el primer caso que para $a > 1$ ¿qué es lo que vamos hacer? Si tenemos que $a = 2$,
138	entonces tendríamos el $\log_2 x = y$; no de a de x, porque ¿quién es a? a es la base. Ok, a es la
139	base ¿Qué es lo que vamos hacer entonces? Para poder resolver, hallar la tabla de valores; lo
140	vamos a llevar a una función exponencial ¿cómo nos quedaría si lo llevamos a la forma
141	exponencial?
150	P_ ¿De "Y"? Recuerden que ¿por qué trabajamos con x e y? Porque es la representación del
151	plano cartesiano. Vamos a trabajar con el plano "x".
152	¡Listo! Allí tienen entonces la tabla de valores, busquen los puntos. Usen calculadora.
	X **Y**
	-2
	-1
	0
	1
	2
153	P_ Entonces vamos hacer esa grafica de la función exponencial para ver el ejemplo.
154	P_ ¿Están haciendo la gráfica? Eso es una función exponencial. Ya hicimos la gráfica antes
155	$2^x = y$, con esos valores que está allí
159	P_ ¡Claro, ahí está X! Lo primero es hallar la tabla de valores. (Pausa).
160	Ok, muchachos. Miren jóvenes les estoy colocando esta, repasando nuevamente lo que era la
161	función exponencial y ya se les olvido y acabamos de verlo.
162	P_ ¡Ok, jóvenes! Miren les voy a dejar esto de tarea, para que revisen. No quiere decir que
163	terminamos así que no se me alegren.

En los episodios 7 se evidencia:

1) Un momento del primer encuentro (MPE) que realiza P_2, con protagonismo casi absoluto dentro del proceso de estudio, al presentar la función logarítmica $\mathbf{log_2}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$; esto, con el propósito de recordar la función exponencial y equivalencias entre expresiones logarítmicas y exponenciales. En este sentido, se observó una convergencia del Momento del primer encuentro (MPE) y el momento de la institucionalización; en ausencia del momento exploratorio (ME), el momento del trabajo de la técnica (MTt) y del momento tecnológico teórico (MTT).
2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno.
3) Uso de elementos ostensivos con ausencia de significado. P_2 presenta la función logarítmica de la forma $\mathbf{log_2}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, como un elemento ostensivo y carente de justificación. Solo se puntualiza seguir el procedimiento empleado en la representación gráfica de la función exponencial; de ahí que se asigne como tarea propuesta.
4) Las tareas planteadas se muestran de forma muy genéricas, supuestas o implícitas dando así lugar a divagaciones, ambigüedades; las cuales podrían propiciar la existencia de errores durante el trabajo matemático de los estudiantes.

Cabe señalar que la tarea *Representación Gráfica de la Función logarítmica*, se comprende en el bloque práctico de la OMR (ver cuadro Nro. 8, ubicado en el capítulo IV).

Tercera clase: función logarítmica/ Episodio 8

	P_2 dicta en voz alta, las Propiedades de la Función Logarítmica
164 **165** **166** **167** **168** **169** **170** **171** **172**	P_ Propiedades de la función logarítmica. Propiedades de la función Logarítmica. (Pausa) A_ ¡Ya va profesora! ¿Propiedades? (Pausa) 1) El dominio es el conjunto de todos los números reales positivo. 2) El rango son todos los números reales. 3) Si a < 1, el logaritmo base a es una función creciente. 4) Si 0 < a < 1, el logaritmo base a es decreciente. La grafica pasa por el punto (0,1). P_ Lo pueden meter en la calculadora ¿Tiene calculadora? ¿Quién la tiene? Mira allí donde dice Log y, coloquen el 1. Log(1) = 0. Log (1) ¿cuánto te da? Aún no saben usar la calculadora. A_ ¡Cero (0)! 1) El logaritmo de 1 es cero (0) 2) La grafica pasa por el punto (a, 1) ; quiere decir que el logaritmo de la base es igual a la unidad. 3) El logaritmo base a x no está definido. Si X es negativo o cero. **La profesora hace referencia al uso de la calculadora para comprobar esta última propiedad** P_ Quiere decir que si ustedes buscan el logaritmo de cero, en la calculadora, les va a parecer error. O si intenta hallar el logaritmo de - 2, también les va aparecer un error, Que quiere decir que no está definido el logaritmo para elementos negativos no para cero (0), por eso le dice que a < 0. 4) Es inyectiva y sobre inyectiva; por tanto, es biyectiva.

Tercera clase: función logarítmica/ Episodio 9

	P_2 dicta en voz alta las Aplicaciones de las propiedades logarítmicas
173	P_ Aplicaciones de las propiedades. Aplicaciones de las propiedades de los logaritmos. 1) Logaritmo de la Unidad. El logaritmo de la unidad, en cualquier base, es cero (0) $\mathbf{\log_a 1 = 0}$ 2) Logaritmo de la base. El logaritmo de la base, para toda la base, es igual a la unidad. $\mathbf{\log_a a = 1}$ 3) Logaritmo de un producto. El logaritmo del producto de dos (2) números es igual a la suma de los logaritmos de $\mathbf{\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y}$ 4) Logaritmo de un cociente. El logaritmo del cociente de dos (2) números es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor: $\mathbf{\log_a(\frac{x}{y}) = \underset{\text{Dividendo}}{\log_a x} - \underset{\text{Divisor}}{\log_a y}}$

Tercera clase: función logarítmica/ Episodio 9

	P_2 dicta en voz alta las Aplicaciones de las propiedades logarítmicas
174 175 176	5) Logaritmo de una Potencia. El logaritmo de una potencia, de la base, es el producto del exponente por el logaritmo de la base. $\log_a x^n = n.\log_a x$ P_ Lo que pasa a multiplicar es el exponente n. Estas propiedades ustedes la van a sacar en una ficha, cuando vayamos hacer la evaluación, ustedes van usar sus fichas con sus propiedades ¿Bien? 6) Logaritmo de la raíz. El logaritmo de la raíz de un número es igual al logaritmo del número dividido por el índice de la raíz. $\log_a \sqrt[n]{P} = \frac{\log_a P}{n}$

En los episodios 8 y 9 se muestran esencialmente:

1) Un momento del primer encuentro (MPE) por cuanto P_2 dirige el encuentro con los logaritmos. Para ello, P_2 realiza la presentación directa de los elementos tecnológicos-teóricos al definir las propiedades de la función logarítmica y las propiedades de los logaritmos, con un protagonismo casi exclusivo. En consecuencia, en los episodios se observó la preeminencia del MPE y el momento de la institucionalización (MI); con ausencia del momento exploratorio (ME), momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento tecnológico-teórico (MTT).
2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno.
3) Uso de elementos ostensivos carentes de significados.
4) Tareas planteadas de manera muy general, dando lugar así a especulaciones, divagaciones y ambigüedades.

Naturalmente, la *tarea: Aplicar Propiedades logarítmicas*, está presente en el bloque práctico de la OMR (ver cuadro Nro. 8); y por ende, forma parte del bloque tecnológico-teórico de la OMR, en conjunto a las propiedades de la función logarítmica (ver cuadros nro. 8 y 9, ubicados en el capítulo IV).

CLASE $N_0$4

Cuarta clase: función logarítmica/ Episodio 1

	P_2 se dirige al grupo y expresa en voz alta:
1	P_ Vamos a comenzar, entonces, mañana vamos a estar aplicando lo de la gráfica. Hoy vamos a
2	estar trabajando con las propiedades de la función logarítmica. Que vimos en la clase anterior.
3	Vamos aplicar esas propiedades, vamos a comenzar colocando un ejercicio ¿las sacaron de una
4	ficha verdad? ¿Cierto?

Cuarta clase: función logarítmica/ Episodio 2

	P_2 escribe el 1er ejercicio en la pizarra y explica el procedimiento
6	P_ Ok, jóvenes, tenemos este logaritmo:
7	1)$\log 4(x+2)^3$. No aparece base ¿cómo? Ojo, no aparece la base ¿Qué quiere decir? ¿Qué tipo de
8	logaritmo es? ¿Qué logaritmo?
9	A_ ¿El logaritmo de la base?
10	P_ Según lo que vimos en la clase anterior. Vimos el logaritmo de base 10 (log) y el logaritmo
11	neperiano (Ln) ¿qué logaritmo es este donde no aparece la base?
12	A_ ¿Logaritmo Ln? ¡Ah!
13	P_ Base 10; cuando la base es 10 no se coloca, no necesariamente se coloca. Puede ser que
14	aparezca, como puede ser que no. Si no aparece ninguna base, es porque estamos hablando del
15	logaritmo de briggs o de base 10.
16	Ahora me piden resolver este logaritmo, yo debo resolverlo aplicando las propiedades de los
17	logaritmos a esta expresión que está aquí (en la pizarra) $\log 4(x+2)^3$ ¿Qué es lo que tenemos que
18	hacer? ¿Qué creen ustedes? (Pausa).
19	P_ Aquí vemos un producto, que es $4(x+2)^3$ ¿Qué nos dice como se resuelve cuando tengo el
20	logaritmo de un producto? Fíjense en las propiedades, revisen las propiedades cuando tenemos un
21	producto ¿Qué debemos hacer? ¡Explíquenme la propiedad para escribirla! (Pausa)
22	P_ El Logaritmo: $\log_a(x.y)$ ¿Qué va a ser igual?
23	A_ $\log_a x + \log_a y$
24	P_ Esa es la propiedad: $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$ ¿Cuál es la otra propiedad? En la que se
25	resta
26	A_ ¡Logaritmo de un cociente!
27	P_ Logaritmo de un cociente. Si aplicamos esa propiedad (del producto) en este ejercicio
28	$\log 4(x+2)^3$ ¿cómo me quedaría? (Pausa).
29	P_ Como aquí no tengo la base, me quedaría $\log_a(x.y)$ ¿Quién es?
30	A_ 4
31	P_ ¿Quién es y?
32	A_ En Silencio.
33	P_ $\log_a 4 + \log_a(x+2)^3$, esto (2do término) se leería log del cubo de (X + 2); es el cubo de x + 2.
34	Ahí estoy aplicando propiedad cuando tengo producto. Ahora hay que ver el caso para una potencia
35	¿Qué me dice la propiedad de una potencia? Revisen allí.
36	A_ ¡De potencia!
37	P_ ¿Qué pasa cuando tengo un exponente? Tengo las propiedades ¡Escucho!
38	P_ ¿Qué dice? $\log_a$ ¿De quién?
39	A_ $\log_a x$
40	A_ $\log_a x^n = n.\log_a x$

Cuarta clase: función logarítmica/Episodio 2

	P_2 escribe el 1er ejercicio en la pizarra y explica el procedimiento (continuación)
	P_ Ahora ¿quién es n aquí $[\log(x+2)^3]$? ¡Vuelvo a escribir la expresión! $\log 4(x+2)^3 = \log 4 + 3\log(x+2)$. Ya está listo, estoy aplicando propiedad ¿que fue lo primero que aplicamos? logaritmo de un producto, y luego, el logaritmo de una potencia y esa es la forma de resolver; esto es todo lo que tenemos $\log 4(x+2)^3 = \log 4 + 3\log(x+2)$. Por eso siempre les digo, si ustedes tienen las propiedades es una ficha, aparte; y allí lo que hacen es ver el ejercicio, la ficha e identificar la propiedad que deben aplicar ¡Esto es todo lo que se hace en este caso, al aplicar las propiedades!

En los episodios 1 y 2 se evidencia:

1) Predominio del momento del primer encuentro (MPE) dado que P_2 plantea, de forma directa, la tarea *Aplicar propiedades de la función logarítmica,* con un rol protagónico. Para ello, recuerda la base de un logaritmo y las propiedades de los logaritmos; sin duda, la técnica para abordar la tarea deriva del elemento tecnológico-teórico. En este sentido, en los episodios se observa la preeminencia del MPE, un parcial momento de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (MI) y el momento tecnológico-teórico (MTT).
2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno.
3) Uso de elementos ostensivos carentes de significados. P_2 emplean las propiedades logarítmicas como una técnica institucionalizada.
4) La tarea es presentada en forma muy genérica, supuestas o implícitas, dando así lugar a especulaciones, divagaciones o ambigüedades.

P_ 1)$log\ 4(x+2)^3$. No aparece base ¿cómo? Ojo, no aparece la base ¿Qué quiere decir? ¿Qué tipo de logaritmo es? ¿Qué logaritmo?
A_ ¿El logaritmo de la base?
P_ Según lo que vimos en la clase anterior. Vimos el logaritmo de base 10 (log) y el logaritmo neperiano (Ln) ¿qué logaritmo es este donde no aparece la base?
A_ ¿Logaritmo Ln? ¡Ah!
P_ Base 10; cuando la base es 10 no se coloca, no necesariamente se coloca. Puede ser que aparezca, como puede ser que no. Si no aparece ninguna base, es porque estamos hablando del logaritmo de briggs o de base 10.

Conviene aclarar que la tarea *Aplicar Propiedades logarítmicas*, se comprende en el bloque práctico de la OMR (ver cuadro Nro. 8); por consiguiente, forma parte del bloque tecnológico-teórico de la OMR (ver cuadro Nro. 9). Cuadros ubicados en el capítulo IV

Cuarta clase: función logarítmica/ Episodio 3

	P_2 escribe el 2do ejercicio en la pizarra y explica el procedimiento
50	P_ Ahora fíjense, este es un cociente, y tengo: 2) $\log_5\left[\frac{(4-x)^2}{3}\right]$. Ese es el logaritmo ¿de un?
51	P y A _ ¡Cociente!
52	P_ ¿cómo lo resolvemos? Vamos a escribir la propiedad aquí
53	A_ El $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
54	P_ $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$. Ok, aplicamos entonces esa propiedad ¿Qué escribo?
55	P y A _ $\log_5$
56	A_ ¡4 solamente! Más o menos, logaritmo de 3
57	P_ ¿qué falta allí? La base: $\log_5 \frac{(4-x)^2}{3} = \log_5(4-x)^2 - \log_5 3$
58	P_ ¿Listo? ¿No hay nada más que hacer?
60	P_ Pero ¿No tengo que resolver este?
61	A_ ¡El exponente!
62	P_ Esta potencia ¿Cómo me queda si resolvemos la potencia?
63	A_ $2\log_5(4-x)$
64	P_ ¡Base 5! ¿Preguntas? ¿Hay algo más que resolver aquí?
71 **72**	P_ En la potencia, el exponente baja a multiplicar el logaritmo y lo demás lo dejamos igual: $2\log_5(4-x)$ (Pausa)
73 **74**	P_ ¡Ojo! No estoy pasando el 2 para ningún lado, estoy aplicando la propiedad. Me dice que en toda división el $\log_a x - \log_a y$ ¿qué tiene el dominador?
75	A_ ¡El 3!
76 **77**	P_ Aquí en este caso sería el $2\log_5(4-x) - \log_5 3$. Estamos es, aplicando la propiedad, por eso es que tienen que repasar las propiedades. Repasar las propiedades $\log_5 \frac{(4-x)^2}{3} = \log_5(4-x)^2 - \log_5 3 = 2\log_5(4-x) - \log_5 3.$
78	P_ ¡Vamos con otro ejemplo!(Pausa)

Cuarta clase: función logarítmica/Episodio 4

P_2 escribe el 3er ejercicio en la pizarra y explica el procedimiento

P_ Ok, vamos a ver este ejercicio: $\log_5 \frac{[x(x+4)]^3}{2}$ ¿Qué propiedades tengo allí? tienen potencia, tienen cociente y tiene producto ¿Cómo resolvemos? Fíjense ustedes, lo primero que tenemos aquí, lo principal es el cociente ¿Por qué? Porque tengo aquí todo un numerador y un denominador, dividendo y divisor. Entonces la primera propiedad que debemos aplicar, es esta que tenemos acá, el logaritmo de un cociente ¿cómo nos quedaría entonces? Si aplicamos logaritmo de un cociente ¿qué escribimos primero?

P y A_ $\log_5$

P_ Escribimos el corchete porque, el ejercicio ya tiene paréntesis.

A_ $x+4$

P_ Elevado a la 3.

A_ Menos $\log_5 2$

P_ ¡Aja! $\log_5[x(x+4)]^3 - \log_5 2$

P_ Ya aplicamos entonces, el logaritmo de un cociente, pero ahora me ayuda aquí, la potencia $\log_5[x(x+4)]^3$. Fíjense ustedes, tengo potencia y tengo producto ¿Qué esta primero?

P_ La potencia. Esta potencia me está elevando este producto $\log_5[x(x+4)]^3$. Primero aplicamos el logaritmo de la potencia ¿Cómo nos queda?

P_ Ahora si ¿Qué vamos aplicar? Logaritmo de un producto. Sería entonces $3\log_5$ ¿de quién?

A_ De x

P_ Mas $\log_5$

P_ Tengo dos opciones, a lo dejo afuera $3[\log_5 x + \log_5(x+4)]$, como factor común, o lo escribo dos veces…

$$\begin{aligned}\log_5 \frac{[x(x+4)]^3}{2} &= \log_5[x(x+4)]^3 - \log_5 2\\ &= 3\log_5[x(x+4)] - \log_5 2\\ &= 3[\log_5 x + \log_5(x+4)] - \log_5 2 \text{ (Pausa)}\end{aligned}$$

Cuarta clase: función logarítmica/ Episodio 5

	P_2 escribe el 4to ejercicio en la pizarra y explica el procedimiento
113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 142 143 144 145 146	P_ ¡Ok miren aquí! $\log_3\left[\frac{(a^2+b^2)c^2}{(a-b)(b+c)(c+d)}\right]^2$. Vamos a ir por partes. P_ ¿Qué propiedades tienen allí? ¡Díganme! A_ ¡Potencia! P_ ¡Aja! potencia. A_ Producto. P_ Producto !Uno solo no, tiene varios! P_ Lo primero que tienen que aplicarles ¿es la? ¿Es la? (Pausa) P_ ¿la? (Pausa) P_ La potencia, después que aplicamos potencia ¿Qué se debe aplicar? El cociente. Tenemos esta primera propiedad aquí, vamos aplicarla: tenemos entonces el 3 baja a multiplicar toda esta expresión $2\log_3\left[\frac{(a^2+b^2)c^2}{(a-b)(b+c)(c+d)}\right]$Este es el ejercicio N° 4.(Pausa) P_ Ok, lo demás me queda igual. Me queda que el $2\log_3\left[\frac{(a^2+b^2)c^2}{(a-b)(b+c)(c+d)}\right]$ A_ Todo igual. P_ ¡Claro! Lo único que resolvimos es la potencia. A_ ¡El cuadrado. Ya va profesora! P_ Ahí está todo igual. Todo lo que está adentro. Por lo que resolvimos ¿Qué fue? Esta potencia $\left[\frac{(a^2+b^2)c^2}{(a-b)(b+c)(c+d)}\right]^2$ ¿cómo se llama eso? Cociente, una división. ¿Cómo se llama la potencia de un cociente? (Pausa) A_ $\log_a x$ P_ del dividendo A_ Menos el $\log_a y$ P_ ¡Aja! ¿Quién es el dividendo aquí en este caso? Si tengo la fracción la fracción $\frac{(a^2+b^2)c^2}{(a-b)(b+c)(c+d)}$, numerador y denominador ¿Cuál x, numerador o denominador? (Pausa) P_ Fíjate que el de arriba. A_ Numerador. P_ Numerador ¿y el dividendo que tenemos? Si este es el divisor, este es. A_ ¡El que está bajo! P_ ¿Qué es el divisor? P_ Denominador, en términos matemáticos. Lo que está pasando para allí es el de abajo. A_ ¡El de abajo! Risas. P_ ¡El denominador, el de abajo! P_ Lo dejamos aquí como factor común, abrimos un paréntesis y empezamos a copiar lo demás. Tenemos un cociente, entonces el $\log_3$ del numerador, que es $(a^2+b^2)c^2 \rightarrow 2[\log_3(a^2+b^2)c^2]$…

Cuarta clase: función logarítmica/ Episodio 5

	P_2 escribe el 4to ejercicio en la pizarra y explica el procedimiento
	La profesora hace referencia de la relevancia de la regla de signos $(-.-=+ y +.-=-)$ y de intervenir en clase; sobre todo, aquellos estudiantes que se mantienen en silencio. En este sentido, se presenta la culminación del ejercicio: $\log_3\left[\frac{(a^2+b^2)c^2}{(a-b)(b+c)(c+d)}\right]^2 = 2\log_3\left[\frac{(a^2+b^2)c^2}{(a-b)(b+c)(c+d)}\right]$ $2\{\log_3[(a^2+b^2)c^2] - \log_3[(a-b)(b+c)(c+d)]\}$ $2[\log_3(a^2+b^2) + \log_3 c^2 - (\log_3(a-b) + \log_3(b+c) + \log_3(c+d))]$ $2[\log_3(a^2+b^2) + \log_3 c^2 - \log_3(a-b) - \log_3(b+c) - \log_3(c+d)]$ $2[\log_3(a^2+b^2) + 2\log_3 c - \log_3(a-b) - \log_3(b+c) - \log_3(c+d)]$ A_ ¿Y eso es todo?

En los episodios 3, 4 y5 se muestra esencialmente:

1) Predominio del momento del primer encuentro (MPE) dado que P_2 plantea, de forma directa, la tarea *Aplicar propiedades de la función logarítmica,* con un casi exclusivo. Para ello, recuerda las propiedades de los logaritmos; las cuales sin duda, la técnica para abordar la tarea deriva del elemento tecnológico-teórico. En este sentido, en los episodios se observa la preeminencia del MPE, un parcial momento de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (MI) y el momento tecnológico-teórico (MTT).
2) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno.
3) Uso de elementos ostensivos carentes de significados. P_2 emplean las propiedades logarítmicas como una técnica institucionalizada.
4) La tarea es presentada en forma muy genérica, supuestas o implícitas, dando así lugar a especulaciones, divagaciones o ambigüedades. Por ejemplo:

P_ Ahora fíjense, este es un cociente, y tengo: 2) $log_5\left[\frac{(4-x)^2}{3}\right]$*. Ese es el logaritmo ¿de un?*

P y A_ ¡Cociente!
P_ ¿cómo lo resolvemos? Vamos a escribir la propiedad aquí
A_ El $log_a(\frac{x}{y}) = log_a x - log_a y$

*P_* $log_a(\frac{x}{y}) = log_a x - log_a y$. *Ok, aplicamos entonces esa propiedad ¿Qué escribo? P y A _* log_5

P_ ¿qué falta allí? La base: $log_5 \frac{(4-x)^2}{3} = log_5(4-x)^2 - log_5 3$

P_ ¿Listo? ¿No hay nada más que hacer?

Como lo demuestran los episodios, la tarea *Aplicar Propiedades logarítmicas* se comprende en el bloque práctico de la OMR (ver cuadro Nro. 8); y en efecto, las propiedades de los logaritmos forman parte del bloque tecnológico-teórico de la OMR (ver cuadro Nro. 9). Cuadros descritos en el capítulo IV

Cuarta clase: función logarítmica/ Episodio 6

P_2 expresa en voz alta

P_ Si ¿Cuál es la asignación? Van a volver a realizar estos ejercicios, en hojas blancas, y los comparan con los de la clase para que vean lo que les dio

El episodio 6, representa la culminación de la clase nro. 4, mediante la comparación que deben hacer los estudiantes con los ejercicios resueltos en la actual clase.

CLASE $N_0$5

Quinta clase: función logarítmica/ Episodio 1

P_2 escribe en la pizarra
P_ Fíjense este que tenemos aquí, en este ejercicio, tenemos todo. Todas las propiedades, tenemos allí $\log_a \left[\frac{\sqrt[3]{3m}}{\sqrt{p}}\right]^3$ ¡Fíjense aquí! tenemos la de la potencia, dentro de esa potencia tenemos un cociente, luego del cociente tenemos dos (2) raíces. Dentro de la raíz ¿tenemos?
A_ ¡Este!
P_ Producto
A_ ¡Ah, producto!
P_ Tendré que aplicar: potencia, cociente, raíz y producto. Ok, en este solo ejercicio aplicamos todos. Vamos entonces.
Ojo, si tenemos aquí la potencia es lo primero que vamos aplicar, pero va se ¿Cómo me queda?
A_ El logaritmo
P_ 3
A_ $3\log_a$
P_ ¡Aja!
A_ De todo eso
P_ De todo el argumento. Todo lo demás se escribe igual ¿está bien? $3\log_a \left[\frac{\sqrt[3]{3m}}{\sqrt{p}}\right]$. Ya el 3 no lo volvemos a escribir.

Este primer episodio de la clase 5, representa un repaso que realiza P_2, de forma directa y previa la evaluación, sobre la aplicación de las propiedades logarítmicas. De hecho, la profesora plantea un ejercicio deben emplearse las propiedades; de forma análoga a los episodios precedentes:

P_ Fíjense este que tenemos aquí, en este ejercicio, tenemos todo. Todas las propiedades, tenemos allí

$log_a \left[\frac{\sqrt[3]{3m}}{\sqrt{p}}\right]^3$ *¡Fíjense aquí! tenemos la de la potencia, dentro de esa potencia tenemos un cociente, luego del cociente tenemos dos (2) raíces. Dentro de la raíz ¿tenemos?*

A_ ¡Este!

P_ Producto

P_ Tendré que aplicar: potencia, cociente, raíz y producto. Ok, en este solo ejercicio aplicamos todos. Vamos entonces.

Quinta clase: función logarítmica/ Episodio 2

	P_2 escribe en la pizarra y dicta en voz alta
116	P_ Aplica las propiedades de los logaritmos que correspondan en cada caso a) $\mathbf{log_8} \sqrt[5]{\boldsymbol{x+3}}$ 4 b) $\mathbf{log_9}\left(\frac{\sqrt{x}}{\mathbf{12}}\right)$ 4 c) $\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\left(\sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{m^3n^2}}{\boldsymbol{p^3q^2}}}\right)$ 8 d) $\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{xy})^{\boldsymbol{m}}$ 4 P_2 atiende asesorías al grupo, sobre dudas ante la solución de ejercicios de la evaluación. Esto, de forma constante.
117	A_ Profe ¿Ahí se elimina la raíz?
118	P_ ¡Claro, cuando aplicas la propiedad se elimina la raíz!

<u>5.2.4 Característica de la OM de P_2 en torno la Función Logarítmica:</u> La reconstrucción de una Organización Matemática (OM) que responde a los *tipos de tareas matemáticas*

T1: Despejar variable x/y en la ecuación $x + 2 = 13$

$y + 3x = 6$

T2: Hallar inversa de la función Y= 6 – 3 x e $y = a^x$

T3: Introducir logaritmos. T4: Definir logaritmos. T5: Hallar equivalencias. T6: Definir logaritmos especiales. T7: Graficar función logarítmica. T8: Enunciar aplicaciones de las propiedades de los logaritmos. T9: Presentar aplicación de propiedades de la función logarítmica. T10: Resolver logaritmos aplicando propiedades de la función logarítmica

Es preciso indicar que para abordar las *tareas matemáticas planteadas*, P_2 propone nueve técnicas, entre ellas: t4: Equivalencia: $y = \log_a x$ equivalente a $x = a^y$, t8: Enunciado de las propiedades de la función logarítmica y t9: Aplicación de las propiedades logarítmicas

En este contexto, las técnicas proporcionadas se interpretan y justifican mediante los siguientes elementos *tecnológicos-teóricos*: Θ_3: Definición de logaritmos, Θ_8: Propiedades de la función logarítmica y Θ_9: Propiedades de los logaritmos

<u>5.2.5 Característica del Proceso de estudio u OD de P_2:</u> En el proceso de estudio llevado a cabo por P_2 se muestra el uso de elementos de la OM: Función Exponencial y la OM: Función Inversa. Propone actividades de recordación y repetición de carácter general, supuestas o implícitas; con un rol casi exclusivo, inicia recordando despejes de incógnita y una función inversa; P_2 destaca relevancia de la función exponencial para resolver logaritmos. Luego, señala los logaritmos, escribe un ejemplo para *hallar equivalencias* y resolver $y = \log_2 x$.

Posteriormente, la profesora dicta tanto las propiedades de la función logarítmica como de los logaritmos y propone algunos ejemplos. En este orden, se observó tanto un empleo del lenguaje natural sin rigor matemático alguno, como uso de elementos ostensivos carentes de significados (tal como las propiedades de los logaritmos). En general, una convergencia del momento del primer encuentro (MPE), un parcial momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME) y el momento tecnológico-teórico (MTT). Asimismo, énfasis en recordar los conocimientos previos que posee el estudiante, más que en la verdadera exploración de la técnica y el empleo exclusivo de un técnica que se deriva del elemento tecnológico-teórico.

5.2.6 OM del Cuaderno de los Estudiantes: durante la revisión llevada a cabo a las notas del cuaderno personal de seis (6) estudiantes, tomadas durante las clases de la funciones logarítmica y exponencial, se evidenció: 1) Escritura parcial del contenido enseñado en clase, 2) Presencia de errores matemáticos al momento de abordar las tareas. Por ejemplo, dificultad al distinguir a $y = 5^{-x}$ como función equivalente de $y = (\frac{1}{5})^x$. Lo que conduce a errores del tipo: $y = 5^{-1}$ $y = 5$, 3) Ausencia absoluta de tareas relativas al momento exploratorio (ME), al cuestionamiento tecnológico y a los restantes momentos. La actividad en los cuadernos es una actividad de copia con errores incorporados. Por ejemplo, durante la resolución del ejercicio $\log_3 \left[\frac{(a^2+b^2)c^2}{(a-b)(a+b)(c+d)}\right]^2$, se muestra inadecuada, e incluso, no se emplean signos de agrupación.

5.2.7 OM de la Evaluación de los Estudiantes: durante la revisión efectuada a la evaluación aplicada a los estudiantes por P_2 muestra; por un lado, que la profesora se centra su atención en las tareas matemáticas *Representar grafica de la Función Exponencial* y Aplicar las propiedades de los logaritmos, siguientes:

T1: Representar grafica de la función exponencial.

Resuelve y grafica la siguiente función exponencial: $y = 3^x$ e $y = 3^{-x}$, en un mismo plano. T2: Aplicar propiedades de los logaritmos

Aplica las propiedades de los logaritmos que correspondan en cada caso:

a) $\log_8 \sqrt[5]{x+3}$ $b)$ $\log_9 \left(\frac{\sqrt{x}}{12}\right)$ $c) \log_a \left(\sqrt[3]{\frac{m^3n^2}{p^3q^2}}\right)$ $d) \log_a (xy)^m$

Por otro lado, las calificaciones obtenidas oscilaron; en la evaluación de la función exponencial, entre: 01-05 y 10-20 puntos. Mientras que en la evaluación de las propiedades logarítmicas, entre: 01-08 y 10-19 puntos. Además, sus fallas y confusiones consistieron al 1) Desarrollar potencias con exponentes negativos, 2) No se calculan todos los valores de la variable "y"; por consiguiente, no se escriben en la tabla de valores, ubicación inadecuada de los puntos en el plano cartesiano; y por supuesto, mal trazado la curva. En algunos casos ni siquiera, se realiza la ubica de los puntos en el plano y 3) Incorrecta aplicación de las propiedades logarítmicas.

Con seguridad, la descripción precedente muestra que tanto la estructura de la prueba como los resultados son indicadores de lo que tan fielmente los estudiantes pueden reproducir las técnicas propuestas por el profesor.

5.3 Categorización e Interpretación de la Información: Triangulación

En esta parte del análisis se señalan las categorías a considerar para interpretar, a manera de síntesis, la información proveniente de las observaciones realizadas. Así es como la interpretación, se hace a través de una triangulación de las fuentes descritas en el capítulo III. Para ello, en la triangulación se consideraron las categorías básicas denominadas Organización Matemática (OM: tipos de tareas y/o problemas matemáticos, técnicas matemáticas, tecnología y teorías matemáticas) y Organización Didáctica (OD), implementadas por los informantes principales (P_1 y P_2); adicional aquellas categorías provenientes de la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD), incluidas en el Referente de Carácter Epistemológico (RCE), que a su vez incluye, la Organización Matemática de Referencia (OMR) y la Organización Didáctica (OD) correspondiente.

Partiendo de las observaciones efectuadas a los docentes de matemáticas del 4to año de Educación Media, se pudo evidenciar la presencia de categorías que emergen de la TAD; o bien elementos de su OM; así como los momentos didácticos existentes en su proceso de estudio u OD. Categorías éstas, que fueron interpretadas y sintetizadas a la luz del RCE, la OMR y la OD correspondiente del estudio actual; aunado, a las actividades observadas en los profesores (P_1 y P_2), las cuales permitieron dar cuenta de las características de su OM y su correspondiente OD. En el contexto de las características de la OM, se muestra:

Tareas Matemáticas:

T1: Presentar la función exponencial, T2: Recordar propiedades de la potenciación, T3: Calcular potencias, T4: Definir función exponencial. T5: Graficar función exponencial. T6: Enunciar propiedades de la función exponencial T7: Analizar función exponencial.T8: Despejar variable, T9: Hallar inversa de una función, T10: Introducir logaritmos. T11: Definir logaritmos. T12: Hallar equivalencias. T13: Definir logaritmos especiales. T14: Graficar función logarítmica. T15: Enunciar aplicaciones de las propiedades de los logaritmos. T16: Presentar aplicación de propiedades de la función logarítmica. T16: Resolver logaritmos aplicando propiedades de la función logarítmica

Técnicas Matemáticas:

Construcción de tabla de valores, Ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano, Representación de la curva en el plano cartesiano, Enunciado de las propiedades de la función exponencial. Equivalencia: $y = \log_a x$ equivalente a $x = a^y$, Enunciado de las propiedades de la función logarítmica y Aplicación de las propiedades logarítmicas.

Elementos Tecnológicos-teóricos:

Definición y propiedades de la potenciación en R, Definición de la función exponencial y Θ_5: Grafico de la función exponencial, Construcción de tabla de valores, grafico de la función exponencial y propiedades de la función exponencial. Por otro lado, en el bloque discursivo de la Función Logarítmica, se encontraron: Definición de logaritmos, Propiedades de la función logarítmica y Propiedades de los logaritmos.

En cuanto a las características de la OD, se vislumbra

1) Emplea elementos de la OM: potenciación, OM: funciones reales de variable real, OM: funciones trigonométricas, OM: función exponencial y OM: función inversa.
2) Actividades de recordación y repetición, de carácter general solicitadas y dirigidas por la profesora. En este sentido, las tareas se plantean de forma muy genérica, proporcionando técnicas preestablecidas y carentes de justificación tecnológica-teórica.
3) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno; así como de elementos ostensivos carentes de justificación.
4) Preeminencia del momento del primer encuentro (MPE) con el elemento tecnológico-teórico, un parcial momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI); en detrimento del momento exploratorio (ME) y momento tecnológico-teórico (MTT). Lo que quiere decir, énfasis en recordar los conocimientos previos que posee el estudiante, lejos la verdadera exploración de la técnica; adicional, al empleo exclusivo de la técnica que se deriva del elemento tecnológico-teórico.

Si bien es cierto que existen algunas diferencias entre ambos informantes (Por ejemplo, P_2 repasa las propiedades de la potenciación e introduce el logaritmo partiendo de la noción de función inversa, recuerda el procedimiento para representar la función exponencial, entre otras; mientras que P_1 no lo hace), éstas no son relevantes dado que ambos docentes abordan prácticamente las mismas tareas dirigidas, todas ellas, a presentar en forma ya estructurada, como una obra absolutamente acabada la OM (función exponencial y función logarítmica) en estudio. Los informantes, comienzan definiendo la exponencial o el logaritmo; es decir, informan a los estudiantes lo que es la obra ya construida. Esto es, el encuentro del estudiante es con una obra ya construida. Es preciso indicar que esta situación, se observa a lo largo de todas las clases con todas las nociones que se hace necesario explicitar (tales como definición de las funciones, propiedades de la potenciación, construcción de la tabla de valores, representación gráfica de la curva, propiedades de ambas funciones, entre otras.).

Atendiendo a la terminología de la TAD, se describe la situación previa expresando que el primer encuentro del estudiante es con el componente tecnológico-teórico, en otras palabras, con todo el cuerpo teórico: las definiciones, las propiedades y técnicas ya establecidas; sin embargo, nuestro modelo teórico: la TAD, en correspondencia con las enseñanzas de la historia, propone que el primer encuentro ha de ser con un tipo de problema o tipo de tarea incrustado en la razón de ser de la noción en estudio, tal y como se señala en el RCE, en la OMR y en la OD correspondiente, comprendidas en el apartado 4.3 del capítulo IV.

Por consiguiente, se vislumbra la preeminencia de un momento del primer encuentro (MPE) con el elemento tecnológico-teórico, uso de elementos ostensivos carentes de significados, ausencia del cuestionamiento tecnológico-teórico (esto es, P_2 presenta en forma directa los elementos tecnológicos-teóricos con protagonismo casi exclusivo; sin dar lugar a su interpretación, entre otras.), presencia de tareas planteadas de forma muy genéricas; de igual modo, técnicas preestablecidas y proporcionadas por el docente, adicional, a ausencia de la justificación e interpretación de las técnicas empleadas. Asimismo, se dejan a un lado problemas que permitan modelizar situaciones de la vida real y problemas que orienten hacia una extensión de las técnicas utilizadas y su respectiva justificación, no se hace énfasis del carácter de la OM función exponencial, como noción de función inversa de la función logarítmica.

Tal y como se ha visto en el RCE, las funciones logarítmica y exponencial han venido emergiendo mediante la evolución de situaciones problemáticas como alternancia entre una noción y otra; así como alternancia y complementariedad entre los ámbitos matemáticos, en los que surgen o se desarrollan en sus dos dimensiones sinérgicas: la realidad concreta matemática obtenida (OM) y el proceso dinámico que la hace posible (OD).

Desde luego, en el proceso de estudio observado, el estudiante se encuentra desde el comienzo con la tecnología y teoría; de manera que en el primer momento convergen tres momentos didácticos; o bien, un momento del primer encuentro (MPE), un momento tecnológico-teórico (MTT) y el momento de la institución (MI) del elemento tecnológico-teórico referido. Esto significa, que en este tipo de reorganización de la OM estudiada, el estudiante no tiene oportunidad alguna de construir las técnicas o propiedades; aun menos, de plantearse diferentes situaciones matemáticas o extramatemáticas.

Lo anterior, se contrapone con el Referente de Carácter Epistemológico (RCE, descrito en el capítulo IV), en el mismo, se refiere que tanto el logaritmo como la función exponencial emergen como respuesta a problemas intra o extramatemáticos; es decir, a problemas que representan sus razón de ser, y los cuales se reorganiza cada vez con mayor grado de complejidad; en fin, evolucionan mediante encuentros y reencuentros con problemas que dan lugar a la necesidad de una (técnica) manera de abordarlos y construir un marco racional (discurso lógico) para ellos. Sin duda, los objetos matemáticos surgen como respuestas a problemas o cuestiones que representan su razón de ser. Evolucionando, en ámbitos matemáticos distintos y sin una secuencia fija: aritmético, geométrico, analítico.

Por su parte, en la Organización Matemática de Referencia (OMR) se comprenden su razón de ser, tareas que emergen de problemas socio-culturales; en la situación del Problema 1 vinculada con la relación entre los términos de una progresión aritmética y geométrica, la cual implica la presencia de logaritmos: Conocidos los términos cualquiera, de una progresión aritmética y otra progresión geométrica: I) ¿Qué relación existe entre los términos de ambas progresiones? y II) ¿Qué implicaciones matemática tiene esta relación? En cuanto a los tipos de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico-teórico, se refieren tareas tales como T10: Justificar técnicas de las funciones logarítmica y exponencial; la misma, genera la siguiente inquietud ¿Por qué durante el proceso de estudio, los profesores no promueven el cuestionamiento; en sus estudiantes, de las técnicas empleadas para realizar la representación gráfica de la función $y = 2^x$, por ejemplo? En relación a las potencias de 2^x, o bien, al calcular los números a los cuales hay que elevar 2 para que resulten las imágenes 2,1, 8,1/2, ¼, entre otras, es pertinente preguntarse: ¿Cómo graficar esos problemas? También, ¿Por qué ese procedimiento es válido? ¿Será siempre válido? ¿Cómo explicarlo? En el caso de la resolución de ecuaciones exponenciales, aun cuando suponiendo que ya se tiene la técnica no logarítmica para resolver los tipos: $2^{3x+2} = 32^x$, Vale la pena formular interrogantes del tipo: ¿funciona siempre esa técnica? ¿Cómo operaría en este caso: $3^x = 5^{4x-3}$? Y a partir de allí, podría comenzarse a explorar otras, tal como, la técnica logarítmica.

. En particular, en la OMR se comprenden tareas que abordan la modelización de problemas socio-culturales tales como T8: Modelizar situaciones de vida real a partir de la función logarítmica y exponencial y T13: Construir situaciones problemas que puedan ser modelizadas a través de las funciones logarítmicas y exponencial. (ver cuadro 8, ubicado en el capítulo IV).

Ahora bien, la OM de los profesores es incompleta y centrada en los elementos técnico-prácticos de la praxeología u OM; en especial, en la tarea y en las técnicas proporcionadas. En este sentido, se muestra una falta de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico; es decir, tareas que permitan cuestionar la técnica empleada, buscando validarla y conocer su alcance. Por tal razón, al no disponer de tareas de ese tipo, a los informantes claves, no les queda más recurso que dictar la técnica o la manera de proceder en el abordaje de una tarea; y por ende, no cuestionar la técnica porque, de hacerlo, pueden surgir preguntas y nuevos problemas para los cuales su OM no dispone de elementos pertinentes.

En consecuencia, los docentes no pueden hacer otra cosa más que dictar definiciones y procedimientos. Dictar definiciones y procedimientos que representan, entre otras, una técnica didáctica, en otras palabras, un elemento de la OD correspondiente a su OM disponible. De aquí se desprende que la OM determina la

OD, es decir, la manera como se estructura el logaritmo y la función exponencial, que para efectos de enseñanza determina el proceso didáctico y viceversa.

A continuación se presenta un cuadro síntesis que reúne la *triangulación de la información* mediante el proceso de *Categorización e Interpretación* de la *Información*, antes descrita:

CUADRO 11: CATEGORIZACIÓN E INTERPRETACIÓN DE LA INFORMACIÓN (TRIANGULACIÓN)

<table>
<tr><th colspan="3">Praxeología u Organización Matemática (OM)</th><th rowspan="2">Características</th><th rowspan="2">Interpretación
(P_1 y P_2 Vs RCE y OMR)</th></tr>
<tr><th>Tipo de tareas y/o problemas matemáticos</th><th>Técnica matemática</th><th>Elementos tecnológicos-teóricos matemáticos</th></tr>
<tr><td>*Presentar la función exponencial
*Recordar propiedades de la potenciación
*Calcular potencias
*Definir función exponencial
*Graficar función exponencial
*Enunciar propiedades de la función exponencial
*Analizar función exponencial *Despejar variable, *Hallar inversa de una función
*Introducir logaritmos.
*Definir logaritmos.
*Hallar equivalencias.
*Definir logaritmos especiales.
* Graficar función logarítmica.
*Enunciar aplicaciones de las propiedades de los logaritmos.
*Presentar aplicación de propiedades de la función logarítmica.
*Resolver logaritmos aplicando propiedades de la función logarítmica</td><td>*Construcción de tabla de valores
*Ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano
*Representación de la curva en el plano cartesiano
*Enunciado de las propiedades de la función exponencial.
Equivalencia: $y = \log_a x$ equivalente a $x = a^y$, t8:
*Enunciado de las propiedades de la función logarítmica
*Aplicación de las propiedades logarítmicas.</td><td>*Definición y propiedades de la potenciación en R
*Definición de la función exponencial
*Grafico de la función exponencial
*Construcción de tabla de valores
*Grafico de la función exponencial.
*Propiedades de la función exponencial.
*Definición de logaritmos
*Propiedades de la función logarítmica
*Propiedades de los logaritmos.</td><td rowspan="4">*Preeminencia de un momento del primer encuentro (MPE) con el elemento tecnológico-teórico
* P_1 y P_2 abordan las mismas tareas presentando en forma ya estructurada y como una obra acabada, la OM en estudio.
*Uso de elementos ostensivos carentes de significados (símbolos).
* Ausencia de problemas que permitan modelizar situaciones de la vida real y problemas orientados hacia una extensión de las técnicas utilizadas con su justificación.
*No se enfatiza del carácter de la OM función exponencial, como noción de función inversa de la función logarítmica.
*Ausencia del cuestionamiento tecnológico-teórico.
*Ausencia de la justificación e interpretación de las técnicas empleadas.
*Ausencia de elementos históricos que den cuenta de su razón de ser; menos aun, se subrayar la OM función exponencial como función inversa de la función logarítmica.
* Convergencia de tres (3) momentos didácticos: momento del 1er encuentro (MPE), momento tecnológico-teórico (MTT) y el momento de la institución (MI) del elemento tecnológico-teórico referido.</td><td rowspan="4">En el RCE la noción de logaritmos emerge a partir de problemas incrustados en la razón de ser del logaritmo y que evolucionan hacia nuevos problemas generando así OM siempre más completas en el ámbito de la cultura griega en la comparación entre los términos de las progresiones aritméticas y geométricas. *El contexto* (aritmético, geométrico, analítico; sin secuencia fija), la *forma como emergen* y la *manera cómo evolucionan*.
Por su parte, En la OMR se comprenden su razón de ser; entre otras tareas, tareas que responden al problema del cuestionamiento tecnológico como T10. Tareas de modelización, T8 y T13 (ver cuadro 8 ubicado en el capítulo IV).
En fin, la OM de P_1 y P_2 es incompleta y centrada en los elementos técnico-prácticos. Hay falta de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico y tareas que cuestionen la técnica, para validarla y conocer su alcance. OM construida, en su OD que comprende como técnicas didácticas el dictar definiciones y procedimientos.
La OM determina la OD (manera como se estructura el logaritmo y la función exponencial) y viceversa.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Praxeología u Organización Didáctica (OD)</th></tr>
<tr><th colspan="3">Momento Didáctico Dominante</th></tr>
<tr><td colspan="3">MPE, MTT, MI y MTt</td></tr>
</table>

Diseño: Acuña (2015)

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este apartado, se presentan las características de la Organización Matemática Efectivamente Enseñada (OMEE) y la Organización Didáctica (OD) de las profesoras (P_1 y P_2) de matemática en torno a las funciones logarítmica y exponencial; asimismo, algunas conjeturas, conclusiones y recomendaciones de la investigación respecto a las relaciones entre a la OM y OD observadas.

Es importante destacar de acuerdo a las observaciones realizadas, se evidencia una OMEE en torno a las funciones logarítmica y exponencial incompleta:

a) Las tareas matemáticas planteadas fueron centradas en: Graficar función exponencial, en la OM de P_1 y Graficar función exponencial y logarítmica de base **a**, hallar equivalencias entre expresiones de la forma logarítmica y la forma exponencial, despejar variable x/y, hallar inversa de una función, introducir logaritmos, definir logaritmos, definir logaritmos especiales y resolver logaritmos aplicando propiedades de la función logarítmica, en la OM de P_2. Dejando a un lado, ambas profesoras, la propuesta de tareas matemáticas que propicien el cuestionamiento tecnológico y la justificación de las tareas planteadas, así como interpretación del bloque tecnológico-teórico. Tareas que impliquen establecer la relación entre ambas funciones, realizar cálculos logarítmicos y exponenciales, interpretar los resultados obtenidos y modelizar situaciones de la vida real mediante las funciones logarítmica y exponencial, entre otras relevantes.
b) Por presencia de un solo tipo de técnica para abordar la tarea.
   En general, tanto P_1 como P_2, subrayan el trabajo matemático relativo a la Construcción de tabla de valores y calcular potencias, que responden a la tarea Graficar las funciones logarítmica y exponencial; y en consecuencia, interpretar las propiedades de tales funciones con el propósito de realizar algunas conclusiones sobre el comportamiento que, ambas curvas, toman en el

plano. Asimismo, el énfasis de la aplicación, entre otros elementos, de las propiedades de la potenciación y de las propiedades logarítmicas, como única técnica para obtener; por un lado, el valor de una potencia; y por otro, el desarrollo sólo de logaritmos expresiones algebraicas.

c) Por no satisfacer los indicadores de completitud:

I_2: Distintas técnicas y criterios para elegir entre ellas: no muestran técnicas alternativas que permitan realizar e integrar algunos tipos de tareas sin tener que identificarlas, comprendiendo un cuestionamiento y análisis tecnológico sobre los mismos (en relación con característica c).

I_3: Independencia de los objetos ostensivos que permiten representar las técnicas: la flexibilidad de las técnicas de una OML no dependen de los objetos ostensivos a través de los cuales se describen, utilizan y aplican; sino al admitir la variedad de los mismos dependiendo de la actividad matemática que las comprendan.

Se muestran la forma general de la función exponencial como objeto ostensivo y carente de justificación matemática alguna. De forma análoga, la función logarítmica se presenta a partir de la noción de función inversa; generalizando, tanto la forma de la logarítmica a la forma exponencial, así como las propiedades logarítmicas.

I_4: Existencia de tareas y técnicas inversas: referida a los tipos de técnicas que en una OML permiten dar solución a ciertos tipos de tareas así como a sus inversas (contrarias).

En este orden de ideas, las profesoras plantean la tarea matemática *Graficar función exponencial* partiendo de funciones de la forma $f(x) = 2^x$; y partiendo de ésta expresión, obtener su función exponencial correspondiente; sin tomar tareas tales como: *Dada la gráfica de la función exponencial, obtener su función*. Seguido, entre el grupo de la OM de P_2 se propone la tarea *resolver logaritmos aplicando propiedades de la función logarítmica*, dejando de lado la tarea contraria que implica *determinar la expresión logarítmica inicial,* a partir del empleo de las propiedades logarítmicas.

I_6: Existencia de tareas matemáticas abiertas: una OML será más completa en el grado que facilite abordar situaciones amplias, es decir, tareas inclinadas a estudiar problemas sin datos ni referencias predeterminadas.No se evidencia.

La situación anterior, concerniente a la OMEE por las profesoras del nivel de 4to año en torno a las funciones logarítmica y exponencial, no se corresponde con la OM de referencia la cual es relativamente completa, no sólo en cuanto al nivel de completitud de los bloques prácticos y discursivos, sino también, porque para su elaboración se tomaron en consideración, entre otras tareas y elementos, situaciones problema de naturaleza matemática y extra matemática que, de alguna forma, permiten dar cuenta tanto de su razón de ser como de los objetos matemáticos que comprende.

Por otra parte, la OD observada tiene las siguientes características:

a) Énfasis en el momento del primer encuentro (MPE), centrado en la presentación del componente tecnológico-teórico. El encuentro de los estudiantes con la OM en estudio o con algunos tipos de tareas correspondiente tiene lugar, en todos los casos, en convergencia con un parcial momento del trabajo de la técnica (MTt) y el momento de la institucionalización (MI), en detrimento del momento exploratorio (MI) y el momento tecnológico-teórico (MTT). Dicho de otro modo, los estudiantes se encuentran directamente con los elementos tecnológicos-teóricos de la OM ya institucionalizada, a través de la presentación directa, realizada por el profesor. Así pues, no se evidencia el encuentro con un tipo de problema o tarea que dé lugar a la elaboración; aun cuando insuficiente, de una técnica (ME), de su práctica y de la posibilidad de construcción, al menos de algunos de los elementos praxeológicos.

   P_1 y P_2 presentan el tema dictando, entre otros elementos, la definición de las funciones logarítmica y exponencial, y plantean sus ejemplos respectivos.

b) Las actividades llevadas a cabo en clase tanto por los estudiantes como, esencialmente, por las profesoras son actividades para presentar respuestas matemáticas sin interrogantes que den lugar a tales respuestas. Cuando las profesoras presentan las definiciones y propiedades relativas a la función exponencial y a la función logarítmica, lo que hacen es presentar las respuestas a un conjunto de problemas (interrogantes) acumulados en la cultura matemática a lo largo de la historia; sin tomar en cuenta que las respuestas son tales en tanto exista alguna pregunta, interrogante o problema a partir de los cuales se elabora. En síntesis, estas actividades puestas en juego las cuales revelan la visión que institución docente; y en consecuencia, las profesoras tienen de la matemática, y en particular, de la función exponencial de la función logarítmica. Interpretan estos objetos matemáticos como obras ya acabadas, sin posibilidad de reconstrucción.

c) Uso de un lenguaje natural sin rigor matemático alguno. Por ejemplo:

P_ ¡Anoten entonces! Nuestro tema de hoy es función logarítmica. (Pausa). Para hablar de la función logarítmica, primero tengo que hablar de lo que es función exponencial, que fue el tema que estuvimos viendo. Ya ustedes han trabajado un poco con los logaritmos en química ¿cierto?
A_ No ¿Cómo es eso?

d) Tareas planteadas en forma muy genérica, supuestas o implícitas, dando así lugar a especulaciones, divagaciones o ambigüedades; tal es el caso

P_ *"Okey vamos hacer un primer ejemplo. El más sencillo, una función f de x igual a dos (2) equis. La profesora vuelve a dirigirse al pizarrón para borrar la expresión:* $\boldsymbol{2^x}$*, cambiándola por la expresión:* $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$*".*

e) Ausencia de la actividad exploratoria por parte de los estudiantes.

En la actividad matemática de los alumnos, se observó que en lugar de una verdadera exploración de la técnica, los jóvenes deben recordar los conocimientos previos y emplear, adecuadamente, los elementos tecnológico-teóricos presentados por P_1 y P_2 en el momento del primer encuentro (MPE), de forma institucionalizada e incuestionable.

f) Presencia de una técnica que se deriva del elemento tecnológico-teórico en forma implícita. En estrecha relación las características precedentes, una vez dictados los elementos tecnológicos y teóricos correspondientes a las funciones logarítmica y exponencial, P_1 y P_2 proponen ejercicios y hacen especial énfasis que para resolverlos es preciso emplear los conocimientos teóricos dados al inicio de la clase. Por ejemplo, P_2 dicta la definición de logaritmos y propone la tarea *Hallar equivalencias* para utilizar la *técnica relativa a la equivalencias entre expresiones logarítmicas y exponencial* $\boldsymbol{y = log_a x}$ *es equivalente a* $\boldsymbol{x = a^y}$, comprendida en la definición de .

g) Proceso comunicacional unidimensional (Profesor→Alumno). A lo largo del proceso de estudio u OD desarrollado por P_1 y P_2, se muestra la preeminencia de un protagonismo casi exclusivo de ambas profesoras de matemática de 4to año; de hecho, éstas promueven y orientan la participación de los estudiantes en varios episodios de las clases.

Evidentemente, si la OMEE y la OD de ambas profesores, posee las características señaladas, se podría decir entonces que éstas no se corresponden; significativamente, con los elementos la OM de referencia, situación que conducen existencia de una actividad docente y actividad matemática que motivan a preguntarse:

¿Cuáles podrían ser las causas de la OM incompleta que muestran los profesores de matemática de 4to año en torno a la enseñanza de las funciones logarítmica y exponencial?

Si se asume que los profesores de matemática observados, representan una institución docente ¿Cuáles son las características de la OM y de la OD para la enseñanza en tal institución? ¿La práctica docente del profesor de matemática responde a lineamientos curriculares? En caso afirmativo ¿Cuáles son las características de tales lineamientos curriculares? En caso negativo ¿Por qué?

¿Cuál es el equipamiento praxeológico que deberían tener los profesores de matemática en torno a las funciones logarítmica y exponencial?

Considerando estas interrogantes así como el propósito y las acciones específicas, podrían formularse las siguientes conjeturas condicionadas por el contexto en el cual se llevó a cabo la investigación

C1: Una OM incompleta, genera necesariamente una OD en la cual lo matemático es transmitido directamente, con posibilidades casi nulas de construcción.

C2: Una OD que se caracteriza por un proceso comunicacional unidireccional y que enfatiza la dimensión tecnológico-teórico del momento del primer encuentro (MPE), es un medio en el que solo puede viajar una OM incompleta.

C3: Conscientes de que la completitud absoluta no es alcanzable, por la condición abierta del conocimiento matemático, se afirma lo siguiente: a más completitud de una OM, más aproximación a un proceso constructivo para esa OM.

C4: Si la OMEE se considera como equipamiento praxeológico del profesor de matemática, entonces este equipamiento es, matemáticamente, incompleto.

En síntesis, la OMEE se vincula, estrechamente, a la OD observada, debido a que en dicho proceso de estudio la OM reconstruida responde a la cuestión de graficar función exponencial, partiendo del énfasis en el cálculo de potencias para la construcción de la tabla de valores, hallar equivalencias; graficar función logarítmica, una vez conocida la función exponencial y aplicar propiedades de la función logarítmica. En este contexto, se evidencia una OD basada en el dominio de la instrucción del profesor (proceso comunicacional unidireccional), centrada en la actividad de recordar y memorizar, con énfasis en el momento del primer encuentro; centrada exclusivamente, en el elemento tecnológico-teórico; ausencia de la actividad exploratoria por parte de los estudiantes, en la cual se elaboran técnicas matemática que derivan del boque discursivo. La OD referida, está asociada a una OM incompleta, con énfasis en el bloque práctico-técnico y ausencia casi absoluta del cuestionamiento tecnológico-teórico; asimismo, ausencia de tareas que propicien el cuestionamiento tecnológico y la justificación de la teoría, presencia de un solo tipo de técnica para abordar la tarea.

En cuanto a la OM de referencia, se reporta que la misma fue construida en el marco del trabajo documental que comprende: 1) Revisión histórica-epistemológica de las funciones logarítmica y exponencial, la cual permitió evidenciar el origen de los logaritmos en el período helénico (siglo III a.C.) con Arquímedes, al comparar las sucesiones aritméticas y geométricas. Situación que se materializa en el siglo XVI con Napier, en la correspondencia de los términos de las progresiones aritméticas y geométricas, así como mediante la concepción de cinemática; posteriormente, su desarrollo hasta el análisis infinitesimal en el siglo XVII. 2) Análisis del contenido de las funciones señaladas, en libros de texto (medio y superior) de matemática. Esto, a fin de esbozar relevantes OM e intentar una aproximación, a una potencial integración de éstas, en una OM de referencia que sirve de apoyo en las distintas actividades y resultados obtenidos en el actual estudio en torno a la OM y OD del profesor de matemática en torno a las funciones logarítmica y exponencial.

A esta altura, y en consonancia a la descripción de las características de la OMEE y la OD de los profesores de matemática del nivel de 4to año en torno a las funciones logarítmica y exponencial; reconstrucción ésta, que permitió dar respuesta a la pregunta inicial de la investigación, la autora de la investigación realizada, se permite concluir exhortando al desarrollo de estudios que se planteen temáticas a considerar tales como: ¿Cuáles podrían ser los factores que determinan este tipo de Organización Matemática y Organización Didáctica en torno a la enseñanza de las funciones logarítmica y exponencial? ¿Cómo se gesta este tipo de actividad docente?

¿Cuál es el modelo epistemológico docente de la matemática, presente en la actividad docente en educación secundaria en torno a las funciones logarítmica y exponencial?

REFERENCIAS

Aguilar, P., Farfán, R., Ledezma, J. y Moreno, J. (1997). *Estudio Didáctico de la Función* 2^x .Acta Latinoamericana de Matemática (RELIME). Vol. 11 [Revista en línea]. Disponible en http://www.matedu.cicata.ipn.mx/documentos/alme/alme11.pdf [Consulta: 2010, Julio 18]

Azcárate, C. y Espinoza, L. (2000). *Organizaciones Matemáticas y Didácticas En Torno Al Objeto de "Límite De Función": Una Propuesta Metodológica Para El Análisis*. [Documento en línea] Disponible en http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21683/21517. [Consulta: 2010, Abril 09]

Báez, M., Cantú, C. y Gómez, K. (2007). *"Un Estudio Cualitativo Sobre las Prácticas Docentes en el Aula de Matemáticas en el Nivel Medio"*. Tesis de Grado. Universidad Autónoma de Yucatán. México. [Tesis en línea] Disponible en http://www.uady.mx/~matemati/dme/docs/tesis/TesisGrupal_Baez-Cantu-Gomez.pdf. [Consulta: 2010, Febrero 18]

Banco Interamericano de Desarrollo (2010). *La Condición de la Educación Matemáticas y Ciencias Naturales en América Latina y el Caribe* (ALC).

Bastán, M., Buffarini, F., Lisera, M. y Roso, F. (2006). *Problemática del Profesor de Matemática Atendiendo a los Niveles de determinación de lo Didáctico*. I REPEM – Memorias. Universidad Nacional de Río Cuarto – Argentina.

Baptista, P., Fernández, C., y Hernández (1997). *Metodología de la Investigación*. México: McGRAW.

Bell, E. T. (1985). *Historia de las Matemáticas*. (2da. Ed.). México: Fondo de Cultura Económica.

Brett, E. y Suárez, W. (2002). *Actividades de Matemática I Cs, C.D*. Caracas: JOHNEVE.

Bogdan, R. y Taylor, S. (1996). *Introducción a los Métodos Cualitativos de Investigación*. Barcelona: Paidos Ibérica.

Bosch, M., Chevallard, Y. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El Eslabón Perdido Entre Enseñanza y Aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2000). *Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares*. [Trabajo realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT (MCT, Madrid), pp.1-44.]. Las primeras ideas fueron presentadas en el marco de las XIV JORNADAS DEL SI-IDM, celebradas en Cangas do Morrazo, Pontevedra.

Bosch, M. y Gascón, J. (2001, Septiembre). *Las Prácticas Docentes del Profesor de Matemática*. [Trabajo presentado en el marco XIème École Didáctique des Mathemátiques, celebrada en Agosto de 2001, pp.1-24.].

Bosch, M. (2003). *Un punto de Vista Antropológico: La Evolución de los "Instrumentos de Representación" En la Actividad matemática*. Universidad Ramón Llull.

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). *El Profesor Como Director de Estudio. Análisis de Organizaciones Didácticas Espontáneas*. Recherhes en Didáctique de Mathemátiques. Vol. 23, nº 1, pp.79-135.

Chevallard, Y. (1999). *El Análisis de las Prácticas* Docentes *en la Teoría Antropológica de Lo Didáctico*. Recherches en Didactique de Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266. (Traducción de Ricardo Barroso, Universidad de Sevilla). [Documento en línea] Disponible en http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a1005.pdf. [Consulta: 2010, Enero 18]

Corica, A. y Otero, M. (2010). *Análisis de la Dinámica de Estudio en un Curso Universitario de Matemática* [Documento en línea]. Ponencia presentada en el III Conferencia Internacional de la Teoría Antropológica de lo Didáctico Disponible en http: www.crm.cat/cdidactic [Consulta: 2010, Febrero 25]

Farfán, R. y Ferrari, M. (2002). *Una Visión Socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (RELIME). Vol. 15 [Revista en línea]. Disponible en http://www.clame.org.mx/documentos/alme15_2.pdf [Consulta: 2010, Noviembre 20]

Ferrari, M. (2001). *Una visión Socioepistemológica. Estudio de la Función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa. México: Cinvestav-IPN.

Ferrari, M. (2011). *Un Estudio Socio Epistemológico de lo Logarítmico: De Multiplicar Sumando a una Primitiva*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Clame). Vol. 22 [Revista en línea]. Disponible en http://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf [Consulta: 2012, Mayo 15]

García, F. y Ruiz, L. (2010). *Análisis de las Praxeologías Didácticas: Implicaciones en la Formación de Maestros* [Ponencia presentada en las III Internatinal Conference on the Antropological Theory of the Diactic, celebrada en Catalunya España (25-29 de Enero).

Gascón, J. (1998). *Evolución de la Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica*. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 18, Nº. 52, 1998, pp. 7-33.

Gascón, J. (2001). *Incidencia del Modelo Epistemológico de las Matemáticas Sobre las Prácticas Docentes*. RELIME (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa).Vol. 4, Nº. 2, 2001 , pp. 129-160.

Gascón, J. (2011). *Las Tres Dimensiones Fundamentales de un Problema Didáctico. El Caso del Algebra Elemental*. RELIME (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa) ISSN 1665-2436.Vol. 14, Nº. 2, 2011 , pp. 203-231.

Gervasi, L. (Sin Año) *¿Cuál Es El Papel Del Profesor De Matemática Frente A Los Problemas De La Educación Matemática?* [Artículo en línea] Disponible en http://www.soarem.org.ar/Documentos/25%20Gervasi.pdf. [Consulta: 2011, Enero 08]

Goetz, J. y LeCompte, M. (1988). *Etnografía y Diseño Cualitativo en Investigación Educativa*. Madrid: MORATA.

Gómez, I. y Planchart, E. (2005). *Educación Matemática y Formación de Profesores. Propuestas Para Europa y Latinoamérica*. Bilbao: IPAR.

Larson, R. y Hostetler, R. (1999). *Cálculo y Geometría Analítica* (Vol. 1, 6ta ed.).

Ley Orgánica de Educación (2009). *Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela*, 5.929 (Extraordinario), Agosto 15, 2009.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (7ma. ed.). México: OXFORD.

Lovera, G. (2004). *Propuesta Didáctica Para La Enseñanza –Aprendizaje de las Funciones Logarítmica y Exponencial Basada en la Resolución de Problemas*

Matemáticos en los Alumnos del Primer Año de Ciencias. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay.

Martins, F. y Stracuzzi, P. (2010). Metodología de la Investigación Cuantitativa. Caracas: FEDUPEL

Méndez, J. (2007) *Euler y el Análisis Matemático*. UNIÓN (Revista Iberoamericana de Educación Matemática) ISSN 1815-0640.Nº. 10, pp. 19-26. [Revista en línea]. Disponible en http://www.fisem.org/web/union/revistas/10/Union_010_006.pdf [Consulta: 2012, Julio 20]

Morin, E. (1999). *La cabeza bien puesta*. Buenos Aires: Nueva Visión SAIC.

Orellana, M. (1996). *Historia de la Matemática*. Módulos I, II y III. Universidad Central de Venezuela.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, instituto Internacional para la Educación Superior. (2010). *Informe de gestión 2008-2010*.

Pastor, J. y Babini, J. (2000). *Historia de la matemática* (Vol. 1). España: Gedisa Editorial.

Pastor, J. y Babini, J. (2000). *Historia de la matemática* (Vol. 2). España: Gedisa Editorial.

Pacheco, V. (2013). *Organizaciones Matemáticas y Didácticas de los Practicantes-Docentes. Caso Ecuación de 2do Grado con una Incógnita*. Tesis de Maestría. Universidad de Carabobo, Valencia. [Tesis en línea] Disponible en http://produccion-uc.bc.uc.edu.ve/documentos/trabajos/7000362D.pdf. Consulta: 2015, Enero 10]

Sierra, A. (2006). *Lo Matemático en el Diseño y Análisis de Organizaciones Didácticas: Los Sistemas de Numeración y la Medida de Magnitudes*. Tesis Doctoral. Universidad de Complutense, Madrid.

Sierra, T. y Olarría, A. (2010) *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria* [Ponencia presentada en las III Internatinal Conference on the Antropological Theory of the Diactic, celebrada en Catalunya España (25-29 de Enero).

Szemruch, V., y Vaccaro, D. (2002). *Logaritmos, Física y Algo Más. Acta Latinoamericana de Matemática* (RELIME). Vol. 11 [Revista en línea]. Disponible en http://www.matedu.cicata.ipn.mx/documentos/alme/alme11.pdf [Consulta: 2010, Noviembre 20]

Sin autor (2008) *Matemática1*. Caracas: Santillana.

Tapia, F. (2003) *Historia de los logaritmos. Apuntes de las matemáticas*. [Artículo en línea] Disponible en http://www.latindex.unam.mx. [Consulta: 2012, Agosto 18]

Viviano, A. (2010). *La Relación del Profesor de Matemática Al Saber Matemático: El Caso De La Ecuación Cuadrática* [Ponencia presentada en las III International Conference on the Antropological Theory of the Diactic, celebrada en Catalunya España (25-29 de Enero).