



**UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL**



**DISEÑO DE UN MANUAL DE ANÁLISIS MATRICIAL DE LAS
ESTRUCTURAS AJUSTADO AL PROGRAMA DE LA
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL DE LA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO**

Autores:

Br. Rosalba V. Mejias V.

Br. Ahinara Ramos F.

Tutor:

Prof. Freddy Lanza

Bárbula, Noviembre de 2011



**UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL**



**DISEÑO DE UN MANUAL DE ANÁLISIS MATRICIAL DE LAS
ESTRUCTURAS AJUSTADO AL PROGRAMA DE LA
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL DE LA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO**

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad de Carabobo, para optar al Título de Ingeniero Civil

Autores:

Br. Rosalba V. Mejias V.

Br. Ahinara Ramos F.

Tutor:

Prof. Freddy Lanza

Bárbula, Noviembre de 2011



**UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL**



APROBACIÓN DEL TUTOR

En mi carácter de tutor del trabajo de grado presentado por las ciudadanas Mejías Rosalba y Ramos Ahinara para optar por el grado de Ingeniero Civil, considero, que dicho trabajo reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a presentación pública y ser evaluado por el jurado designado.

Bárbula, _____ de Noviembre de 2011

Freddy Lanza
C.I.



**UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL**



**DISEÑO DE UN MANUAL DE ANÁLISIS MATRICIAL DE LAS
ESTRUCTURAS AJUSTADO AL PROGRAMA DE LA
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL DE LA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO**

Autoras: Mejías Rosalba y Ramos Ahinara

Trabajo de grado aprobado para optar por el título de Ingeniero Civil de la Universidad de Carabobo, por el jurado designado:

Nombre:
C.I.:

Nombre:
C.I.:

Nombre:
C.I.:



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL



DISEÑO DE UN MANUAL DE ANÁLISIS MATRICIAL DE LAS ESTRUCTURAS AJUSTADO AL PROGRAMA DE LA CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL DE LA UNIVERSIDAD DE CARABOBO

Autoras: Mejías Rosalba y Ramos Ahinara
Fecha: Octubre, 2011

RESUMEN

El aprendizaje significativo en relación con el análisis matricial de las estructuras constituye una base fundamental para el desarrollo de las competencias del Ingeniero Civil egresado de la Universidad de Carabobo. Esta investigación tuvo como objetivo elaborar un manual sobre el análisis matricial de las estructuras y sus aplicaciones en la actualidad dirigido a estudiantes y docentes de dicha cátedra, de acuerdo a esto corresponde a una investigación de prototipo tecnista en su modalidad de proyecto especial. Dicho proyecto fue ejecutado en tres fases, la primera, una fase de diagnóstico de la necesidad de la creación del manual para lo cual se recurrió a los estudiantes y docente de dicha cátedra como unidades de análisis y se requirieron como técnicas la observación directa y la encuesta en su modalidad de entrevista no estructurada. Luego se avanzó hasta la segunda fase correspondiente al estudio de la factibilidad funcional y económica para el diseño del manual. Ante la evidencia de los resultados obtenidos se procedió a la tercera y última fase constituida por diseño del manual.

Palabras clave: manual, análisis matricial de las estructuras, estrategias de aprendizaje.



AGRADECIMIENTOS

No alcanzarían todas las páginas del planeta para agradecer a aquellas personas que directa o indirectamente contribuyeron con nosotras para la elaboración de este trabajo de grado, ellos de múltiples formas, ya sea leyendo, opinando, corrigiendo, teniendo paciencia, acompañándonos en los momentos de felicidad o simplemente con ese “si se puede” en los momentos de crisis, representaron el apoyo que tanto necesitábamos.

En primer lugar queremos agradecer a Dios, por darnos el coraje, las ganas, las fuerzas y el ímpetu para desarrollar y culminar con salud y armonía tan anhelada meta, y porque gracias a sus múltiples maniobras del día a día permitió que se forjara esta hermosa amistad que llevo a unirnos como hermanas para lograr juntas este sueño. Gracias Padre, por todo lo que nos regalas día a día, y sobre todo por tu inmensa compañía.

Deseamos agradecer profundamente a nuestros padres, porque desde nuestros primeros años han estado siempre ahí, ofreciéndonos un cariño incondicional y un hogar maravilloso donde encontrarnos siempre plenas. Sin su apoyo, amor y compañía, no sería fácil el andar del día a día. Gracias por ser las personas más importantes en nuestra vida, por darnos aliento, por tomarnos de la mano y compartir con nosotras este momento de alegría que también es vuestro.

Sin lugar a duda, este trabajo no pudo haberse realizado sin la formación académica obtenida en la ilustre Universidad de Carabobo, fue nuestra casa durante 5 años, allí crecimos como profesionales y en ella se



guardan los mejores años de nuestras vidas, que encierran vivencias y anécdotas que jamás olvidaremos. En ella conocimos a grandes profesores que no solo nos formaron académicamente, abriéndonos la mente con sus enseñanzas sino que también fueron excelentes seres humanos. Gracias por brindarnos la hermosa oportunidad de estudiar en una de las mejores casas de estudios.

Gracias a las sugerencias y contribuciones que para este trabajo hicieron los profesores Fernando Villalobos y José Olival, al primero por brindarnos una idea para desarrollar como trabajo de grado e impartirnos los conocimientos necesarios desde nuestros primeros años de estudio en el ámbito estructural y al segundo por las revisiones que nos dio que resultaron de gran utilidad.

No podíamos pasar por alto agradecerle al profesor Freddy Lanza, quien de una manera muy cariñosa y amable, pudo acogernos sin pensarlo dos veces para brindarnos sus conocimientos en el análisis matricial, pero sobre todo gracias por su ayuda y por permitir que a pesar de estar cortas de tiempo lográramos concluir con éxito este trabajo de grado. Estaremos eternamente agradecidas.

Finalmente gracias a todos nuestros familiares, amigos y compañeros de estudio, quien día a día compartimos buenos y malos momentos, esas personas que como un granito de arena contribuyeron de una u otra forma con su atención, confianza, cariño y afecto. Sería imposible olvidar tan buenos momentos vividos.

“El secreto de la felicidad no es hacer siempre lo que se quiere, querer sino siempre lo que se hace”. Tolstoi



DEDICATORIA

Por este trabajo de grado, pero sobre todo por los años compartidos:

Con todo nuestro amor y cariño para aquellas personas que de múltiples maneras permitieron y contribuyeron con este aspiración, no solo académicamente sino personalmente.

A nuestro Dios todo poderoso, quien es nuestra guía, compañero y amigo en todo momento. Que con su amor, nos ayuda a vencer todos nuestros obstáculos y nos ilumina en los momentos más difíciles. Gracias por permitirnos alcanzar tan deseada meta.

A nuestros padres, les dedicamos este trabajo con especial cariño, ya que de muchas maneras estuvieron con nosotras incondicionalmente, en esos días de absoluta dedicación y en esas noches de traspasos y desvelos, ellos con su inmensa sabiduría forjaron en nosotras el espíritu de la superación, pero también con su amor permitieron que se hiciera más fácil el camino.

A la Universidad de Carabobo, Ingenieros, Profesores y todo el alumnado de Ingeniería Civil, a quienes le pueda servir esta propuesta, como herramienta en su vida profesional.



INDICE GENERAL

	pp.
RESUMEN.....	x
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO	
I EL PROBLEMA.....	3
Planteamiento del Problema.....	3
Formulación del Problema.....	4
Objetivos de Estudio.....	4
Objetivo General.....	4
Objetivos Específicos.....	4
Justificación.....	5
Alcance y Delimitación del Problema.....	5
II MARCO TEÓRICO.....	7
Antecedentes.....	7
Bases Teóricas.....	9
Análisis Matricial de las Estructuras.....	9
Importancia del Análisis Matricial en La Ingeniería Civil.....	10
Aprendizaje Significativo.....	11
Manual como herramienta de Aprendizaje.....	12
Objetivos de un Manual.....	14



III	MARCO METODOLÓGICO.....	15
	Tipo y Diseño de La Investigación.....	15
	Unidades de Análisis.....	15
	Técnicas e Instrumentos de Recolección de Información.....	16
	Análisis de Datos.....	16
	Fases de la Investigación.....	17
IV	ANÁLISIS DE RESULTADOS	18
	Análisis cualitativo del diagnóstico de la necesidad.....	18
	Análisis de la factibilidad.....	18
V	LA PROPUESTA	20



INTRODUCCION

Entre las innumerables ramas que conforman la ingeniería civil se encuentra la ingeniería estructural, encargada de solucionar problemas de diseño y construcción de estructuras, y no es mas que parte esencial del esfuerzo humano que se ve demostrado en la continua evolución que ha tenido esta rama de la ingeniería, haciéndose notar desde el siglo XVII donde los ingenieros comenzaron a aplicar el conocimiento de la mecánica para el diseño de estructuras. Estas primeras creaciones no fueron más que producto de tanteos, de la aplicación de reglas empíricas y de ingenio, como lo demuestran hoy día las pirámides egipcias (3000 a.C), los coliseos y acueductos romanos (200 a.C -200d.C) y los templos griegos (500-200a.C) solo por citar algunas. Con el pasar de los años y de los ingenieros de varias épocas, donde cabe aludir a Galileo Galilei considerado como iniciador de la teoría de estructuras, la ingeniería estructural fue avanzando así como también el estudio matricial de las mismas, y fue desarrollándose hasta el advenimiento de las computadoras en el año 1970, ya que las relaciones fundamentales de la ingeniería estructural se expresaron en forma de ecuaciones matriciales para que los cálculos numéricos se pudieran realizar de manera eficiente en un computador. Con este nuevo avance, se lograron resolver grandes sistemas de ecuaciones simultaneas que podían llevarse días y semanas, y que con la era tecnológica se solucionaban en tan solo segundos, es así como hoy día la ingeniería estructural a través del análisis matricial, pasa solo a satisfacer los estándares necesarios para alcanzar los objetivos de seguridad y nivel de servicios que exigen las edificaciones, de una manera eficaz, sencilla y practica. Es por ello que la ingeniería estructural en conjunto con el cálculo matricial representa la técnica que goza de la elegancia matemática y la cualidad de simplificar de una manera lógica el



cálculo y el diseño de sistemas estructurales, así como conserva la capacidad de ofrecer exactitud y precisión en los resultados, sin olvidar que el análisis matricial dota al profesional de la ingeniería civil de los procesos más óptimos y precisos para la solución de estructuras.

En nuestro país el análisis matricial no tiene mucho auge, abarcándose únicamente en el estudio estructural los métodos de cálculos convencionales, y no se ha tomado en cuenta que el análisis estructural mediante los métodos matriciales no implica la adquisición de conceptos nuevos de ingeniería estructural, sino que por el contrario solo facilita la obtención de cálculos puntuales. Este objetivo se lleva a cabo efectuando una recopilación bibliográfica, que se presenta en resumen a continuación:

El trabajo se dividió en cinco capítulos, en el primero se realiza el planteamiento, formulación y justificación del problema, además de definir el alcance y los objetivos a cubrir. Por otro lado en el segundo capítulo se presenta una explicación detallada de la teoría necesaria para comprender de forma adecuada el estudio. En el tercer capítulo se introduce el análisis bibliográfico realizado para el diseño de un manual de análisis matricial de las estructuras, ajustado al programa de la carrera de ingeniería civil de La Universidad de Carabobo; a través de una revisión bibliográfica exhaustiva. En el cuarto capítulo se efectúa el análisis de los resultados de una encuesta realizada de manera indirecta donde se reflejan las vivencias obtenidas, que representaron el empuje para dar inicio al presente trabajo. Y finalmente en el quinto y último capítulo, se muestran la propuesta final, donde se busca abrir los conocimientos necesarios a los estudiantes y profesionales a fines a la ingeniería civil en el estudio matricial de las estructuras.



CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

Planteamiento del Problema

El análisis matricial corresponde a un método clásico que nace a fines del siglo XIX, donde a fuerza de intentar disminuir la cantidad de cálculos laboriosos, que incluían un gran número de ecuaciones lineales difícil de resolver manualmente, los ingenieros de la época fueron creando nuevas técnicas y métodos prácticos para la solución de sistemas estructurales. Así nace por ejemplo, el renombrado método de Cross para resolver estructuras, que a pesar de ser muy útil, solo era aplicable para determinados tipos de ellas. El cálculo matricial permite la solución de problemas de manera eficiente, compacta y al mismo tiempo general, además desde el punto de vista práctico representa una base para el desarrollo de programas de computación.

Actualmente, la asignatura estructuras avanzadas que engloba todos los conceptos básicos para el análisis matricial de las estructuras, a pesar de ser importante gracias a la exactitud que arroja en los cálculos, posee un bajo desarrollo de investigaciones en Venezuela y carece de textos que proporcionen a profesores y alumnos una base en la cual puedan guiar y sustentar sus conceptos y teorías para facilitar no solo el aprendizaje del estudiante sino también el desenvolvimiento del profesor en el aula clases.

Por lo tanto, la idea de elaborar una propuesta sobre un manual para el análisis matricial de las estructuras y sus aplicaciones actuales, es desarrollar los conceptos básicos y una metodología eficiente y usada en la actualidad en el análisis matricial con una guía completa y con un lenguaje digerible y amigable, que no solo logre despertar interés en los estudiantes, sino proporcionar las herramientas necesarias para desarrollar destrezas en este ámbito estructural.

Formulación del Problema

En base al planteamiento antes descrito surge la siguiente interrogante: ¿Qué herramientas se podrían utilizar para facilitar el desarrollo de las destrezas en los estudiantes cursantes de la cátedra estructuras avanzadas de la carrera de Ingeniería Civil de la Universidad de Carabobo?

Objetivos del Estudio

Objetivo General

Elaborar un manual de análisis matricial de las estructuras y sus aplicaciones en la actualidad, dirigido a estudiantes de la carrera de ingeniería civil de la Universidad de Carabobo.

Objetivos Específicos

1. Diagnosticar la necesidad de la elaboración de un manual sobre el análisis matricial de las estructuras y sus aplicaciones actuales.
2. Conocer los objetivos de la asignatura análisis matricial de las estructuras pertinentes a la carrera de Ingeniería civil que presentan mayor complejidad según la opinión de los estudiantes

3. Determinar la factibilidad del diseño de un manual sobre el análisis matricial de las estructuras y sus aplicaciones actuales.
4. Proponer el diseño de un manual sobre el análisis matricial de las estructuras y sus aplicaciones actuales.

Justificación

La elaboración del manual para el análisis matricial de las estructuras y sus aplicaciones actuales representa una herramienta útil con la que el estudiante podrá consolidar los conocimientos adquiridos en clases, además, de despejar cualquier duda que se le presente cuando no posea la disposición inmediata del profesor. El manual pretende disponer de un lenguaje que al estudiante le resulte digerible y práctico, que sea semejante al escuchado en clases.

El tratamiento básico del cálculo matricial para el análisis de estructuras no ha adquirido una variación significativa desde su nacimiento en el siglo XIX, sin embargo este método práctico es un arte que con el pasar de los años y los avances tecnológicos necesita ser constantemente actualizado, por lo que el profesor universitario encargado de dictar la asignatura de la cátedra de estructuras avanzadas donde se especificaran los conceptos elementales para el análisis matricial de las estructuras y sus aplicaciones actuales, podrá tener en el manual una base con una metodología vigente en la cual apoyar sus ideas y mejorar sus técnicas de enseñanzas al impartir la materia, y de esta manera llegarle con mayor facilidad al alumno.

Delimitación

La intención es elaborar un manual que sirva de apoyo a los estudiantes de ingeniería civil, que posean conocimientos básicos sobre el análisis de estructuras y con esta guía puedan adquirir y sustentar



conceptos fundamentales para el diseño estructural de las edificaciones por el método matricial, a fin de proporcionar los lineamientos necesarios para iniciar, desarrollar y concluir los cálculos con facilidad y destreza.

De una u otra forma, se busca perfilar el lenguaje matricial del alumnado que posee un conocimiento previo sobre al análisis estructural, y esto se quiere lograr llegando al estudiante mediante un lenguaje sencillo, comprensible y práctico, donde puedan conectar los conocimientos claves del diseño de estructuras con los conceptos fundamentales sobre el análisis matricial de las mismas. En cada concepto que se describa, se contará con ejemplos donde se muestre el procedimiento necesario para el análisis y diseño estructural, aprovechando la metodología explicada y de esta manera facilitar la comprensión de quien lo utilice.



CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

Antecedentes de la Investigación

La presente investigación, se basó en ciertos trabajos que conforman el punto de partida para el diseño del manual para la asignatura “Análisis Matricial de las Estructuras”, de los cuales en los conceptos y estructuras allí mostradas se pudo dar inicio al marco teórico de la investigación.

En el contexto sobre el uso de manuales en el proceso de enseñanza aprendizaje, se encuentran trabajos como el de Mora (2004) titulado “La Memoria Textual en la Cultura Pedagógica. Caso: La Grita, cantón de la antigua Provincia de Mérida de Maracaibo-Venezuela. De la Escuela Conventual a la Escuela Republicana”, en éste se realizó un análisis de la historia de los manuales escolares, tomando como referencia tres tipos de escuela: conventual, patriótica y municipal. El autor hace referencia a la gran funcionalidad de los manuales como instructivos y soporte curricular, así como también, hace referencia que los primeros manuales fueron los relacionados con geografía.

Dentro de este mismo contexto está el trabajo de Cabero, Duarte y Romero (2002) “Libros de texto y sus Potencialidades para el aprendizaje”, en donde diferentes pedagogos señalando la necesidad de algunos pedagogos en recurrir a manuales y libros de textos en la enseñanza, haciendo referencia que este tipo de material se vuelve referencia curricular básica finales del siglo XIX para el sistema educativo occidental. Dentro de los aspectos analizados por los autores fue la



actitud positiva tanto de profesores como estudiantes hacia el uso de los libros. Los estudiantes indicaron el mayor esfuerzo mental en contraste con la televisión o video. Fueron muy pocos los estudiantes que mostraron una opinión negativa ante el uso de libros de texto.

Abarcando un poco el área de ingeniería, se cuenta con un trabajo de grado realizado por Meneses y Abreu (2006) titulado “Diseño de una guía práctica para el laboratorio de accionamientos eléctricos” donde se pretende exponer un conjunto de prácticas desarrolladas en el laboratorio de accionamientos eléctricos de la facultad de ingeniería de la Universidad de Carabobo, que brindará a los estudiantes cursante de dicha materia, un apoyo teórico y práctico para reforzar los conocimientos adquiridos. Este trabajo de grado con el presente, poseen similitud ya que ambos coordinan de una manera metodológica el lenguaje más apto, dirigible, y sencillo para facilitar el entendimiento del alumno y así afianzar los conceptos y teorías obtenidos previamente.

Siendo más específicos sobre el uso de manuales dentro de la carrera de ingeniería civil de la Universidad de Carabobo, se encuentra el trabajo de Castillo y Tovar (2005) “Manual Práctico para el Laboratorio de Topografía” el cual tuvo como objetivo la elaboración de un manual para el laboratorio de topografía de la Universidad de Carabobo que recopilase todo el contenido programático de la Asignatura, y de esta manera permitir a los estudiantes afianzar y sustentar los conocimientos adquiridos de una manera organizada y didáctica. La relación con el presente trabajo de grado resulta casi directa, puesto que la problemática que se presentaba en este caso era similar a la que se presenta en la actualidad con la asignatura estructuras avanzadas en el análisis matricial de las estructuras, al requerir un manual que proporcione una metodología que sirva a estudiantes y profesores como base de estudio.



Por otro lado, Barros F. y Parra D. (2005), en su trabajo de grado “Estudio y aplicación de una metodología para la planificación, análisis y diseño de estructuras aporticadas de concreto armado de acuerdo a las nuevas normativas COVENIN” buscaron crear una guía para estudiantes cursantes de la cátedra de Proyectos Estructurales de Concreto que sirviese de metodología en clases para el diseño de estructuras aporticadas y de la misma forma representa una herramienta para el desenvolvimiento profesional de ingenieros civiles. Por la tanto ambos trabajos de grado, poseen una relación inmediata ya que se busca establecer tanto en uno como en otro, los métodos mas prácticos y sencillos que proporcionen al alumno y profesores de la carrera las herramientas y conceptos esenciales para cada tema.

Y finalmente Magallanes y Suzzarini (2000) en su trabajo de grado “Introducción al proyecto de estructuras de concreto y acero mediante recursos multimedia” orientan la enseñanza de las materias de proyectos estructurales de concreto y proyectos estructurales de acero, con el propósito de contribuir en los conocimientos impartidos de una manera practica e interactiva, donde mediante una serie de imágenes, tablas, problemas ilustrativos e información concisa, abarcaron los temas mas significativos de las materias antes nombradas. Por ende, este trabajo de grado sirvió de referencia para concretar en el nuestro, los conceptos fundamentales y más sobresalientes para el cálculo matricial.

Bases Teóricas

Análisis Matricial de las Estructuras

De acuerdo a Kassimali (2001), en su libro Análisis Estructural, define que el análisis matricial de las estructuras es un método clásico esencial para desarrollar cierta comprensión del comportamiento estructural y de los principios del análisis correspondiente. Es así como se resalta la importancia de lo que representa el análisis matricial de las estructuras

para un ingeniero civil formado o en su desarrollo. De igual forma, Ramírez (1991) describe que la utilidad de un método de análisis estructural, depende de la rapidez de su aplicación, como de la exactitud de los resultados. Lo cual sustenta que el análisis matricial no solo es un método para solucionar edificaciones pequeñas, grandes, sencillas o complejas, sino que por el contrario proporciona precisión en los cálculos estructurales, dando rapidez y seguridad al ingeniero calculista. También Ramírez (1991) nos define que el análisis matricial de las estructuras es el método preferido por los analistas, y es una técnica de cálculo matricial que ha ido adaptándose a las herramientas de cálculo disponibles por épocas, aun cuando las bases de todos los métodos son conocidas desde hace mucho tiempo, es por esta razón el análisis matricial ha sufrido y seguirá sufriendo modificaciones a objeto de impartir conocimientos actualizados. Es por ello que en 2007, los ingenieros Simon Lamar y Celso Fortul, definen que la formulación matricial del análisis estructural en la actualidad, después de los trabajos pioneros de Argynis y Kelsey en la década de 1950, está bien establecida.

Finalmente Nelson y McCormac (2008) dejan claro que el análisis matricial proporciona un lenguaje matemático muy adecuado para la descripción de un sistema estructural que puede ser resuelto con facilidad por las computadoras. Es por ello que este método resulta un abre bocas a esta nueva era tecnológica en el cálculo estructural que se nos aproxima, donde el método matricial representa el punto inicial de todo ello.

Importancia del Análisis Matricial en la Ingeniería Civil

El manual de análisis matricial de estructuras por el método de la rigidez, define la importancia del análisis matricial, desde dos puntos de vista: una desde una perspectiva teórica, a través del cual el análisis matricial permite utilizar métodos de cálculo en forma compacta, precisa y, al mismo tiempo, completamente general. Esto facilita el tratamiento de la teoría de estructuras como unidad, sin que los principios fundamentales

se vean oscurecidos por operaciones de cálculo. Y otra, desde el aspecto práctico, ya que proporciona un sistema apropiado de análisis de estructuras y determina una base muy conveniente para el desarrollo de programas de computación. En contraste con las ventajas antes expuestas sobre el análisis matricial, debe admitirse que los métodos matriciales se caracterizan por una gran cantidad de cálculo sistemático, pero la naciente era tecnológica elimina la preocupación de las operaciones rutinarias, sin embargo se debe ser consciente que sin un modelo adecuado o sin una interpretación final, el refinamiento en el análisis carece de sentido. Igualmente McCorman (2008), resalta la importancia de que todos los estudiantes de ingeniería estructural conozcan los principios fundamentales del análisis matricial de estructuras y puedan conocer tanto los puntos fuertes como débiles de este tipo de análisis, ya que el análisis matricial va reemplazando poco a poco los métodos clásicos de cálculo, además que este autor considera que un estudio inicial de algunos de los métodos clásicos seguido de un estudio de los métodos matriciales formarán ingenieros con un mejor entendimiento del comportamiento estructural.

Aprendizaje Significativo

Hoy en día se requiere que un ingeniero sea un profesional que esté capacitado de hacer uso pleno de sus habilidades para analizar, evaluar y solucionar diversos problemas en el área correspondiente (Chavarría Olarte, 2004). A partir de la teoría del aprendizaje significativo de David Paul Ausubel se plantean los tres pilares esenciales para su logro: el conocimiento previo, el nuevo conocimiento y la actitud del estudiante, donde éste último pilar se ve afectado por la motivación y la capacidad del estudiante para relacionar lo viejo con lo nuevo.

Dentro de este marco, se encuentra la actividad del docente como facilitador de estrategias para crear un entorno de instrucción en donde los estudiantes logren entender lo que se está aprendiendo. Por lo que,



más que memorizar hay que comprender. Este aprendizaje sirve para aplicar lo aprendido en situaciones futuras, en un contexto diferente.

Dentro de las ideas básicas de aprendizaje significativo se tienen:

1. Los conocimientos previos han de estar relacionados con aquellos que se quieren adquirir de manera que funcionen como base o punto de apoyo para la adquisición de conocimientos nuevos.
2. El aprendizaje significativo puede producirse mediante la exposición de los contenidos por parte del docente o por descubrimiento del discente.
3. Requiere una participación activa del discente donde la atención se centra en el cómo se adquieren los aprendizajes.
4. Aprendizaje significativo y aprendizaje mecanicista no son dos tipos opuestos de aprendizaje, sino que se complementan durante el proceso de enseñanza. Pueden ocurrir simultáneamente en la misma tarea de aprendizaje. Por ejemplo, la memorización de las tablas de multiplicar es necesaria y formaría parte del aprendizaje mecanicista, sin embargo su uso en la resolución de problemas correspondería al aprendizaje significativo.
5. Para la promoción de dicho aprendizaje es necesario: Proporcionar retroalimentación productiva para guiar al aprendiz e infundirle una motivación intrínseca, proporcionar familiaridad, Explicar mediante ejemplos, Guiar el proceso cognitivo y Fomentar estrategias de aprendizaje.

Manual como herramienta de aprendizaje

De acuerdo a Reza (1997) los manuales son materiales impresos que presentan un conjunto de información, conceptos, datos y teorías que son necesarias para integrar los contenidos de algún curso. Los manuales, son primeramente, herramientas educativas, libros elementales, claros, precisos y metódicos, destinados a facilitar el aprendizaje. En otras



palabras, el manual se presenta como el soporte, el depositario de los conocimientos y de las técnicas que en un momento dado una sociedad cree oportuno que la juventud debe adquirir para la perpetuación de sus valores.

Chopin, expone claramente que un manual no es solamente un concepto, es un libro, un conjunto de hojas impresas que forman un volumen, es decir, en definitiva, un producto fabricado, difundido y consumido, su producción material, y consecuentemente su aspecto evoluciona con el progreso tecnológico y con el concurso de otros soportes de la información; su comercialización, su distribución, su costo depende del contexto económico, político y reglamentario. Así mismo, revelan el principio de accesibilidad del conocimiento en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin duda, en los países en los que se pone en práctica una edición educativa del Estado, o en los que se ejerce un control estricto sobre los productos de la edición privada, la producción se reduce. Pero en los países donde la edición clásica es libre, o al menos no es objeto de una censura previa que reduce considerablemente la producción, los manuales, por el único hecho de la competencia entre las editoriales privadas, se publican en gran número.

Partiendo de esta idea, Peña (1986) manifiesta que “un manual puede tener diferentes funciones:

- Transmisión de conocimientos
- Desarrollo de capacidades y de competencias
- Consolidación de los conocimientos adquiridos
- Evaluación de los conocimientos adquiridos
- Ayuda a la integración de los conocimientos adquiridos
- Referencia
- Educación social y cultural.

Ninguna de estas funciones es incompatible en sí misma con un enfoque integrado de los aprendizajes, ya que cada una constituye un aspecto particular de los aprendizajes.



Objetivos de un Manual

De acuerdo al Manual de Formación de Instructores en Empresa, los manuales ayudan tanto a los docentes como a los estudiantes en el desarrollo ordenado y sistemático de los contenidos del curso.

A los docentes, el manual le permite:

- a) Identificar la secuencia de los contenidos a impartir, en base a los objetivos.
- b) Hacer una distribución equitativa de dichos contenidos.
- c) Establecer unidades de instrucción que permitan la preparación de las sesiones.
- d) Establecer los procedimientos para ejecutar las distintas actividades en relación con el puesto de trabajo.
- e) Determinar los conocimientos técnicos pertinentes al desarrollo de las actividades a cumplir.
- f) Servir de medio de evaluación del participante.

Por otra parte, los manuales les permiten a los alumnos lo siguiente:

- a) Conocer cada uno de los diferentes pasos para la ejecución de las actividades que tendrán que realizar.
- b) Identificar los conocimientos técnicos necesarios para la ejecución de las actividades u operaciones.
- c) Realizar consultas durante el desarrollo del curso.
- d) Revisar las unidades de instrucción tantas veces como le sea necesario.
- e) Subrayar los puntos o áreas que más le interesen.
- f) Reforzar los conocimientos y destrezas adquiridos.
- g) Enriquecer el vocabulario.
- h) Realizar su autoevaluación.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

Tipo de Investigación

Esta investigación se encuentra enmarcada dentro del prototipo de investigación tecnicista, en la modalidad de Proyecto Especial. Es tecnicista, ya que se caracteriza por la aplicación de la experiencia técnica del investigador en la solución de una situación problemática de orden práctico y entra dentro de la modalidad de proyecto especial ya que “corresponde a la producción de tecnología dura, inventos y desarrollo de prototipos, adaptación y modificación de equipos, herramientas e instrumentos para satisfacer necesidades generales o específicas” (Orozco Moret, Labrador y Palencia de Montañez 2002, p.24).

Diseño de Investigación

Con respecto al diseño del presente estudio, se puede decir que es una investigación no experimental transeccional, ya que no hay manipulación deliberada de las variables y en los que se observan los fenómenos en su ambiente natural para después analizarlos, tal como lo señalan Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (2007).

Unidades de Análisis

Las unidades de análisis fueron constituidas por los estudiantes cursantes de la asignatura Estructuras Avanzadas de la carrera de Ingeniería Civil de la Universidad de Carabobo durante el segundo

período académico del año 2010, en conjunto con el profesor que dicta dicha asignatura. Las unidades de análisis corresponden en este caso a los sujetos de estudios que de acuerdo al planteamiento de la investigación serán quienes aportarán información relevante (Ob. Cit.)

Técnicas e Instrumentos de Recolección de Información

Dentro de las técnicas utilizadas para la presente investigación se encuentra la observación directa, para la cual se empleó como instrumento un registro anecdótico de las vivencias durante el período en que las investigadoras cursaron la asignatura. Por otro lado, se empleó la encuesta en su modalidad de entrevista informal no estructurada, y como instrumento libreta de anotaciones.

Análisis de Datos

Según lo define el autor Tamayo y Tamayo M. (2006) “una vez recopilados los datos por los instrumentos diseñados para este fin, es necesario procesarlos, es decir, elaborarlos matemáticamente, ya que la cuantificación y su tratamiento estadístico nos permitirán llegar a conclusiones...” (p. 187).

Una vez que se han aplicado todos los instrumentos se obtiene una cantidad de información que debe ser ordenada, clasificada y manejada de forma tal que ella pueda responder a cada uno de los objetivos de esta investigación, primero se organiza dependiendo de las características de la información y luego se registran las técnicas de análisis empleadas por los autores, estas son de tipo cualitativas ya que no se ponderarán en números las situaciones, solo se apreciarán las condiciones que cumplen o no con las normativas pertinentes.



Fases de la Investigación

Para el logro de los objetivos propuestos, la investigación se desarrolló en tres fases:

1. Fase diagnóstica

En esta fase se realizó un estudio de indagación acerca de la necesidad de la creación de la propuesta. Estuvo constituida por la experiencia de las autoras, profesores y estudiantes de la asignatura.

2. Fase de estudio de factibilidad

Partiendo de una revisión documental y estudios de mercado se realizó estudio de la factibilidad funcional y económica.

3. Fase de diseño de la propuesta

Se realizó un esquema de los contenidos programáticos de la asignatura, una revisión bibliográfica de los contenidos y los temas de mayor dificultad según la opinión de los estudiantes para decidir la estructura del manual.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Análisis Cualitativo del Diagnóstico de la Necesidad

El diagnóstico de la necesidad estuvo dado primeramente por la experiencia del único profesor dictante de la asignatura durante aproximadamente 18 años a quien se le realizó una entrevista informal y las vivencias experimentadas por las investigadoras. Adicionalmente, se realizaron entrevistas informales a 20 estudiantes para corroborar si tales vivencias eran compartidas por otros.

Todo lo anterior dejó en evidencia la necesidad de realizar un manual sobre el análisis matricial de las estructuras y sus aplicaciones actuales, donde tanto el alumno como el profesor puedan sustentar y afianzar sus conocimientos tanto teóricos, como prácticos.

Análisis de la Factibilidad

Por tratarse de un proyecto especial se requirió de un estudio de la factibilidad funcional y económica para el manual, esto es un análisis de costo beneficio y/o un estudio de mercado tal como lo señalan Orozco y Col.

Factibilidad Funcional

La factibilidad funcional del manual está sustentada en la necesidad que posee la escuela de ingeniería civil de la Universidad de Carabobo en

la cátedra de estructuras, de una guía que represente para los estudiantes y los profesionales afines a esta rama de la ingeniería, de una base donde ellos puedan afianzar los conocimientos obtenidos en las clases de la asignatura estructuras avanzadas, mediante conceptos definidos con un lenguaje asimilable, donde aquel que posea un conocimiento base sobre análisis estructural podrá comprender los términos que se manejan, además el manual posee ejemplos sencillos ilustrativos que le facilitaran al lector entender la parte practica de los temas sin la necesidad de recurrir para la comprobación de los resultados, al uso de computadoras y software especializado. La propuesta también permitirá al alumnado practicar fuera de las horas de clases mediante los ejemplos propuestos que se presentan en el manual. Todo esto engloba una serie de factores cuyo único objetivo es garantizar que el lector que se interese por los temas del análisis matricial de las estructuras, contara con una guía para apoyar, aumentar y conocer mas sobre este bello mundo del análisis de las edificaciones.

Factibilidad Económica

Es importante evaluar el costo-beneficio del manual, y verificar que sea accesible para los estudiantes, es por ello que haciendo una análisis de costo se dedujo que este puede ser adquirido a un precio aproximadamente de 100 bsf. Lo cual es factible, ya que es un costo bajo comparado con el precio que puede tener un libro de análisis estructural en el mercado, tomando en cuenta que los enfoques de ambos textos son diferentes, ya que el primero posee un lenguaje familiar, manejado en clase, y el segundo posee un lenguaje mas técnico.



CAPÍTULO IV

LA PROPUESTA



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL



MANUAL DE ANÁLISIS MATRICIAL DE LAS ESTRUCTURAS
AJUSTADO AL PROGRAMA DE LA CARRERA
DE INGENIERÍA CIVIL DE LA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO

Autores

Br. Rosalba V. Mejias V

Br. Ahinara Ramos F

Bárbula, Noviembre de 2011



**UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL**



**MANUAL DE ANÁLISIS MATRICIAL DE LAS ESTRUCTURAS
AJUSTADO AL PROGRAMA DE LA CARRERA
DE INGENIERÍA CIVIL DE LA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO**

Autores:

Br. Rosalba V. Mejias V.

Br. Ahinara Ramos F.

Bárbula, Noviembre de 2011

**INDICE GENERAL**

	pp.
NOTACION Y UNIDADES.....	ii
LISTA DE CUADROS	ix
LISTA DE GRÁFICOS.....	x
RESUMEN.....	xxiii
INTRODUCCIÓN.....	1
ANÁLISIS MATRICIAL.....	3
5.1 Modelado matemático de sistemas estructurales.....	3
Sistema Estructural.....	3
Discretización de una Estructura.....	5
Coordenadas Generalizadas.....	8
Miembros Rígidos.....	14
Restricciones del Sistema.....	16
Problema Primario y Complementario.....	22
Funciones de forma.....	31
5.2 Nociones básicas de matrices para el análisis de estructuras.....	44
Matriz de Rigidez.....	44
Matriz de deformación-fuerza.....	45
Matriz de rigidez de un miembro.....	45
Matriz de rigidez de un miembro axialmente rígido.....	51
Matriz de rigidez de un miembro transversalmente rígido.....	52
Matriz de rigidez de un miembro rotado.....	52
Matriz de carga-desplazamiento.....	56
Matriz de rigidez de la estructura.....	56



Matriz de Flexibilidad de una estructura.....	66
Matriz desplazamiento-deformación.	67
Matriz [A].....	67
Matriz fuerza-carga.....	72
Matriz [A] ^t	72
Matriz carga-fuerza.....	72
Matriz [B].....	72
Matriz de transformación [T].....	72
5.3 Calculo Matricial.....	76
Estructuras con grados de hiperestaticidad alta. (Método de los desplazamientos).....	77
Análisis plano.....	80
Cosenos Directores.....	92
Condensación de coordenadas.....	103
Transformación de coordenadas.....	109
Análisis tridimensional.....	116
5.4 Dinámica de Estructuras.....	132
Nociones Básicas de Dinámica Estructural.....	132
Generalidades.....	132
Dinámica de estructuras.....	132
Leyes de Movimiento de Newton.....	135
Diagramas de Cuerpo Libre.....	135
Principio de D'Alembert.....	137
Solución de la ecuación diferencial de movimiento.....	137
Frecuencia y Periodo.....	139
Amplitud del movimiento.....	139
Sistemas de un grado de libertad amortiguados.....	141
Amortiguador Viscoso.....	141



Ecuaciones de Movimiento.....	141
Sistema con amortiguamiento crítico.....	142
Sistemas Sobre-amortiguados.....	142
Sistemas Sub-amortiguados.....	143
Respuesta para Sistemas con Cargas Armónicas.....	146
Respuesta para cargas Dinámicas Generales.....	146
Cargas impulsivas e integral de Duhamel.....	147
Respuesta Espectral.....	148
Construcción del Espectro de Respuesta.....	149
Idealización Dinámica de Estructuras.....	150
Idealización de la Masa.....	150
Idealización de la Rigidez de la Estructura.....	152
Modelos de Estructuras como Pórticos Planos.....	155
Estructuras modeladas como Pórticos Planos con varios grados de Libertad Dinámicos.....	158
Vibraciones Libres en Pórticos Planos.....	160
Frecuencias Naturales y Modos de Vibración.....	160
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	166
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	169



NOTACIÓN Y UNIDADES

Las unidades utilizadas en este manual corresponden al sistema MKS: metro (m), kilogramo-fuerza (kgf), segundo (s). Las rotaciones se expresarán con utilizando como unidad angular los radianes (rad) y la temperatura en grados centígrados (°C). La notación se muestra acompañada de su ecuación dimensional:

Longitud:..... [L]

Tiempo:..... [t]

Fuerza:..... [F]

Símbolo	Definición	Unidad
L	Longitud de un elemento estructural.	[L]
L_0	Longitud inicial de un elemento estructural antes de la aplicación de una carga.	[L]
δ_{ij}	Deformación de un elemento estructural debido a la aplicación de un desplazamiento.	[L]
ε	Deformación unitaria, es el cociente entre la deformación y la longitud inicial.	[-]
θ_i	Rotación absoluta de un nodo, junta o extremo vinculado a tierra	[Ω]
φ_{ij}	Rotación de un elemento como cuerpo rígido, medido siempre desde la horizontal.	[Ω]
K_{ij}	Elemento de la matriz de rigidez de una estructura y refleja la fuerza que hay que aplicar en el punto "i" para lograr un desplazamiento unitario en el punto "j" permaneciendo fijos los restantes grados de libertad.	[F]/[L]
k_{ij}	Elemento de la matriz de rigidez de un miembro y refleja la fuerza que hay que aplicar en el punto "i" para lograr un desplazamiento unitario en el punto "j" permaneciendo fijos los restantes grados de libertad.	[F]/[L]
D_{10}	Desplazamiento en punto "i" debido a la acción del sistema cero	[L]
M_{ij}	Momento en el extremo "i" de un miembro "ij".	[F]*[L]
M'_{ij}	Momento en el extremo "i" de un miembro "ij" articulado en "j".	[F]*[L]



Símbolo	Definición	Unidad
M_{ij}^0	Momento debido a la acción de cargas del sistema primario en el punto "i" de un miembro "ij".	$[F]*[L]$
Y_i	Movimiento vertical de un nodo, junta o extremo "i" de una estructura.	$[L]$
X_i	Movimiento horizontal de un nodo, junta o extremo "i" de una estructura.	$[L]$
α_t	Coeficiente de expansión térmica de un material	$[T]^{-1}$
α	Ángulos director formado con la dirección positiva del eje X	$[-]$
β	Ángulos director formado con la dirección positiva del eje Y	$[-]$
γ	Ángulos director formado con la dirección positiva del eje Z	$[-]$
t_i	Temperatura en la fibra inferior de un elemento estructural.	$[t]$
t_s	Temperatura en la fibra superior de un elemento estructural.	$[t]$
Δt	Denota cambio de temperatura en un elemento estructural.	$[t]$
$\Delta(\Delta t)$	Es el modulo de la resta de las temperaturas superior e inferior en la sección transversal de un elemento estructural.	$[t]$
t_o	Es la temperatura promedio en el eje neutro de una sección transversal de un elemento estructural.	$[t]$
Δt_o	Es la temperatura promedio en el eje neutro menos la temperatura de referencia de la sección transversal de un elemento estructural	$[t]$
ϕ_i	Angulo de un elemento, medido siempre desde la horizontal.	$[-]$
c	Coseno del ángulo del eje de un elemento respecto a la horizontal.	$[\Omega]$
s	Seno del ángulo del eje de un elemento respecto a la horizontal.	$[\Omega]$
I	Inercia de un en cualquier punto de la longitud de un elemento estructural.	$[L]^4$
I_o	Inercia de un miembro transversalmente rígido	$[L]^4$
K_o	Factor de rigidez calculado como el cociente entre la menor inercia existente en un elemento estructural (I_o) y la longitud del mismo (L).	$[L]^3$
Q	Vector carga generalizada.	$[-]$
D	Vector desplazamiento generalizado.	$[-]$



Símbolo	Definición	Unidad
Δx	Variación de la distancia en el eje de las abscisas en un elemento inclinado.	[L]
Δy	Variación de la distancia en el eje de las ordenadas en un elemento inclinado.	[L]
W_i	Carga uniformemente distribuida sobre un elemento "ij".	[F]/[L]
Y_i	Asentamiento vertical existente en el punto "i" de una estructura	[L]
E	Módulo de Young o Módulo de elasticidad de un elemento estructural.	[F]/[L] ²
$A \rightarrow \infty$	Nomenclatura que denota restricción o impedimento a la deformación axial en un elemento estructural.	[-]
$I \rightarrow \infty$	Nomenclatura que denota restricción o impedimento a la flexión en un elemento estructural.	[-]
A	Área de una sección transversal.	[L] ²
A_0	Área de un miembro axialmente rígido	
$[K]$	Matriz de Rigidez de una estructura.	[F]/[L]
$[A]$	Matriz Desplazamiento-Deformación	[-]
$[A]^1$	Matriz Fuerza-Carga	[-]
$[B]$	Matriz Carga-Fuerza	[-]
$[F]$	Matriz de Flexibilidad	[L]/[F]
$[T]$	Matriz de Transformación	[-]
$[Q_o]$	Solicitaciones de empotramiento generadas por cambios de cargas uniformemente distribuidas, asentamientos de apoyo y cambios de temperatura, ordenadas matricialmente de acuerdo con los Q-D de la estructura. Denominada carga primaria.	[F] y/o [F]*[L]
$[Q]$	Solicitaciones actuantes en las juntas de una estructura y ordenadas matricialmente de acuerdo a los Q-D existentes generadas bajo la acción de cargas externas aplicadas en las juntas.	
$[q_c]$	Solicitaciones de empotramiento generadas por desplazamientos, ordenadas matricialmente de acuerdo con los Q-D de la estructura.	
$[q_o]$	Solicitaciones generadas por fuerzas primarias, ordenadas matricialmente de acuerdo con los Q-D de la estructura.	
$[q]$	Solicitaciones totales actuantes en las juntas de una estructura, ordenadas matricialmente de acuerdo al Q-D de la estructura.	
$[D]$	Desplazamientos en las juntas de una estructura, ordenados de forma matricial de acuerdo a los Q-D de una estructura.	[L]

Símbolo	Definición	Unidad
ν	Coefficiente de Poisson	
G	Módulo de elasticidad transversal	$[F]/[L]^2$
J	Módulo de Torsión	
$Q-D$	Coordenadas generalizadas existentes en una estructura tomando en cuenta las restricciones de miembro.	$[-]$
$q-d$	Coordenadas locales del elemento tomando en cuenta las restricciones del miembro	$[-]$
$R-r$	Coordenadas generalizadas existentes en una estructura sin tomar en cuenta las restricciones de miembro.	$[-]$

Consideraciones Generales de Trabajo

En el trabajo se analizará estructuras dentro del rango elástico de deformaciones o dentro del rango lineal, excluyendo el estudio de resolución de estructuras en el rango inelástico o no lineal.

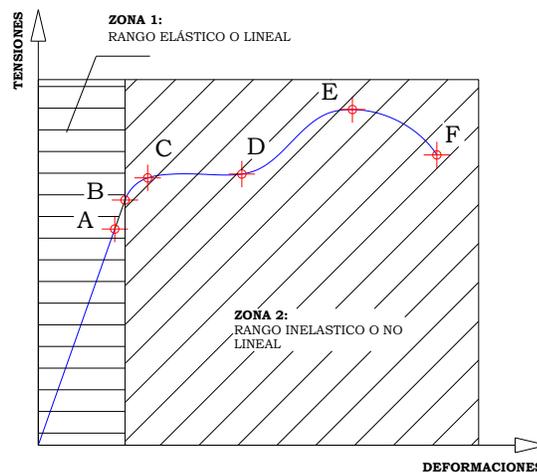


Figura A: Puntos Característicos de la Curva Tensión Vs. Deformación.
Fuente: Freddy Lanza

Convención de Signos

En el trabajo de grado se expresaran los resultados calculados tomando en cuenta tres movimientos en el plano con la siguiente orientación como positivo: movimiento vertical hacia arriba (\uparrow), movimiento horizontal hacia la derecha (\rightarrow) y el giro en sentido antihorario.



LISTA DE CUADROS

CUADRO	pp.
Tema 5.1 Modelado matemático de sistemas estructurales	
1. Tabla 5.1.1: Ecuaciones de momento para cargas actuantes en miembro.....	23
2. Tabla 5.1.2: Ecuaciones de momento producidos por temperatura y movimientos de apoyo.....	25
Tema 5.2 Nociones básicas de matrices para el análisis de estructuras	
1. Tabla 5.2.1: Matriz de rigidez para un elemento rotado doblemente empotrado.....	55
Tema 5.3 Calculo Matricial	
1. Tabla 5.3.1: Cosenos directores.....	94
2. Tabla 5.3.2: Resumen de Cx y Cy. (Ejercicio Ilustrativo 5.3.2).....	98
3. Tabla 5.3.3: Resumen de Cx, Cy y Cz. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6)..	128



LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO	pp.
Tema 5.1 Modelado matemático de sistemas estructurales	
1. Figura 5.1.1: Junta Típica.....	3
2. Figura 5.1.2: Miembros rectos de sección constantes y variables.....	4
3. Figura 5.1.3: Miembros curvos de sección constantes y variables.....	4
4. Figura 5.1.4: Forma 1 de discretización. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.1)....	6
5. Figura 5.1.5: Forma 2 de discretización. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.1)....	6
6. Figura 5.1.6: Forma 3 de discretización. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.1)....	7
7. Figura 5.1.7: Numero de juntas y miembros para un sistema estructuras de tres barras.....	7
8. Figura 5.1.8: Coordenadas generalizadas para un sistema estructuras de tres barras.....	8
9. Figura 5.1.9: Sistema Discreto.....	8
10. Figura 5.1.10: Sistema Estructural de dos barras.....	9
11. Figura 5.1.11: Sistema de coordenadas Q-D.....	10
12. Figura 5.1.12: Sistema de coordenadas R-r.....	10
13. Figura 5.1.13: Elástica del sistema estructural.....	11
14. Figura 5.1.14: Sistema de coordenadas Q-D.....	11
15. Figura 5.1.15: Sistema de coordenadas independientes.....	12
16. Figura 5.1.16: Sistema de estructural de dos barras con área e inercia constante.....	12
17. Figura 5.1.17: Deformada de la estructura.....	13
18. Figura 5.1.8: Numero de juntas y miembros para un sistema estructuras de tres barras.....	13



19. Figura 5.1.19: Miembro con rigidez axial infinita.....	14
20. Figura 5.1.20: Miembro transversalmente rígido.....	15
21. Figura 5.1.21: Sistema estructura de tres barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2).....	17
22. Figura 5.1.22 Sistema de coordenadas R-r. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2).....	17
23. Figura 5.1.23: Sistema estructural con restricciones. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2).....	18
24. Figura 5.1.24: Análisis del miembro BC. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2).....	18
25. Figura 5.1.25: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2).....	19
26. Figura 5.1.26: Restricciones de los miembros. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2).....	20
27. Figura 5.1.27: Análisis de solicitaciones del miembro CD. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2).....	20
28. Figura 5.1.28: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2).....	21
29. Figura 5.1.29: Sistema estructural de dos barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3).....	26
30. Figura 5.1.30: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3).....	26
31. Figura 5.1.31: Sistema cargas sobre la estructura. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3).....	27
32. Figura 5.1.32: Carga distribuida sobre el miembro AB. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3).....	27
33. Figura 5.1.33: Cargas puntuales sobre el miembro BC. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3).....	28
34. Figura 5.1.34: Movimiento de apoyo sobre la estructura. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3).....	28

35. Figura 5.1.35: Solicitación producida por temperatura. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3).....	29
36. Figura 5.1.36: Deformada del primer desplazamiento unitario. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3).....	29
37. Figura 5.1.37: Deformada del segundo desplazamiento unitario. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3).....	30
38. Figura 5.1.38: Deformada del tercer desplazamiento unitario. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3).....	30
39. Figura 5.1.39: Deformada del cuarto desplazamiento unitario. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3).....	31
40. Figura 5.1.40: Sistema estructural de una barra.....	32
41. Figura 5.1.41: Sistema de coordenadas generalizadas Q-D.....	32
42. Figura 5.1.42: Desplazamiento U_1	33
43. Figura 5.1.43: Desplazamiento final U_1	33
44. Figura 5.1.44: Análisis de un diferencias Δx	33
45. Figura 5.1.45: Representación grafica de la elástica U_1	35
46. Figura 5.1.46: Desplazamiento U_2	35
47. Figura 5.1.47: Representación grafica de la elástica U_2	36
48. Figura 5.1.47: Desplazamiento V_1	36
49. Figura 5.1.49: Sistema estructural de dos barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.4).....	39
50. Figura 5.1.50: Numero de juntas y miembros para un sistema estructuras de dos barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.4).....	39
51. Figura 5.1.51: Sistema de coordenadas generalizadas R-r y Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.4).....	40
52. Figura 5.1.52: Análisis del miembro I. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.4).....	40
53. Figura 5.1.53: Análisis del miembro II. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.4).....	40
54. Figura 5.1.54: Sistema estructural de dos barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.5).....	41



55. Figura 5.1.55: Sistema de coordenadas generalizadas R-r. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.5).....	41
56. Figura 5.1.56: Sistema de coordenadas generalizadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.5).....	42
57. Figura 5.1.57: Análisis del miembro BC. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.5).....	42
58. Figura 5.1.58: Sistema estructural de dos barras. (Ejercicio Propuesto 5.1.1).....	43
59. Figura 5.1.59: Sistema estructural de cinco barras. (Ejercicio Propuesto 5.1.2).....	43
Tema 5.2 Nociones Elementales de Matrices para el Análisis de Estructuras	
1. Figura 5.2.1: Sistema de coordenadas locales de un miembro.....	45
2. Figura 5.2.2: Primer desplazamiento elemental.....	45
3. Figura 5.2.3: Segundo desplazamiento elemental.....	46
4. Figura 5.2.4: Tercer desplazamiento elemental.....	46
5. Figura 5.2.5: Cuarto desplazamiento elemental.....	46
6. Figura 5.2.6: Quinto desplazamiento elemental.....	46
7. Figura 5.2.7: Sexto desplazamiento elemental.....	47
8. Figura 5.2.8: Sistema primario para el primer desplazamiento elemental.....	47
9. Figura 5.2.9: Sistema cero para el primer desplazamiento elemental.....	47
10. Figura 5.2.10: Sistema uno para el primer desplazamiento elemental.....	47
11. Figura 5.2.11: Sistema dos para el primer desplazamiento elemental.....	48
12. Figura 5.2.12: Sistema tres para el primer desplazamiento elemental.....	48



13. Figura 5.2.13: Diferentes angulos de rotacion de miembros en estructuras.....	52
14. Figura 5.2.14: Angulo de rotacion de un miembro.....	53
15. Figura 5.2.15: Enumeracion de las coordenadas generalizadas para un miembro horizontal.....	53
16. Figura 5.2.16: Enumeracion de las coordenadas generalizadas dependiendo del angulo de rotacion de un miembro.....	53
17. Figura 5.2.17: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.1).....	58
18. Figura 5.2.18: Sistema de coordenadas R-r. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.1).....	58
19. Figura 5.2.19: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.1).....	59
20. Figura 5.2.20: Sistema de coordenadas q-d. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.1).....	59
21. Figura 5.2.21: Elastica del primer desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.1).....	59
22. Figura 5.2.22: Elastica del segundo desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.1)	60
23. Figura 5.2.23: Elastica del tercer desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.1)	60
24. Figura 5.2.24: Elastica del cuarto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.2.1)	61
25. Figura 5.2.25: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.2)	63
26. Figura 5.2.26: Sistema de coordenadas R-r. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.2)	63
27. Figura 5.2.27: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.2)	64



28. Figura 5.2.28: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)	68
29. Figura 5.2.29: Sistema de coordenadas R-r. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)	68
30. Figura 5.2.30: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)	68
31. Figura 5.2.31: Sistema de coordenadas q-d. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)	69
32. Figura 5.2.32: Elastica producida por el primer desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)	69
33. Figura 5.2.33: Elastica producida por el segundo desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)	70
34. Figura 5.2.34: Elastica producida por el tercer desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)	70
35. Figura 5.2.35: Elastica producida por el cuarto desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)	70
36. Figura 5.2.36: Elastica producida por el quinto desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)	70
37. Figura 5.2.37: Elastica producida por el sexto desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)	71
38. Figura 5.2.38: Elastica producida por el séptimo desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)	71
39. Figura 5.2.39: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.4)	74
40. Figura 5.2.40: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.4)	74
41. Figura 5.2.41: Sistema de coordenadas Q*-D*. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.4)	74
42. Figura 5.2.42: Elástica producida por el primer desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.4)	74



Tema 5.3 Calculo Matricial

1. Figura 5.3.1: Sistema Estructural de tres barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1) 80
2. Figura 5.3.2: Sistema de coordenadas R-r. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1) 80
3. Figura 5.3.3: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1) 80
4. Figura 5.3.4: Sistema de coordenadas q-d. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1) 80
5. Figura 5.3.5: Elástica producida por el primer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)..... 81
6. Figura 5.3.6: Elástica producida por el segundo desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1) 81
7. Figura 5.3.17: Elástica producida por el tercer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1) 81
8. Figura 5.3.8: Elástica producida por el cuarto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1) 82
9. Figura 5.3.9: Elástica producida por el quinto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1) 82
10. Figura 5.3.10: Elástica producida por el sexto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1) 82
11. Figura 5.3.11: Elástica producida por el séptimo desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1) 82
12. Figura 5.3.12: Carga distribuida sobre la barra AB. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1) 85
13. Figura 5.3.13: Carga distribuida sobre la barra BC. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1) 86
14. Figura 5.3.14: Carga puntual sobre la barra CD. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1) 86



15. Figura 5.3.15: Sistema de cargas sobre toda la estructura. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1).....	87
16. Figura 5.3.16: Trabajo virtual para el primer desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1).....	87
17. Figura 5.3.17: Trabajo virtual para el segundo desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1).....	87
18. Figura 5.3.18: Trabajo virtual para el tercer desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1).....	88
19. Figura 5.3.19: Trabajo virtual para el cuarto desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)	88
20. Figura 5.3.20: Trabajo virtual para el quinto desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)	88
21. Figura 5.3.21: Trabajo virtual para el sexto desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)	88
22. Figura 5.3.22: Trabajo virtual para el séptimo desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo v.3.1)	89
23. Figura 5.3.23: Desplazamientos finales sobre la estructura. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)	90
24. Figura 5.3.24: Sistema estructural de cinco barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.1)	91
25. Figura 5.3.25: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.2)	91
26. Figura 5.3.26: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.3)	92
27. Figura 5.3.27: Sistema estructural de cinco barras.....	93
28. Figura 5.3.28: Sistema estructural de cinco barras. (Ejercicio Ilustrativo 4.3.2)	95
29. Figura 5.3.29: Sistema de coordenadas R-r. (Ejercicio Ilustrativo 5.3.2)	96



30. Figura 5.3.30: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejercicio Ilustrativo 5.3.2) 96

31. Figura 5.3.31: Sistema de coordenadas q-d. (Ejercicio Ilustrativo 5.3.2) 97

32. Figura 5.3.32: Desplazamientos finales sobre la estructura. (Ejercicio Ilustrativo 5.3.2)..... 101

33. Figura 5.3.33: Sistema estructural de nueve barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.4)..... 102

34. Figura 5.3.34: Sistema estructural de veinticinco barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.5)..... 102

35. Figura 5.3.35: Sistema de coordenadas a condensar..... 104

36. Figura 5.3.36: Sistema estructural de tres barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.3) 106

37. Figura 5.3.37: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.3) 106

38. Figura 5.3.38: Sistema de coordenadas q-d. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.3) 107

39. Figura 5.3.39: Sistema estructural de seis barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.6) 107

40. Figura 5.3.40: Sistema estructural de cinco barras. (Ejercicio Propuesto 4.3.7) 108

41. Figura 5.3.41: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.8) 108

42. Figura 5.3.42: Sistema estructuras de tres barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)..... 109

43. Figura 5.3.43: Sistema de coordenadas R-r. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4) 110

44. Figura 5.3.44: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4) 110



45. Figura 5.3.45: Sistema de coordenadas Q^*-D^* . (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4).....	111
46. Figura 5.3.46: Sistema de coordenadas q-d. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)	111
47. Figura 5.3.47: Elastica del primer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)	111
48. Figura 5.3.48: Elastica del segundo desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)	112
49. Figura 5.3.49: Elastica del tercer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)	112
50. Figura 5.3.50: Elastica del cuarto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)	112
51. Figura 5.3.51: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)	113
52. Figura 5.3.52: Sistema de coordenadas Q^*-D^* . (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4).....	114
53. Figura 5.3.53: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.9)	114
54. Figura 5.3.54: Sistema de coordenadas Q-D y Q^*-D^* . (Ejemplo Ilustrativo 5.3.9)	115
55. Figura 5.3.55: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.10)	115
56. Figura 5.3.56: Sistema de coordenadas Q-D y Q^*-D^* . (Ejemplo Ilustrativo 5.3.10)	115
57. Figura 5.3.57: Sistema estructural de ocho barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.5)	116
58. Figura 5.3.58: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 4.3.5).....	117
59. Figura 5.3.59: Sistema de coordenadas q-d del miembro. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.5)	117



60. Figura 5.3.60: Sistema de coordenadas q-d de las columnas de la estructura. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.5) 117

61. Figura 5.3.61: Sistema de coordenadas q-d de las vigas de la estructura. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.5) 118

62. Figura 5.3.62: De a-x; elasticas del portico tridimensional. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.5) 123

63. Figura 5.3.63: Sistema estructural de seis barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6) 126

64. Figura 5.3.64: Sistema de coordenadas R-r. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6) 126

65. Figura 5.3.65: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6) 127

66. Figura 5.3.66: Sistema de coordenadas q-d. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6)..... 127

67. Figura 5.3.67: Elastica del primer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6) 128

68. Figura v.3.68: Elastica del segundo desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6) 128

69. Figura 5.3.69: Elastica del tercer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6) 129

70. Figura 5.3.70: Elastica del cuarto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6) 129

71. Figura 5.3.71: Elastica del quinto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6) 130

Tema 5.4 Dinámica de Estructuras

1. Figura 5.4.1: Grados de Libertad Dinamicos.....133

2. Figura 5.4.2: Modelos estructurales como Sistemas de un grado de libertad..... 134



3. Figura 5.4.3: Modelo matematico de Sistemas con un grado de libertad.....	134
4. Figura 5.4.4: Representacion del diagrama de cuerpo libre. (a) Modelo del sistema con un grado de libertad (b) Se muestran solo las fuerzas externas y (c) Se muestran las fuerzas externas y fuerzas de inercia.....	136
5. Figura 5.4.5: Respuesta del Sistema libre No Amortiguado	140
6. Figura 5.4.6: (a) Modelo de un oscilador simple amortiguado y (b) Diagrama de cuerpo libre del Sistema Amortiguado.....	141
7. Figura 5.4.7: Respuesta de Sistemas en vibracion libre en Amortiguacion Crítica.....	143
8. Figura 5.4.8: Respuesta de Sistemas en vibracion libre sub-amortiguadas.....	145
9. Figura 5.4.9: Representacion de la carga general como una carga impulsiva.....	147
10. Figura 5.4.10: Representacion de Cuerpo Rigido de Espesor Despreciable y Aceleraciones Impuestas	151
11. Figura 5.4.11: Diafragma como Cuerpo Infinitamente Rigido en su Plano.....	153
12. Figura 5.4.12: Deformacion en los Elementos de una Estructura de piso, con Diafragma Rigido en su propio Plano, ante un Desplazamiento en la Direccion X	154
13. Figura 5.4.13: Edificio Aporticado con Hipotesis de Diafragma Flexible y tres Grados de Libertad por Nivel.....	155
14. Figura 5.4.14: Representacion de la Estructura Modelada como Portico Plano y como Columna Simple y Masas Concentradas....	156
15. Figura 5.4.15: Modelo de Portico Plano con un Grado de Libertad por Nivel.....	157
16. Figura 5.4.16: Modelos de Masas y Resortes Equivalente a Porticos Planos.....	157



17. Figura 5.4.17: Representacion Estructural en una Direccion de Estudio para un Edificio de 2 Pisos Modelado como Portico Plano. (Ejemplo Ilustrativo 5.4.1).....	161
18. Figura 5.4.18: Modelos de Masas y Resortes Equivalentes.(Ejemplo Ilustrativo 5.4.1).....	162
19. Figura 5.4.19: Sistema estructural de nueve barras. (Ejercicio Propuesto 5.4.1).....	165
20. Figura 5.4.20: Sistema estructural de seis barras. (Ejercicio Propuesto 5.4.2).....	165



**UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL**



**DISEÑO DE UN MANUAL DE ANÁLISIS MATRICIAL DE LAS
ESTRUCTURAS AJUSTADO AL PROGRAMA DE LA
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL DE LA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO**

Autoras: Mejías Rosalba y Ramos Ahinara

Fecha: Octubre, 2011

RESUMEN

La finalidad es introducir al estudiante o profesional afín a la carrera de ingeniería civil en el campo del análisis estructural matricial. Solo se presentaran los conceptos básicos de dicho análisis. Los métodos matriciales no comprenden nuevos principios fundamentales, son los mismos utilizados para el análisis estructural convencional pero sus métodos de solución fundamentales se expresan en forma de ecuaciones matriciales, de modo que los cálculos numéricos se pueden obtener mediante una calculadora de manera sencilla y rápida. Se hace necesario un conocimiento previo de los conceptos de matrices, es por ello que se hace una breve reseña del lenguaje matricial útil para la comprensión de todo el manual. El desarrollo del trabajo se basa en dos métodos fundamentales como es el método de las fuerzas y el método de los desplazamientos en forma matricial, donde a este último se le hace un mayor enfoque debido a que se puede poner en práctica con mayor facilidad y se puede emplear tanto para estructuras indeterminadas como determinadas. Finalmente se define una porción del análisis dinámico de las estructuras matricialmente. Todos los temas se trataron desde un punto de vista teórico-práctico, para facilitar el entendimiento del lector.



INTRODUCCION

Hace algunos años atrás, los ingenieros de estructuras intentaron resolver los problemas de análisis estructural mediante la aplicación de los métodos matemáticos de algebra lineal, aunque resultara largo, complicado e impráctico solucionar los sistemas estructurales manualmente. Con el pasar de los años y los avances tecnológicos, se pudieron crear programas estructurales cuya base de diseño esta sustentada en el cálculo matricial por ser este el más fácil para programar en un computador además de arrojar mayor exactitud en los cálculos y resultados; asimismo todas las estructuras linealmente elásticas, isostáticas o hiperestáticas están regidas por los sistemas de ecuaciones lineales, reflejando que a través del cálculo matricial se pueden dar solución a una gran variedad de sistemas estructurales. Es por ello que mediante el uso de calculadoras y computadoras de gran capacidad en la actualidad, el análisis matricial está desplazando cada día mas los métodos clásicos de análisis, debido a lo impráctico que resulta el trabajo manual frente a la rapidez que proporciona la tecnología. Sin embargo, hoy día es importante el conocimiento de las bases teóricas en que se fundamentan los métodos y los sistemas automatizados de cálculo, porque si bien la tecnología permite diseñar y analizar con rapidez estructuras, la tarea más crítica es darle una adecuada interpretación a los resultados arrojados por el computador.

Por ende el propósito de este manual es servir como apoyo a los estudiantes y personas afines a la ingeniería civil en los cursos de análisis estructural matricial. De tal manera que sirva como soporte para desarrollar el entendimiento básico fundamental del comportamiento de los sistemas estructurales. La solución de dichos sistemas tratados en el



manual, se trabajarán mediante un enfoque que cubra las necesidades actuales y modernas de los métodos matriciales.

En consecuencia el manual se ha estructurado de manera tal, que abarque todos los principios del análisis estructural con enfoque matricial, como se refiere a continuación:

Para el análisis de cualquier sistema físico es necesario primero formular un modelado matemático, por ello en el Tema 1 se presentan los fundamentos en que se basa el análisis estructural, denominado modelado matemático de sistemas estructurales. El tema 2, expone las nociones elementales de las matrices comúnmente empleadas en el análisis matricial de las estructuras, con ellas se puede facilitar el entendimiento de los conceptos a tratar en los siguientes temas, y se busca pulir el lenguaje y conocimiento de matrices necesarios en el enfoque matricial de las estructuras. En el tema 3 y 4 se presentan los métodos que en las cátedras estructurales se enseñan con mayor profundidad, conocidos como método de las flexibilidades (método de las fuerzas) y método de las rigideces (método de los desplazamientos), donde siempre llevarán al planteamiento de sistemas de ecuaciones cuyas incógnitas serán las acciones o los desplazamientos. Finalmente en el tema 5 se presenta un abrebocas a lo que es la dinámica estructural, donde se tocan temas elementales para afianzar los conocimientos básicos del amplio mundo del análisis dinámico de las estructuras.

En todo el manual se describen con suficiente detalle los fundamentos en que se basan los métodos de análisis que se presentan, los cuales se instruyen con ejemplos ilustrativos, figuras y tablas. En el diseño de los ejemplos se vigiló que fueran de una complejidad tal, que permita al lector verificar a mano o con una calculadora científica los cálculos presentados, sin la necesidad de utilizar software especializado, permitiendo a la mayoría de los alumnos asimilar tanto el concepto como el procedimiento, en beneficio de su formación integral.

5.1 MODELADO MATEMATICO DE SISTEMAS ESTRUCTURALES

Sistema estructural

Un sistema estructural es aquel que está formado por juntas y miembros, donde los miembros hallan una relación entre si cuando se conectan a través de las juntas; estos pueden estar conectados a varias juntas de la estructura mas no a otro miembro. Las juntas se consideran cuerpos rígidos de dimensiones muy pequeñas pero que son capaces de trasladarse en el espacio y rotar, mas no pueden deformarse. Por lo tanto se consideran las juntas infinitamente pequeñas, aunque en la realidad escapan de ser así, ya que es un elemento físico que posee dimensiones, como se muestra a continuación:

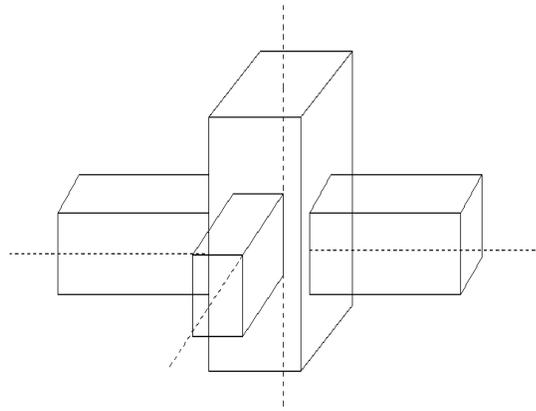


Figura 5.1.1: Junta típica
Fuente: Roberto Aguiar Falconí (2004)

Un miembro es un componente elemental de una estructura, limitado por dos o mas juntas, generalmente deformables, donde las propiedades elásticas de la estructura dependen de las propiedades de estos, el estudio que generalmente se le da, son las cargas externas aplicadas directamente a ellos, como:

- Cambios de temperatura
- Asentamientos de apoyos
- Errores de fabricación o montaje, entre otros.

El modelado matemático de los miembros es el que se muestra a continuación, donde generalmente viene representado por su eje o directriz, y pueden ser miembros rectos o curvos con dos juntas terminales:

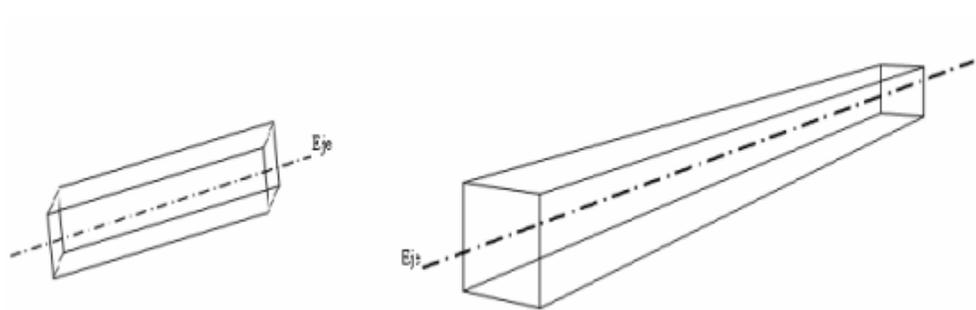


Figura 5.1.2: Miembros rectos de sección constantes y variables
Fuente: Roberto Aguiar Falconí (2004)

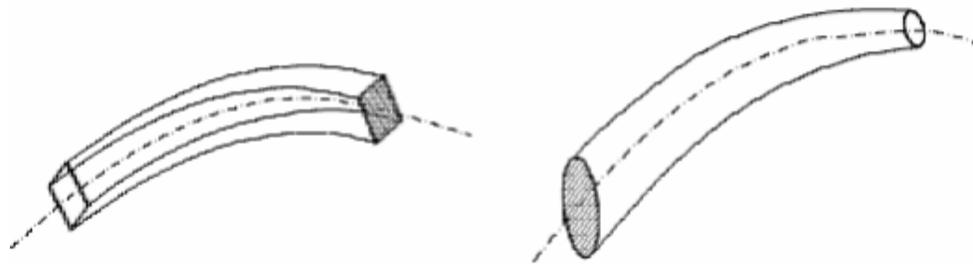


Figura 5.1.3: Miembros curvos de sección constantes y variables
Fuente: Roberto Aguiar Falconí (2004)

Los miembros quedan definidos al seleccionar las juntas, lo que viene a representar luego un diagrama lineal en el que todos los componentes del sistema se identifican con números, esto es conveniente hacerlo siguiendo una serie de criterios para simplificar su numeración y orden, para que de esta manera se solucione con mayor eficacia el sistema.

Generalmente, se considera que un sistema estructural está constituido por dos subsistemas, uno formado por las juntas de la estructura, y el otro por los miembros. Al separarse el primero viene a ser parte de un sistema discreto, que corresponde a un sistema cuya configuración geométrica puede definirse a través de un número finito de coordenadas generalizadas, es decir que posee un número finito de grados de libertad. Mientras que los miembros, corresponde a un sistema continuo, cuya configuración geométrica no puede definirse por las coordenadas generalizadas, y las características que la define es que son sistemas deformables en los cuales se hace necesario el uso de funciones de la posición y del tiempo.

Por ello, la solución completa del problema se lleva a cabo cuando se obtienen los desplazamientos de las juntas de la estructura, como la traslación y la rotación. Y los desplazamientos de todas las secciones



trasversales de los miembros, es decir, sus elásticas de desplazamientos, además de las fuerzas que solicitan cada una de las secciones transversales de los elementos.

Es por esta razón que los métodos de análisis estructurales y específicamente los métodos matriciales consisten esencialmente en la aplicación de tres relaciones fundamentales.

1. La relación que existen como consecuencia de la ley de Hooke, entre las fuerzas que actúan en los miembros y los desplazamientos elásticos relativos en sus extremos.
2. La relación entre los desplazamientos en los extremos de los miembros y el movimiento de las propias juntas. Esta relación viene gobernada por la necesidad de hacer compatibles los dos conjuntos de desplazamientos, de manera que se obtenga un ajuste geométrico en cada junta.
3. La relación que existe entre las cargas externas y las fuerzas que actúan en los miembros, necesaria para mantener el equilibrio de las juntas.

Discretización de una estructura

Para la discretización de una estructura, generalmente se subdivide el sistema estructural en dos subsistemas, uno constituido por las juntas de la estructura, que representa un sistema discreto, y otro constituido por los elementos o miembros, que representa un sistema continuo. Es importante estudiar el comportamiento de los elementos o miembros, de manera independiente, es por ello que se debe establecer un sistema de coordenadas locales (q-d), conocido como *sistema de coordenadas de un elemento o de un conjunto de elementos*, este sistema posee coordenadas geométricas q_i , que representan las deformaciones generalizadas, además de representar las coordenadas estáticas d_i , que simbolizan las fuerzas generalizadas. El sistema debe definirse a conveniencia, pero de manera sencilla, práctica y directa para facilitar el estudio; su obtención dependerá de las restricciones que posea el sistema que impedirán el desplazamiento como cuerpo rígido del elemento. Finalmente, el sistema de coordenadas del elemento q-d, nos dará una proporción a las deformaciones del miembro, ya que los desplazamientos son descartados al asumir el sistema como un cuerpo rígido.

Luego se debe establecer el sistema de coordenadas generalizadas Q-D conocido también como *sistema de coordenadas globales*, para las juntas de la estructura, dicho sistema posee tantas coordenadas geométricas como grados de libertad posea las juntas.

Por lo tanto, el objetivo de discretizar las estructuras, es pasar el sistema de coordenadas generalizadas Q-D, que representa el desplazamiento de las juntas y las fuerzas externas que actúan sobre ellas a un sistema que sirva para medir los desplazamientos de cada elemento, así como las fuerzas internas. Es por ello que al lograr la discretización el sistema Q-D no solo será el sistema de coordenada de las juntas, sino mucho más importante el sistema de coordenadas generalizada de la estructura.

Ejemplo Ilustrativo 5.1.1

Se tiene el siguiente sistema estructural, se pide discretizarla.

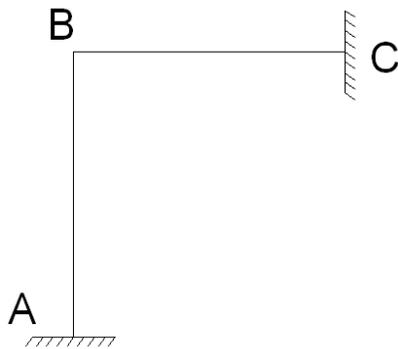


Figura 5.1.4: Sistema estructural de dos barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

1. Se subdivide el sistema, en continuo y discreto:

- Forma 1 de discretización:

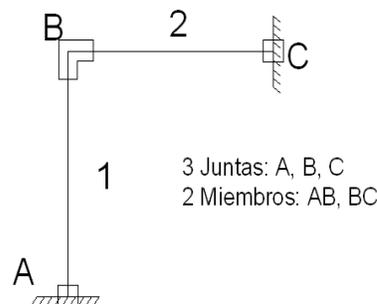


Figura 5.1.5: Forma 1 de discretización. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

- Forma 2 de discretización:

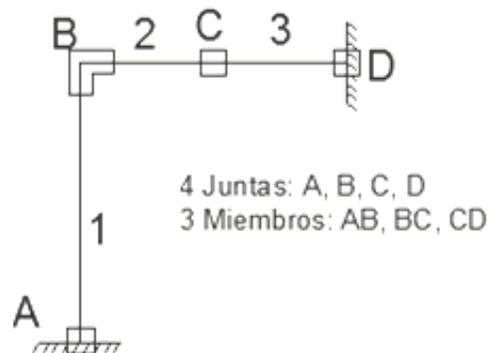


Figura 5.1.6: Forma 2 de discretización. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

- Forma 3 de discretización:

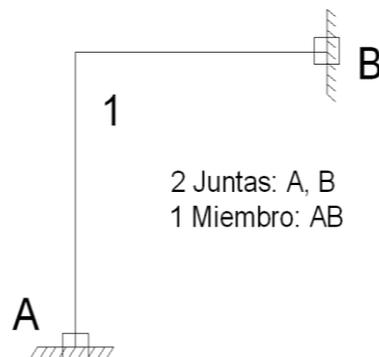


Figura 5.1.7: Forma 3 de discretización. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Como se observa, dependiendo de cómo se fijan las juntas vendrán definidos los miembros, si se toma en cuenta que para una misma estructura puede variar de un caso a otro.

En general:

- En el plano, las coordenadas generalizadas son tres (3) por cada junta, dos (2) desplazamientos y una (1) rotación.
- En el espacio cada junta estará descrita por seis (6) coordenadas generalizadas, tres (3) desplazamientos y tres (3) rotaciones.

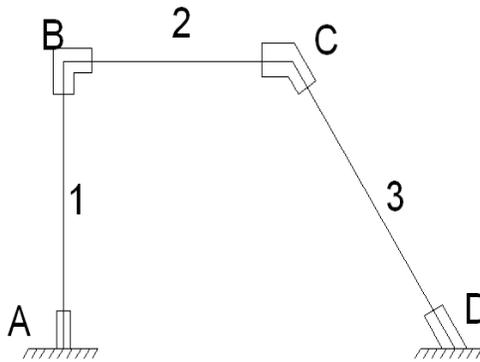


Figura 5.1.8: Numero de juntas y miembros para un sistema estructuras de tres barras
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

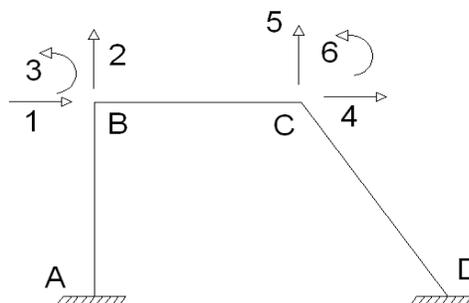


Figura 5.1.9: Coordenadas generalizadas para un sistema estructuras de tres barras
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Coordenadas Generalizadas

Lo que bien conocemos como grados de libertad, lo definiremos para el análisis matricial con el término de coordenadas generalizadas, las cuales hay que emplear para definir la configuración de la estructura o bien, al número de variaciones de las coordenadas generalizadas que define el desplazamiento más general del sistema.

Las coordenadas generalizadas son un conjunto de parámetros, que son funciones del tiempo en dinámica y toman valores constantes en el caso de estática, los cuales tienen una interpretación geométrica tal como longitud, área, volumen, ángulo, coordenadas cartesianas, coordenadas cilíndricas, entre otros. En otras palabras, se denomina coordenada a los parámetros necesarios para definir la configuración de un sistema mecánico, usando sola la geometría. Ellas se consideran independientes si no existe relación entre ellas, y dependientes si por el contrario existe relación. Cuando son independientes las coordenadas se les denomina *coordenadas generalizadas*.

En la aplicación del método matricial se utiliza un sistema de coordenadas generalizadas independiente y completo, denominado *matriz de desplazamiento* [D], que se obtiene a partir de un sistema de coordenadas [R], dependiente y completo.

Sin embargo existen condiciones que relacionan las coordenadas dependientes, y estas pueden ser obtenidas por medio de vínculos internos o externos, estas se conocen como *condiciones de vínculos*, los cuales se clasifican de acuerdo a:

1.- Numero de coordenadas requeridas para definir al sistema

a) Sistemas Discretos; son aquellos cuya configuración geométrica puede definirse a través de un número finito de coordenadas generalizadas. Estos sistemas están constituidos por subsistemas indeformables, es decir, por partículas y cuerpos rígidos.

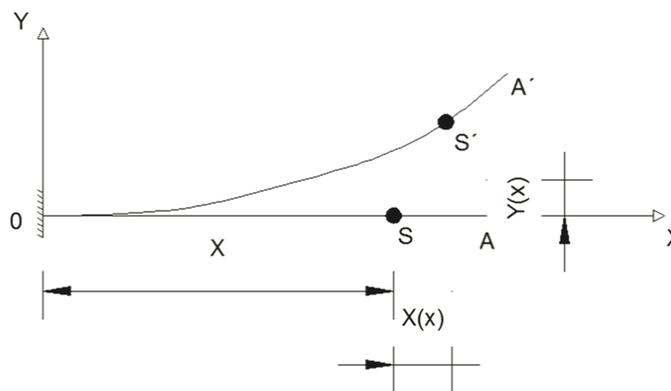


Figura 5.1.10: Sistema Discreto
Fuente: Lamar & Fortul (2007)

b) Sistemas Continuos; son aquellos cuya configuración geométrica no puede definirse por las coordenadas generalizadas, y la característica que la define es que son sistemas deformables en los cuales se hace necesario el uso de funciones de la posición y del tiempo.

2.- Relación entre las coordenadas generalizadas, es decir si son coordenadas dependientes o independientes.

3.- Numero de coordenadas que posea el sistema, es decir si el sistema es completo o incompleto.

Para determinar si el sistema es completo o incompleto, consideremos un sistema mecánico discreto, y un sistema de coordenadas asociado de N

coordenadas, las cuales designaremos por r_i , ($i= 1, 2, \dots, N$), si el conocimiento de los valores de las coordenadas r_i , ($i= 1, 2, \dots, N$), permite conocer haciendo uso de la geometría, la posición de cada uno de los puntos del sistema mecánico, se concluye que el sistema de coordenadas es *completo*. Y si esto se cumple, se puede definir la configuración total del sistema.

A continuación se presenta un sistema estructural discreto, que está representado por dos barras rígidas unidas a los vínculos por resortes deformables, en el que se busca definir si el sistema es completo o incompleto.

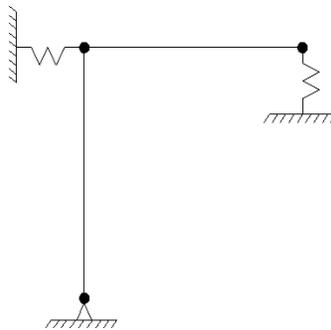


Figura 5.1.11: Sistema Estructural de dos barras
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Se define el Sistema de coordenadas Q-D.

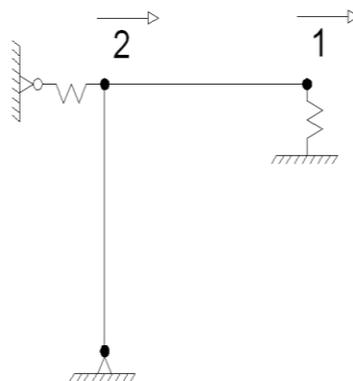


Figura 5.1.12: Sistema de coordenadas Q-D
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Como se mostró en la figura anterior, el sistema de coordenadas es incompleto, ya que no se conoce cada uno de los puntos del sistema mecánico, por lo tanto se debe definir un sistema de coordenadas [R-r] y determinar los posibles movimientos del sistema, y de manera organizada establecer las condiciones de vínculos.

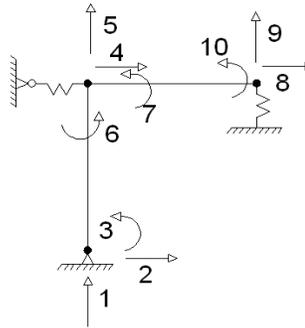


Figura 5.1.13: Sistema de coordenadas R-r
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Se establecen las condiciones de vínculo.

Vínculos Externos. Por condiciones del vínculo externo donde se encuentran las solicitaciones 1 y 2, tenemos que $R_1 = 0$. $R_2 = 0$

Vínculos Internos. Para apreciar mejor los valores de las solicitaciones 3, 6, 4, 7, 8, 9 y 10, reflejamos la elástica del sistema.

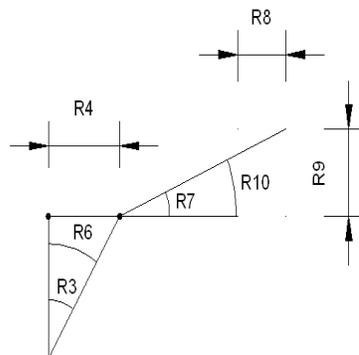


Figura 5.1.14: Elástica del sistema estructural
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Luego de analizar la elástica, obtenemos:

$$R_5 - R_1 = 0$$

$$R_8 - R_4 = 0$$

$$R_3 = -R_4/H$$

$$R_7 = R_9/L$$

$$R_6 = R_3$$

$$R_7 = R_{10}$$

En total, entre vínculos internos y externos se tienen ocho (8) condiciones de vínculos, para un total de diez (10) coordenadas [R]. De las cuales dos (2) coordenadas son independientes [D].

Sistema de coordenadas Q-D

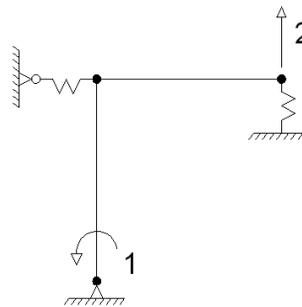


Figura 5.1.15: Sistema de coordenadas Q-D
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Sistema que muestra las coordenadas independientes [D]

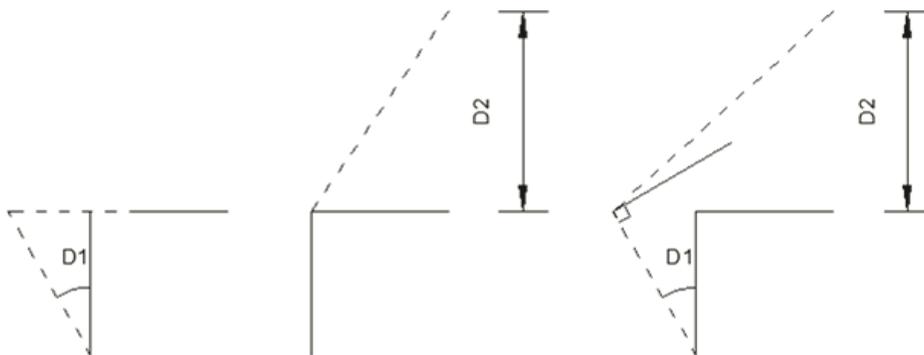


Figura 5.1.16: Sistema de coordenadas independientes
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Así, a partir del sistema generalizado, se obtiene la deformada de la estructura, con la cual se puede escribir [R] en función de [D].

$$\begin{aligned}R_1 &= 0 \\R_3 &= D_1 \\R_4 &= -D_1 H \\R_5 &= 0 \\R_6 &= D_1 \\R_7 &= D_2 / H \\R_8 &= R_4 = D_1 H \\R_9 &= D_2 \\R_{10} &= D_2 / H\end{aligned}$$

A continuación, se pide definir los sistemas de coordenadas [R] y [D] para el sistema estructural mostrado:

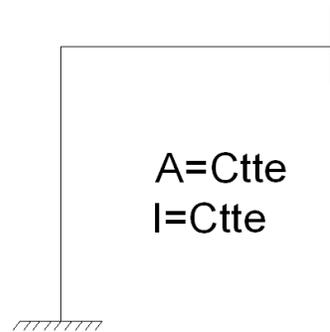


Figura 5.1.17: Sistema de estructural de dos barras con área e inercia constante
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Dibujando una posible deformada de la estructura se determinan los posibles desplazamientos y basados en ellos se escogen los sistemas de coordenadas que configuran el sistema.

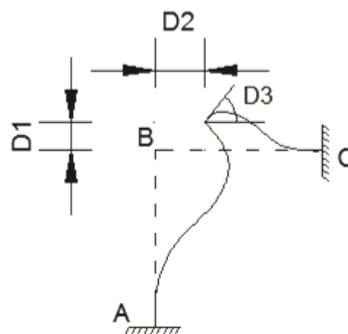


Figura 5.1.18: Deformada de la estructura
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Pero la estimación de dichos desplazamientos es algo complejo, por ser un sistema continuo. Por ello para trabajar el sistema, se debe discretizarse como se definió anteriormente.

Miembros Rígidos

Para la solución de los sistemas estructurales muchas veces se introduce el concepto de miembro rígido por conveniencia o para simplificar la solución. Es por ello que existen dos tipos de rigideces:

- Rigidez axial infinita (A^∞)
- Rigidez a flexión infinita (I^∞)

En el caso de rigidez axial infinita (A^∞), se asume que el elemento, ni se alarga ni se acorta por efecto de las cargas aplicadas, es decir, se supone que las deformaciones según el eje del elemento no existen. En el segundo caso, de rigidez a flexión infinita (I^∞), se supone que el cuerpo gira como un todo, es decir, sus extremos rotarán lo mismo.

Gracias a lo antes mencionado, ahora en un sistema estructural se pueden presentar las siguientes situaciones:

- Miembros con rigidez axial infinita
- Miembros con rigidez a flexión infinita
- Miembros rígidos tanto axialmente como a flexión

Estas tres consideraciones introducen ecuaciones de restricción a la estructura, lo cual hace que los grados de libertad disminuyan.

Caso a. Miembros con rigidez axial infinita

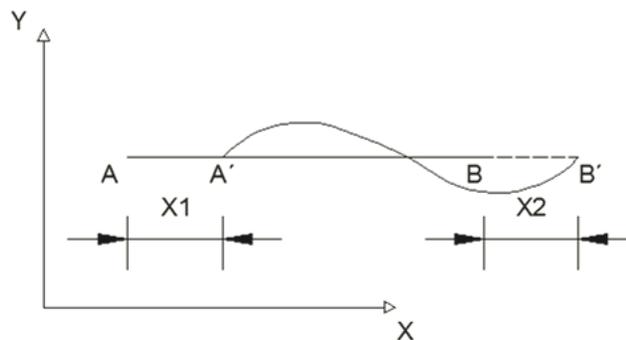


Figura 5.1.19: Miembro con rigidez axial infinita
Fuente: Francisco Ibáñez (1991)

El desplazamiento horizontal de los extremos debe ser igual, por lo tanto:

$$X_1 = X_2$$
$$\Delta L = 0$$

Mientras que el valor del desplazamiento horizontal en cualquier punto interno, vendrá dado por:

$$X(x) = X_1$$

Caso b. Miembros transversalmente rígido

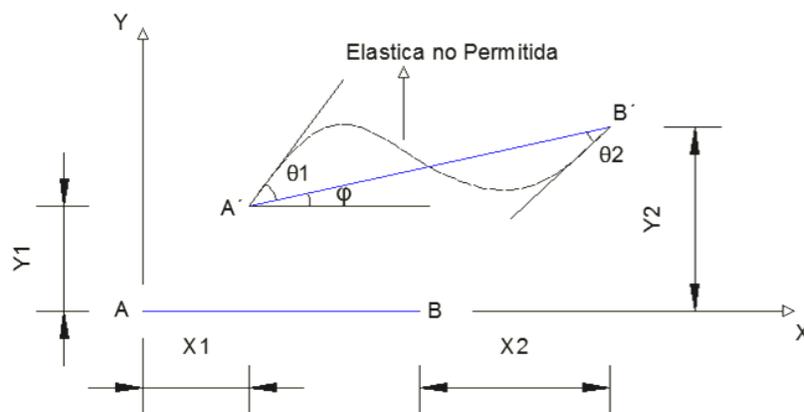


Figura 5.1.20: Miembro transversalmente rígido
Fuente: Francisco Ibáñez (1991)

Esto suele ocurrir cuando la inercia tiende a infinito ($I \infty$), en este caso las rotaciones extremas tienen que ser iguales, es decir que el cuerpo rota como cuerpo rígido.

$$\phi = (Y_2 - Y_1) / L$$

Lo que significa que posee dos restricciones:

$$[\theta_1 - (Y_2 - Y_1) / L] = 0 \text{ y } [\theta_2 - (Y_2 - Y_1) / L] = 0$$

Por lo tanto la elástica vendrá dada por la relación lineal que se muestra a continuación:

$$Y(x) = Y_1 + (Y_2 - Y_1) * [x / L]$$

Caso c. Miembro rígido, axial y transversalmente

Este caso combina los definidos anteriormente, por lo tanto posee tres restricciones:

$$X(x) = X_1$$
$$Y(x) = Y_1 + (Y_2 - Y_1) * [x/L]$$

Restricciones del sistema

Todo sistema estructural posee dos restricciones fundamentales.

1. Primera Restricción, coordenadas del vector D.

“El número de grados de libertad de una estructura es el numero de coordenadas generalizadas {D} que es preciso determinar para definir la posición de las juntas”. En otras palabras es necesario definir el sistema de coordenadas generalizadas Q-D de la estructura para poder determinar la posición de sus juntas.

Se denomina coordenadas del vector {D}, a aquellos parámetros necesarios para definir el sistema, si existe relación entre ellos el sistema es dependiente y a las condiciones que las relacionan se les denomina ecuaciones de restricción. Por el contrario si no existe relación entre ellas el sistema es independiente.

- Ecuaciones de restricción

Son aquellas condiciones que vinculan o ligan parámetros (coordenadas) que configuran a un sistema, haciéndolas dependientes entre sí.

- a) Elemento longitudinalmente Rígido ($A \rightarrow \infty$)
- b) Elemento transversalmente rígido ($I \rightarrow \infty$)
- c) Elemento longitudinal y transversalmente rígido ($A \rightarrow \infty$, $I \rightarrow \infty$)

Ejemplo Ilustrativo 5.1.2

Dada la estructura que se muestra a continuación, se pide discretizarla y hallar las relaciones entre las coordenadas [R] y [D], según las siguientes restricciones:

- a.) Suponer que el miembro BC es longitudinalmente rígido

- b.) Suponer el caso donde el miembro BC es longitudinalmente rígido y además se debe considerar que el miembro CD es transversalmente rígido.

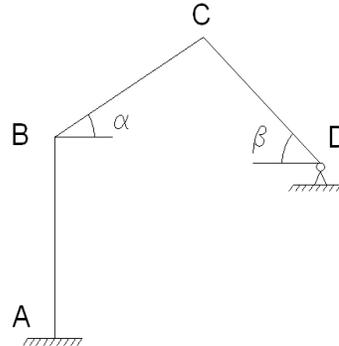


Figura 5.1.21: Sistema estructural de tres barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

1. Definir sistema de coordenadas R-r

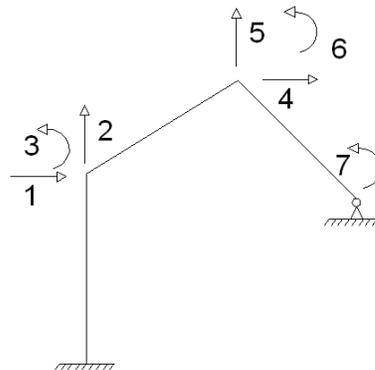


Figura 5.1.22 Sistema de coordenadas R-r. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Es importante considerar que si los miembros son flexibles el sistema de coordenadas $[r]$ sería igual a $[D]$, ya que todas las coordenadas serían independientes.

2. Caso a: Miembro longitudinalmente rígido.

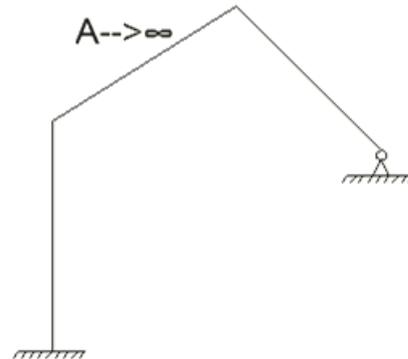


Figura 5.1.23: Sistema estructural con restricciones. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Como el miembro posee $A \rightarrow \infty$, se introduce una sola restricción:

$$X_1 = X_2$$

Luego tenemos:

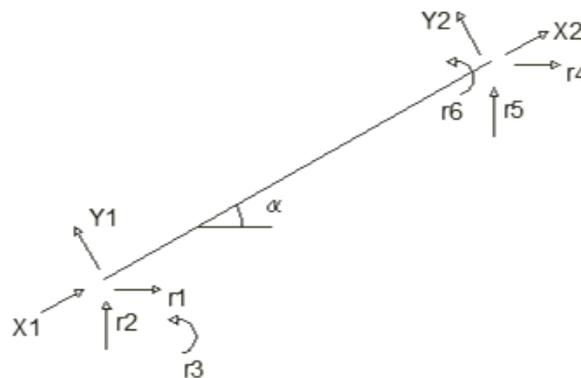


Figura 5.1.24: Análisis del miembro BC. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$X_{(1)} = r_1 \cos(\alpha) + r_2 \operatorname{sen}(\alpha)$$
$$X_{(2)} = r_4 \cos(\alpha) + r_5 \operatorname{sen}(\alpha)$$

De la restricción se tiene:

$$r_4 \cos(\alpha) + r_5 \operatorname{sen}(\alpha) - r_1 \cos(\alpha) + r_2 \operatorname{sen}(\alpha) = 0$$

Con esta restricción las siete coordenadas [r] ya no son independientes, sino dependientes. Hay que elegir de forma conveniente las coordenadas generalizadas [D] las cuales son seis (6).

Se escogen primero las tres coordenadas que no intervienen en la ecuación de restricción (r_3 , r_6 , r_7) y de las cuatro coordenadas restantes se eligen tres para completar el sistema de coordenadas generalizadas. Es por ello que se definen para el sistema de coordenadas generalizadas Q-D, los tres giros que corresponde a r_3 , r_6 , r_7 , para luego completar el sistema con las coordenadas que se deseen (en el ejemplo ilustrativo se busco mantener la misma numeración que poseen r_5 y r_4 en el sistema R-r, por ello se enumera primero la junta C, antes que la B).

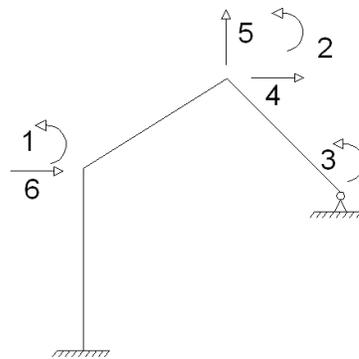


Figura 5.1.25: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Tenemos:

$$D_1 = r_3, D_2 = r_6, D_3 = r_7, D_4 = r_4, D_5 = r_5, D_6 = r_1.$$

En la ecuación de restricción despejando r_2 . (Coordenada no elegida)

$$r_2 = \frac{1}{\sin \alpha} (r_4 \cos \alpha + r_5 \sin \alpha - r_1 \cos \alpha)$$

$$r_2 = \frac{1}{\sin \alpha} (D_4 \cos \alpha + D_5 \sin \alpha - D_6 \cos \alpha)$$

3. Caso b: Miembro longitudinalmente rígido (BC) y miembro transversalmente rígido (CD).

- Miembro BC, que posee $A \rightarrow \infty$.

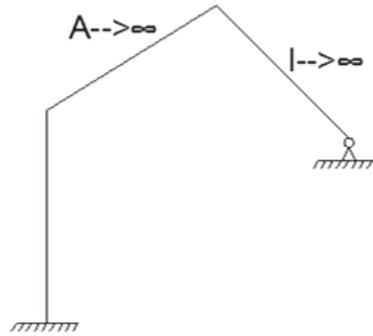


Figura 5.1.26: Restricciones de los miembros. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Miembro Longitudinalmente rígido $X_1 = X_2$

Miembro Transversalmente rígido

$$\varphi_1 - \frac{Y_2 - Y_1}{L} = 0$$

$$\varphi_2 - \frac{Y_2 - Y_1}{L} = 0$$

Del caso anterior, se tenía:

$$r_4 \cos(\alpha) + r_5 \sin(\alpha) - r_1 \cos(\alpha) + r_2 \sin(\alpha) = 0$$

- Miembro CD, que posee $I \rightarrow \infty$.

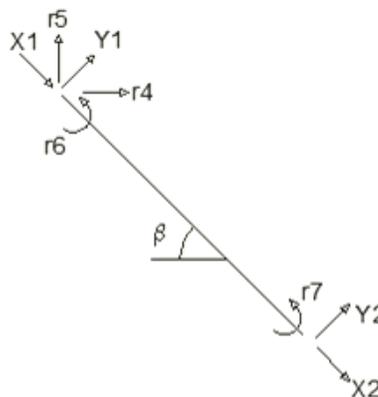


Figura 5.1.27: Análisis de solicitaciones del miembro CD. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= r_4 \cos(\alpha) - r_5 \sin(\alpha) \\ Y_{(2)} &= r_5 \cos(\beta) + r_4 \sin(\beta) \\ \Phi_{(1)} &= r_6 \\ X_{(2)} &= 0 \\ Y_{(2)} &= 0 \\ \Phi_{(2)} &= r_7 \end{aligned}$$

A partir de las restricciones:

$$\begin{aligned} r_6 - \frac{0 - (r_4 \sin \beta + r_5 \cos \beta)}{L} &= 0 \\ r_7 - \frac{0 - (r_4 \sin \beta + r_5 \cos \beta)}{L} &= 0 \end{aligned}$$

Se aplica el criterio anterior para la numeración del sistema de coordenadas; considerando que r_3 no está relacionada, existen siete (7) coordenadas $[r]$, y tres (3) ecuaciones de restricción. Además existen cuatro (4) coordenadas generalizadas.

$$D_1 = r_3, D_2 = r_4, D_3 = r_5, D_4 = r_1$$

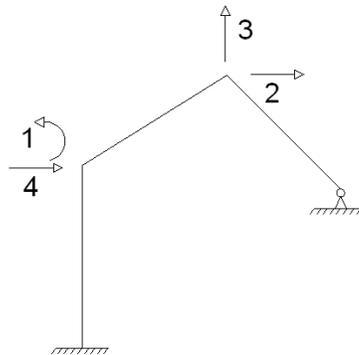


Figura 5.1.28: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Además:

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{1}{\sin \alpha} (D_2 \cos \alpha + D_3 \sin \alpha + D_4 \cos \alpha) \\ r_6 &= \frac{(-D_2 \sin \beta - D_3 \cos \beta)}{L} \end{aligned}$$

$$r_7 = \frac{(-D_2 \sin \beta - D_3 \cos \beta)}{L}$$

Dichos desplazamientos generalizados se pueden expresar en forma vectorial como:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad [D]^t = [D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4]$$

Denominándose *vector de coordenadas generalizadas*.

$$[r] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad [r]^t = [r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4 \quad r_5 \quad r_6 \quad r_7]$$

Denominándose *vector de coordenadas NO generalizadas*.

2. Segunda Restricción, vector cargas Q.

Anteriormente se había definido que para definir el vector carga {Q} las cargas se consideran únicamente aplicadas en las juntas y en la dirección del vector {D}. Por esto, surge la siguiente interrogante: ¿Qué se hace con las cargas actuantes en los miembros?. Pues, una forma es suponer una junta donde existan las cargas o momentos aplicados en los miembros o si es el caso de una carga distribuida es dividirla en cargas concentradas. Todos estos artificios se realizan con el fin de transformar las cargas a cargas aplicadas en las coordenadas.

Problema primario y complementario

Generalmente todo sistema estructural posee una serie de casos de carga de cualquier tipo en los miembros, como cambios de temperatura, asentamientos en los apoyos, cargas puntuales y cargas distribuidas, que de cierto modo para resolver la estructura es conveniente separarlo en dos problemas; uno primario y otro complementario.

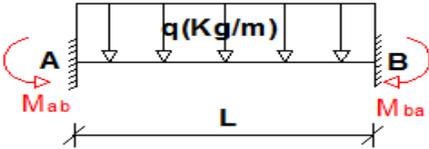
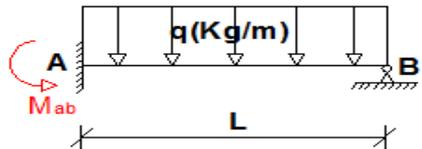
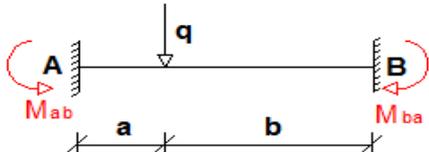
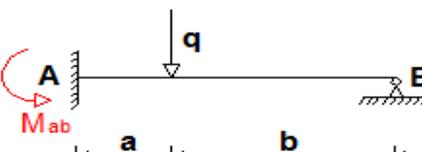
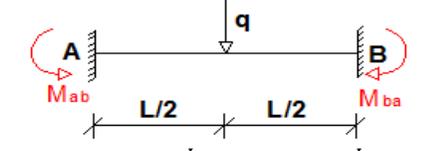
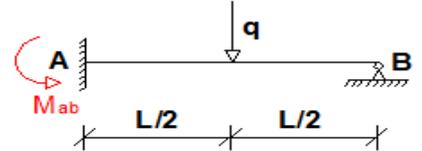
Inicialmente se debe considerar la estructura sin cargas, para luego dividir la estructura en miembros y juntas y poder establecer así un Q-D adecuado. Finalmente se separan los problemas a estudiar, como se muestra a continuación:

Problema Primario, consiste en tomar la estructura con todas las solicitaciones actuantes en los miembros (Asentamientos de apoyo, cambios de temperatura etc.). Para la solución de este problema es recomendable aplicar el principio de superposición, ya que se separa todas las cargas actuantes en la estructura y se estudia por partes, para obtener las solicitaciones que se producen en los miembros. Dependerá de quien calcula, que cargas actuantes estudiar inicialmente, sin embargo se recomienda el siguiente procedimiento para que se realice una solución más sencilla y ordenada del problema:

- Cargas distribuidas o Cargas puntuales en los miembros.

Se analiza el elemento donde este aplicada la carga distribuida o la carga puntual, discriminando la forma de la carga distribuida o el punto donde este aplicada la carga puntual y mediante la tabla de ecuaciones de momento para cargas actuantes en miembros que se muestra a continuación, se obtienen las solicitaciones generadas en el mismo.

Tabla 5.1.1: Ecuaciones de momento para cargas actuantes en miembro
Fuente: Fernando Villalobos

Miembro Doblemente Empotrado	Miembro Empotrado-Articulado
$M_{ij} = M_{ij}^o + EK_{ij}(4\theta_i + 2\theta_j - 6\phi_{ij})$	$M_{ij}' = M_{ij}^o + 3EK_{ij}(\theta_i - \phi_{ij})$
$M_{ij} = M_{ij}^o + EK_{ij}(4\theta_i + 2\theta_j - 6\phi_{ij})$	M_{ij}^o
 $M_{AB} = \frac{qL^2}{12} \quad M_{BA} = -\frac{qL^2}{12}$	 $M_{AB} = \frac{qL^2}{8}$
 $M_{AB} = \frac{q a b^2}{L^2} \quad M_{BA} = -\frac{q b a^2}{L^2}$	
 $M_{AB} = \frac{qL}{8} \quad M_{BA} = -\frac{qL}{8}$	 $M_{AB} = \frac{3qL}{16}$

Miembro Doblemente Empotrado	Miembro Empotrado-Articulado
$M_{AB} = \frac{M b}{L} \left(2 - \frac{3 b}{L} \right) \quad M_{BA} = \frac{M a}{L} \left(2 - \frac{3 a}{L} \right)$	
$M_{AB} = \frac{M}{4} \quad M_{BA} = \frac{M}{4}$	$M_{AB} = \frac{M}{8}$
$M_{AB} = \frac{q L^2}{30} \quad M_{BA} = -\frac{q L^2}{20}$	$M_{AB} = \frac{q L^2}{15}$
$M_{AB} = \frac{5 q L^2}{192} \quad M_{BA} = -\frac{11 q L^2}{192}$	$M_{BA} = \frac{7 q L^2}{128}$

- Movimiento de apoyo y cambios en los miembros por temperatura.

Movimientos de apoyo; consiste en un desplazamiento que tiene permitido alguna vinculación externa de la estructura ya sea en x o y. La manera de conseguir la sollicitación que produce este movimiento es mediante la anulación de los componentes del vector D del sistema, colocando una vinculación ficticia en los puntos donde la estructura tiene permitido moverse, en otras palabras se está impidiendo los desplazamientos del sistema para obtener un sistema equivalente, donde al aplicarse el movimiento que se esté generando se pueda determinar como se deforma la estructura a través de su elástica y así obtener los momentos que se producen en ese extremo gracias al movimiento.

Cambios en los miembros por temperatura; de manera similar como ocurre en el estudio de los movimientos de apoyo, si la estructura contiene cambios por efecto de la temperatura, se permite a través del movimiento que el elemento se alargue, encoja o flexione, para luego mediante la

anulación de los componentes del vector D del sistema, colocando vinculaciones ficticias en los puntos donde la estructura tiene permitido moverse, y luego de aplicarse el cambio que se esté generando se pueda determinar cómo se deforma la estructura a través de su elástica y así obtener los momentos que se producen en ese miembro.

Las ecuaciones requeridas en para estos dos casos son las siguientes:

Tabla 5.1.2: Ecuaciones de momento producidos por temperatura y movimientos de apoyo
Fuente: Fernando Villalobos

Temperatura Transversal. Efecto $\Delta(\Delta t)$	Temperatura Transversal. Efecto $\Delta(\Delta t)$
$M_{AB} = \frac{\alpha t \Delta(\Delta t)}{h} E I_{AB}$	$M_{AB} = 1,5 \frac{\alpha t \Delta(\Delta t)}{h} E I_{AB}$
Temperatura axial (Δt_0) y movimiento de apoyo	Temperatura axial (Δt_0) y movimiento de apoyo
$M_{AB} = E K_{AB} (4\theta_A + 2\theta_B - 6\varphi_{AB})$	$M_{AB} = 3E K_{AB} (\theta_A - \varphi_{AB})$
$K_{ij} = \frac{I_{ij}}{L_{ij}}$	$K_{ij} = \frac{I_{ij}}{L_{ij}}$

Problema Complementario: es la etapa de imposición de desplazamientos. Consiste en tener la estructura original sin las cargas aplicadas en la estructura, pero considerando las restricciones originadas por el sistema de coordenadas Q-D, y a través de las elásticas, si se evalúa cada restricción se podrá determinar los desplazamientos originados.

Ejemplo Ilustrativo 5.1.3

Se tiene el sistema estructural mostrado a continuación, al cual se le desea determinar el vector fuerza primaria total, y el vector desplazamiento de cada restricción del sistema de coordenadas Q-D, mediante el problema complementario. El sistema posee un movimiento de apoyo Y_A de 0,09m. Considere $E = 2,1 \times 10^6$ kg/m², $I_0 = 3.125 \times 10^{-3}$, $\alpha t = 1 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$.

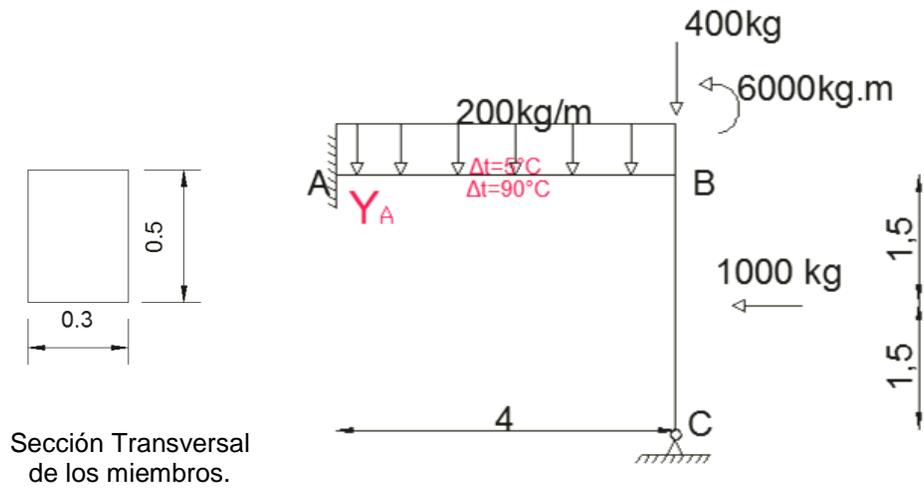


Figura 5.1.29: Sistema estructural de dos barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

1. Sistema de Coordenadas Q-D

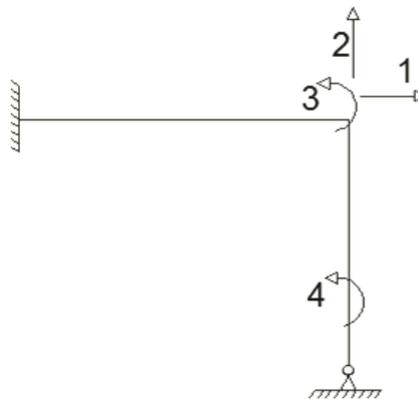


Figura 5.1.30: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[D] = \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

2. Problema Primario Del Sistema

Se presenta la estructura con todas las cargas que actúan sobre ella y las restricciones originadas por el sistema de coordenadas Q-D. (Estas restricciones están reflejadas mediante vínculos ficticios).

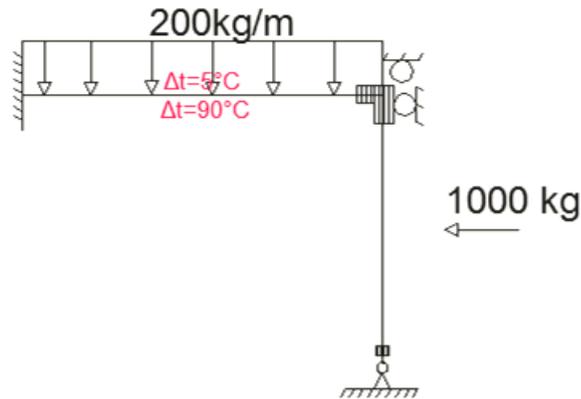


Figura 5.1.31: Sistema cargas sobre la estructura. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Solución del Problema Primario

- Cargas distribuidas en el miembro

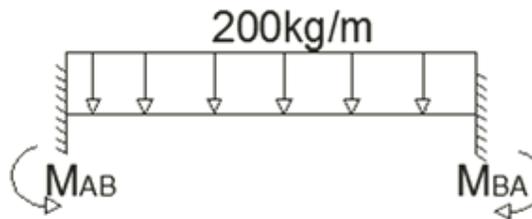


Figura 5.1.32: Carga distribuida sobre el miembro AB. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$M_{AB} = -\frac{q L^2}{12} = -\frac{400 * 4^2}{12} = -266,67 \text{ Kg} - m$$

$$M_{BA} = -\frac{q L^2}{12} = -\frac{400 * 4^2}{12} = -266,67 \text{ Kg} - m$$

- Cargas puntuales sobre los miembros.

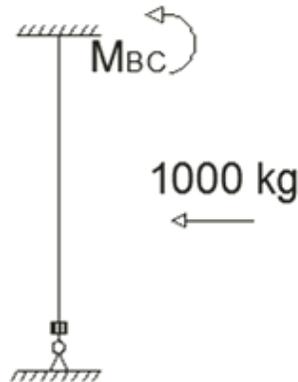


Figura 5.1.33: Cargas puntuales sobre el miembro BC. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$M_{BC} = \frac{q L}{8} = \frac{100 * 3}{8} = 375 \text{ Kg} - m$$

- Movimientos de apoyo en los extremos

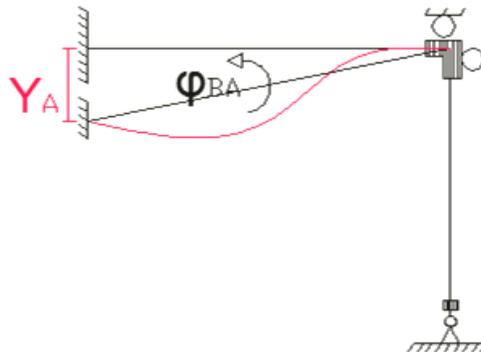


Figura 5.1.34: Movimiento de apoyo sobre la estructura. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$\varphi_{BA} = \frac{Y_A - Y_B}{L_{AB}} = \frac{0,09 - 0}{4} = 0,0225$$

$$M_{AB} = E K_{AB} (4\theta_{AB} + 2\theta_B - 6\varphi_{AB})$$

$$M_{AB} = E K_{AB} (6\varphi_{AB})$$

$$K_{AB} = \frac{I}{L_{AB}} = \frac{3,125 \times 10^{-3}}{4} = 0,8 \times 10^{-3}$$

$$M_{AB} = 2,1 \times 10^6 * 0,8 \times 10^{-3} * 6 * 0,0225 = 226,8 \text{ Kg} - m$$

- Solicitaciones producidas por efecto de la temperatura.

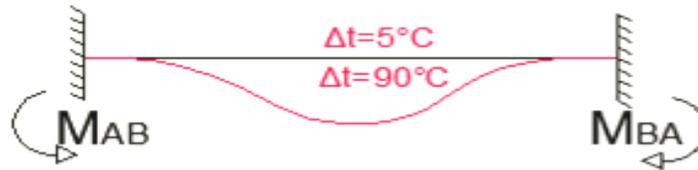


Figura 5.1.35: Sollicitación producida por temperatura. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$M_{AB} = \frac{\alpha_T * \Delta(\Delta T)}{h} EI = \frac{1 \times 10^{-3} * 85 * 2,1 \times 10^6 * 3,125 \times 10^{-3}}{0,5} = 11,16 \text{ Kg} - m$$

3. Problema Complementario del Sistema

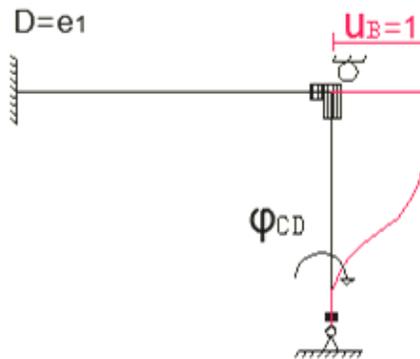


Figura 5.1.36: Deformada del primer desplazamiento unitario. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

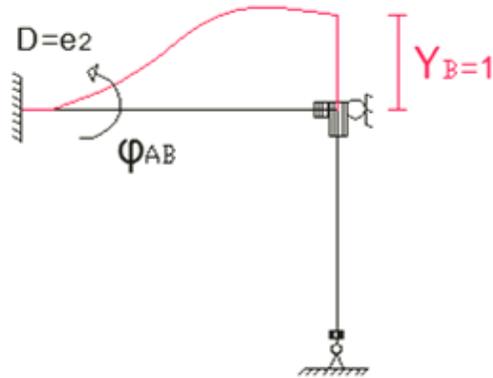


Figura 5.1.37: Deformada del segundo desplazamiento unitario. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_2] = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

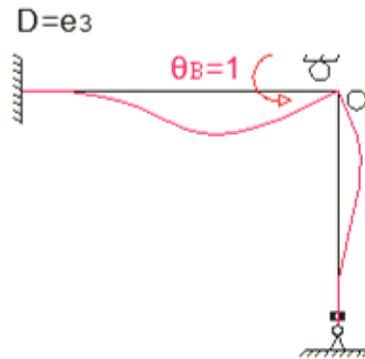


Figura 5.1.38: Deformada del tercer desplazamiento unitario. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

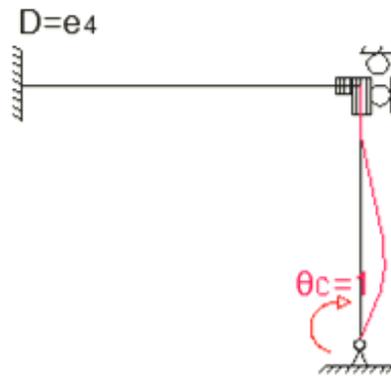


Figura 5.1.39: Deformada del cuarto desplazamiento unitario. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_4] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz A, del sistema estructural

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Funciones de forma

Las funciones de forma son una manera práctica de discretizar una estructura, mediante la resolución de ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del elemento. Este método permite que el subsistema de miembros que posee infinitos grados de libertad, sea discretizado para que el elemento posea grados de libertad finito, representados por las componentes de desplazamiento u_i , V_i y θ_i , los cuales corresponden a los movimientos como cuerpo rígido del elemento. Es importante destacar que a través de las funciones de forma se pueden obtener los desplazamientos del miembro en cualquier punto.

Analizamos un elemento rectilíneo de dos juntas, como se muestra a continuación:

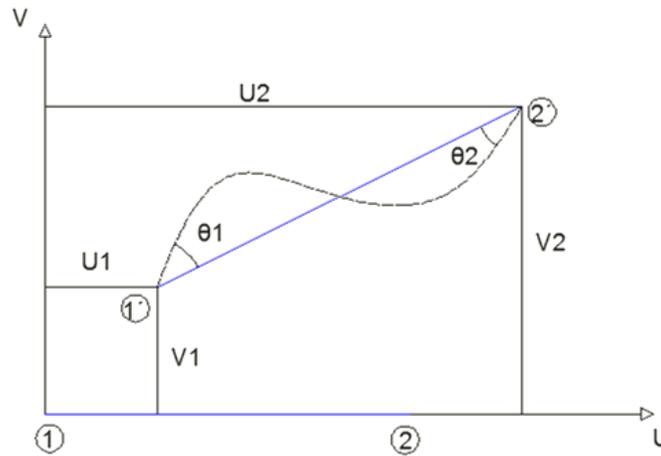


Figura 5.1.40: Sistema estructural de una barra
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Sistema de coordenadas generalizadas Q-D



Figura 5.1.41: Sistema de coordenadas generalizadas Q-D
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Observamos que posee las siguientes coordenadas a estudiar:

Coordenada 1= U_1

Coordenada 2= V_1

Coordenada 3= Θ_1

Coordenada 4= U_2

Coordenada 5= V_2

Coordenada 6= Θ_2

Supongamos ahora, por el método de superposición que cada desplazamiento ocurre por separado, analizando cada efecto, se tiene:

1) Efecto de U_1 .

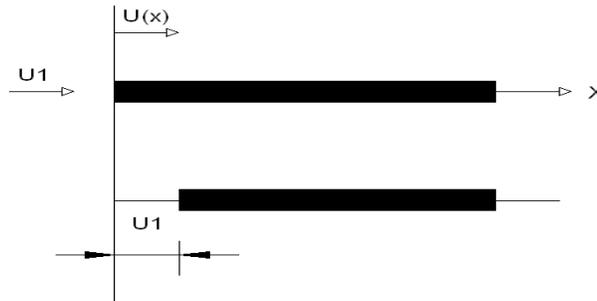


Figura 5.1.42: Desplazamiento U_1
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Debemos definir las condiciones de borde. Para una longitud inicial de cero y una longitud final de L .

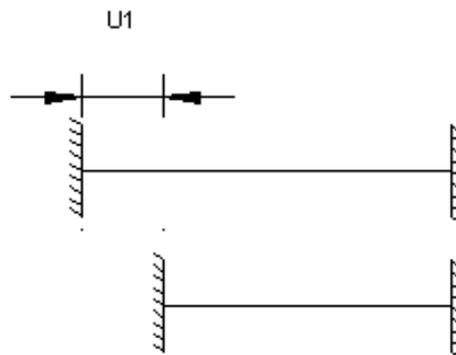


Figura 5.1.43: Desplazamiento final U_1
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Por lo tanto. $U_{(0)} = U_1$ y $U_{(L)} = 0$

Analizando un diferencial (Δx)

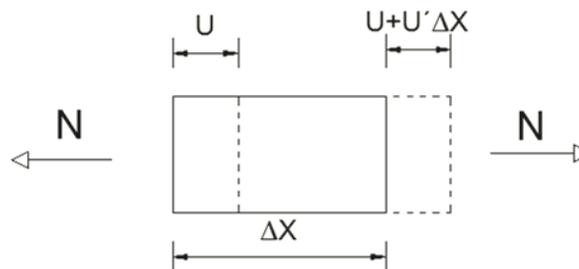


Figura 5.1.44: Análisis de un diferencial Δx
Fuente: Mejías & Ramos (2011)



Siendo U' la deformación unitaria (ϵ).

Basados en la Ley de Hooke

$$\sigma = E\epsilon = EU' \text{ y } N = \sigma A.$$

$$N = EAU'$$

$$\text{Donde: } U' = \frac{N}{AE}$$

$$\text{Integrando: } U' dx = \left(\frac{N}{AE}\right) dx$$

Es decir:

$$\int_0^x U' dx = \int_0^x \left(\frac{N}{AE}\right) dx$$

$$U(x) - U(0) = \left(\frac{N}{AE}\right) x$$

$$U(x) = \left(\frac{N}{AE}\right) x + U_1$$

Lo cual cumple con

$$U(0) = U_1$$

$$U(L) = \frac{N}{AE}L + U_1 = 0 \quad \rightarrow \quad N = -\frac{U_1AE}{L}$$

Por lo tanto

$$U(x) = -\frac{\frac{U_1AE}{L}x}{AE} + U_1 = U_1\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Es decir

$$U(x) = U_1\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$V(x) = 0$$

Luego la representación gráfica de la elástica sería:

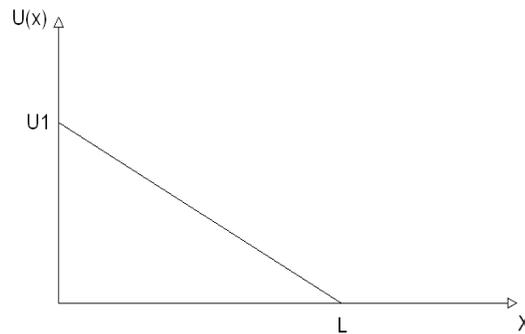


Figura 5.1.45: Representación gráfica de la elástica U_1
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

2) Efecto de U_2 .

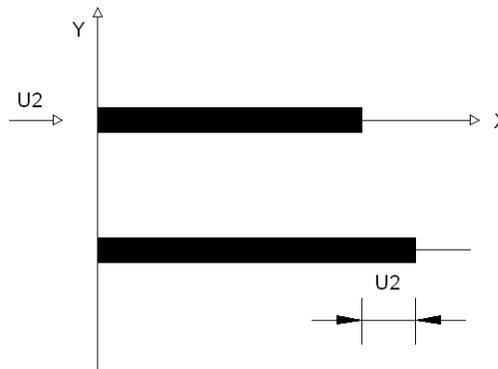


Figura 5.1.46: Desplazamiento U_2
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Debemos definir nuevamente las condiciones de borde. Para una longitud inicial de cero y una longitud final de L.

Por lo tanto $U_{(0)} = 0$ y $U_{(L)} = U_2$

- Para una longitud $X=0$

$$U_{(X)} - U_{(0)} = \left(\frac{N}{AE}\right) X$$

Si $U_{(0)} = 0$

Entonces: $U_{(X)} = \left(\frac{N}{AE}\right) X$

- Para una longitud $X=L$

$$U_{(L)} = \left(\frac{NL}{AE}\right) = U_2$$

Donde despejando a N, obtenemos $N = \left(\frac{AE}{L}\right) U_2$

Finalmente sustituyendo N en $U_{(x)}$

$$U_{(x)} = \left(\frac{\left(\frac{AE}{L}\right) U_2}{AE}\right) X = U_2 \left(\frac{X}{L}\right)$$

Donde la representación gráfica de la elástica es la siguiente:

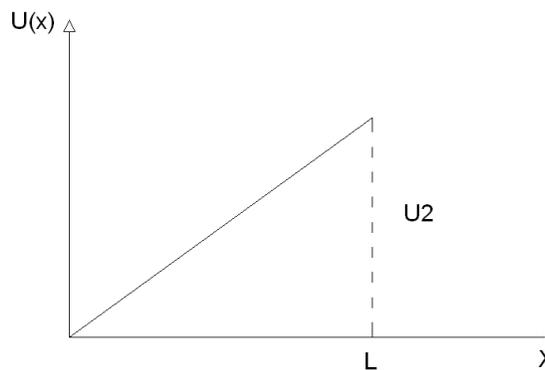


Figura 5.1.47: Representación gráfica de la elástica U_2
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

3) Efecto de V_1 .

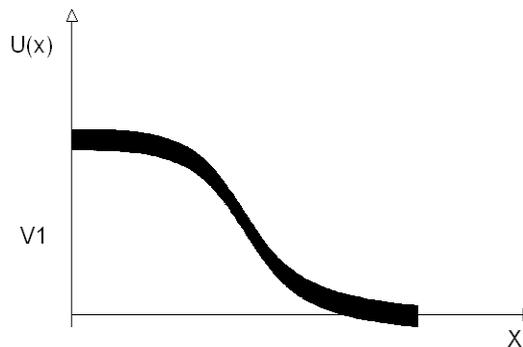


Figura 5.1.47: Desplazamiento V_1
Fuente: Mejías & Ramos (2011)



Condiciones de borde. Para una longitud inicial de cero y una longitud final de L.

$$\text{Por lo tanto. } V_{(0)} = V_1 \text{ y su primera derivada } V'_{(0)} = 0$$

$$V_{(L)} = 0 \text{ y su primera derivada } V'_{(L)} = 0$$

Ecuación de la elástica
 $EIV'''' = 0$

Suponiendo que es una ecuación cubica
 $EIV = AX^3 + BX^2 + CX + D$

Donde la primera derivada es
 $EIV' = 3AX^2 + 2BX + C$

Sustituyendo X=0 en la ecuación cubica y en su primera derivada obtenemos las constantes D y C

$$V_{(0)} = V_1 = A(0)^3 + B(0)^2 + C(0) + D \text{ -----> } D = EIV_1$$

$$V'_{(0)} = 0 = 3A(0)^2 + 2B(0) + C \text{ -----> } C = 0$$

Sustituyendo los valores de las constantes C y D para X=L

$$V_{(L)} = 0 = A(L)^3 + B(L)^2 + C(L) + EIV_1$$

$$V'_{(L)} = 0 = 3A(L)^2 + 2B(L) + 0$$

Resolviendo, se obtienen los valores de las constantes restantes B y A

$$B = -3 \left(EI \frac{V_1}{L^2} \right), \quad A = 2 \left(EI \frac{V_1}{L^3} \right)$$

Conocidas las constantes:

$$V_{(X)} = V_1 \left(1 - \left(3 \frac{X^2}{L^2} \right) + \left(2 \frac{X^3}{L^3} \right) \right)$$

Esto es válido siempre y cuando EI sea constante.

Este procedimiento de estudio, se realiza de igual manera para obtener los efectos restantes: V_2 , Θ_1 y Θ_2 .

Siendo las funciones de forma del elemento, que representan la configuración de la elástica, las siguientes:

$$\phi_{1(x)} = 1 - \frac{X}{L}$$

$$\phi_{2(x)} = 1 - \left(3 \frac{X^2}{L^2}\right) + \left(2 \frac{X^3}{L^3}\right)$$

$$\phi_{3(x)} = X \left(1 - \frac{X}{L}\right)^2$$

$$\phi_{4(x)} = \frac{X}{L}$$

$$\phi_{5(x)} = \frac{X^2}{L^2} \left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

$$\phi_{6(x)} = -\frac{X^2}{L} \left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

Como sabemos la utilidad de las funciones de forma es obtener los desplazamientos de cada miembro estructural en cualquier punto, por ello luego de haber estudiado los desplazamientos horizontales en los extremos aplicando el principio de superposición, se obtiene que el desplazamiento horizontal final del miembro en estudio viene dado por:

$$U(x) = U_1 \phi_{1(x)} + U_2 \phi_{4(x)}$$

Análogamente se aplica para el desplazamiento vertical del miembro como se muestra a continuación:

$$V(x) = V_1 \phi_{2(x)} + \Theta_1 \phi_{3(x)} + V_2 \phi_{5(x)} + \Theta_2 \phi_{6(x)}$$

Ejemplo ilustrativo 5.1.4

Se tiene la siguiente estructura; se desea discretizarla a partir de las funciones de forma

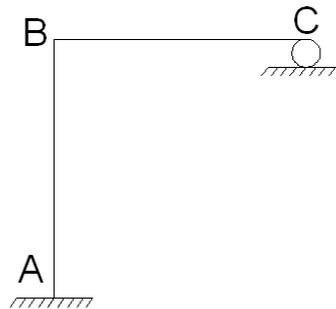


Figura 5.1.49: Sistema estructural de dos barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Definir el sistema continuo y el sistema discreto.

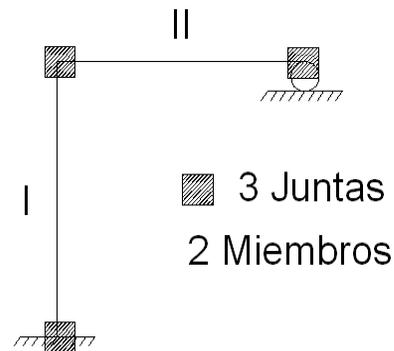


Figura 5.1.50: Numero de juntas y miembros para un sistema estructuras de dos barras.
(Ejemplo Ilustrativo 5.1.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

El sistema de coordenadas [R] y [D] coinciden para este caso en:

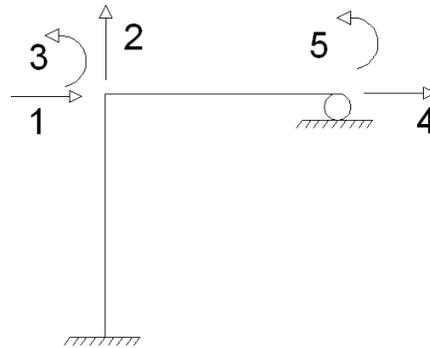


Figura 5.1.51: Sistema de coordenadas generalizadas R-r y Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Analizando cada miembro por separado:

Miembro I.

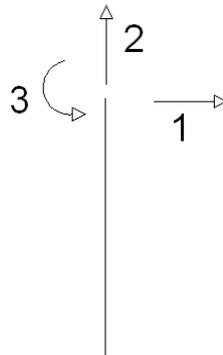


Figura 5.1.52: Análisis del miembro I. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$U(x) = R_2 \delta_{4(x)}$$
$$V(x) = -R_1 \delta_{5(x)} + R_3 \delta_{6(x)}$$

Miembro II.



Figura 5.1.53: Análisis del miembro II. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$U(x) = R_1 \varnothing_1(x) + R_4 \varnothing_4(x)$$
$$V(x) = R_2 \varnothing_2(x) + R_3 \varnothing_3(x) + R_5 \varnothing_5(x)$$

Ejemplo ilustrativo 5.1.5

Encuentre las elásticas de desplazamientos longitudinal y transversal del elemento BC, de la estructura mostrada. Suponga que el elemento BC posee restricción longitudinal.

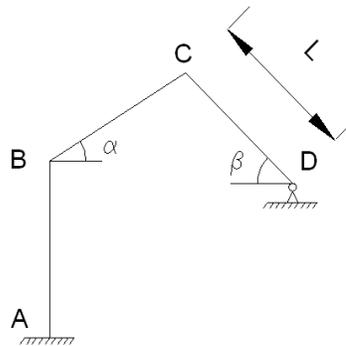


Figura 5.1.54: Sistema estructural de dos barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.5)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

1. Definición del sistema de coordenadas R-r

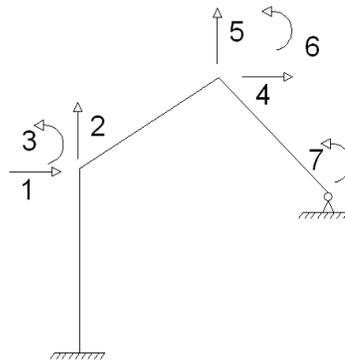


Figura 5.1.55: Sistema de coordenadas generalizadas R-r. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.5)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

2. Definición del sistema de coordenadas Q-D. Se toma en cuenta la restricción longitudinal del miembro BC. $U_1 = U_2$

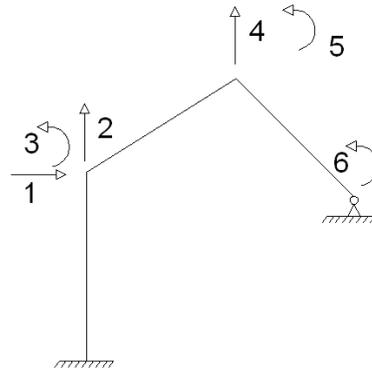


Figura 5.1.56: Sistema de coordenadas generalizadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.5)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

3. Ecuaciones de restricción del elemento BC

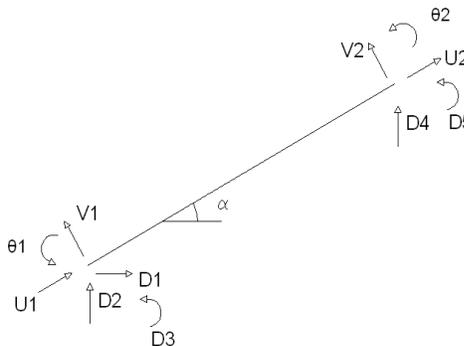


Figura 5.1.57: Análisis del miembro BC. (Ejemplo Ilustrativo 5.1.5)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$U_{(1)} = D_1 \cos(\alpha) + D_2 \sen(\alpha)$$

$$U_{(2)} = D_4 \cos(\alpha)$$

$$V_{(1)} = D_1 \sen(\alpha) + D_2 \cos(\alpha)$$

$$V_{(2)} = D_4 \cos(\alpha)$$

Por lo tanto:

$$U_{(x)} = D_1 \cos(\alpha) + D_2 \sen(\alpha)$$

$$V_{(x)} = (D_1 \sen(\alpha) + D_2 \cos(\alpha))\phi_{2(x)} + D_3\phi_{3(x)} + D_4\cos(\alpha) \phi_{5(x)} + D_5 \phi_{6(x)}$$

Ejercicios propuestos

Determinar las funciones de forma asociadas a las coordenadas estáticas de las siguientes figuras:

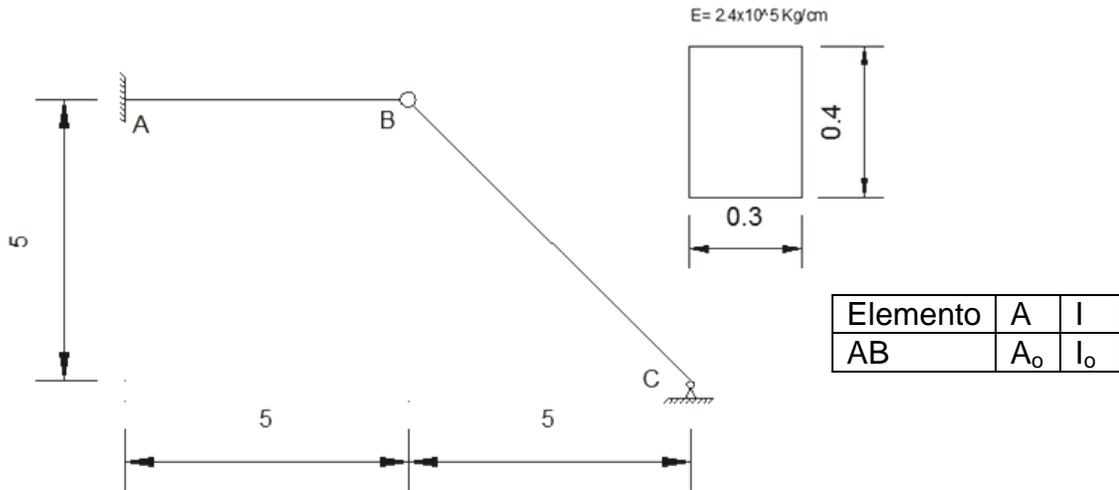


Figura 5.1.58: Sistema estructural de dos barras. (Ejercicio Propuesto 5.1.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

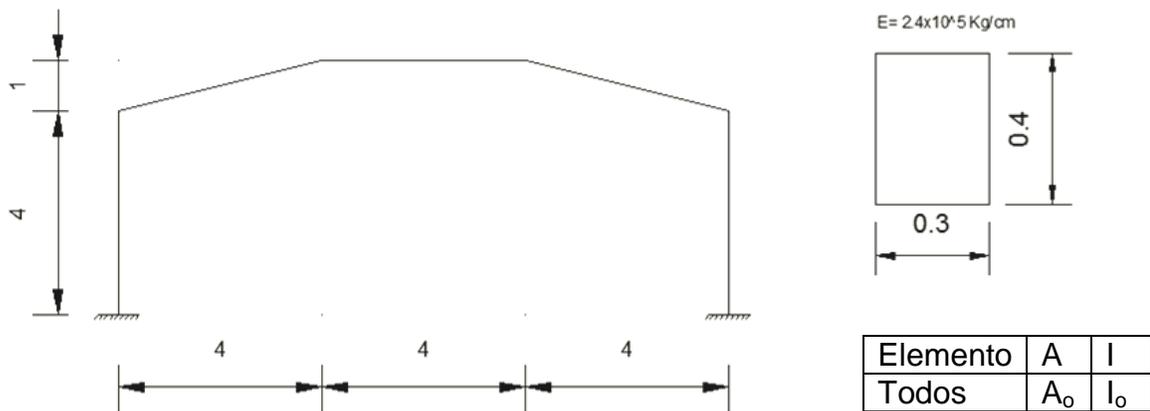


Figura 5.1.59: Sistema estructural de cinco barras. (Ejercicio Propuesto 5.1.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)



5.2 NOCIONES ELEMENTALES DE MATRICES PARA EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS

Matriz de Rigidez

Los sistemas estructurales se comportan de acuerdo a la Ley de Hooke, que tiene la forma general:

$$F = kx$$

La forma básica de la ecuación usada en el análisis matricial, es bastante similar a la expresión básica de la ley de Hooke, y es la siguiente:

$$\{q\} = [K]\{X\}$$

Donde $\{q\}$, es el vector fuerza y es análogo al término F en la ley de Hooke, dicho vector contiene todas las fuerzas que actúan en las coordenadas estructurales, y el vector $\{X\}$ es el vector desplazamiento, similar al desplazamiento en la ley de Hooke y que contiene los desplazamientos en cada una de las coordenadas estructurales. Por último $[K]$ es la matriz de rigidez que es análoga a la constante k de resorte de la ley de Hooke, y esta es una representación de la capacidad de un sistema estructural para resistir cargas. La rigidez no es más que la fuerza requerida para causar un desplazamiento unitario.

Características de la matriz de rigidez

- La matriz de rigidez es regular, debido a que el valor del determinante es diferente de cero y positivo.
- Los términos de la diagonal son positivos
- La matriz de rigidez es cuadrada
- La matriz de rigidez es simétrica con respecto a la diagonal.

Finalmente debe indicarse que la matriz de rigidez transforma los desplazamientos en cargas y para que esto exista los desplazamientos deben ser independientes.

Matriz de deformación - fuerza

- Matriz de rigidez de un miembro

La matriz de rigidez de un miembro es la medida de las fuerzas que están asociadas con un conjunto dado de deformaciones y en su forma mas simple es la fuerza que debe aplicarse en algún punto para producir una deformación unitaria en un punto. Esta matriz de rigidez del elemento viene expresada de la siguiente manera:

$$[k]$$

Y con ella se puede representar la deformación-fuerza del miembro

Obtención de la matriz de rigidez de un miembro, Mediante el método de las fuerzas

Se tiene el siguiente miembro, con sus respectivas coordenadas locales:



Figura 5.2.1: Sistema de coordenadas locales de un miembro
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

A continuación se muestran los desplazamientos elementales del sistema, con sus respectivas restricciones, para obtener el vector k .

$$D=e_1$$



Figura 5.2.2: Primer desplazamiento elemental
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$D=e_2$

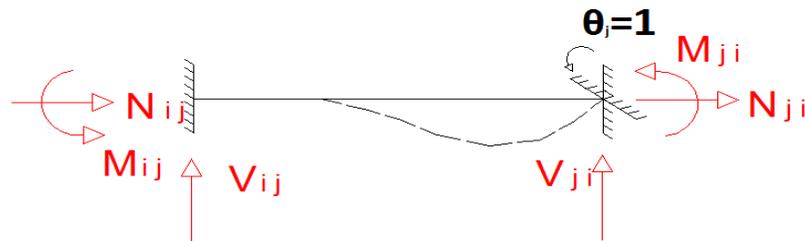


Figura 5.2.3: Segundo desplazamiento elemental
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$D=e_3$



Figura 5.2.4: Tercer desplazamiento elemental
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$D=e_4$

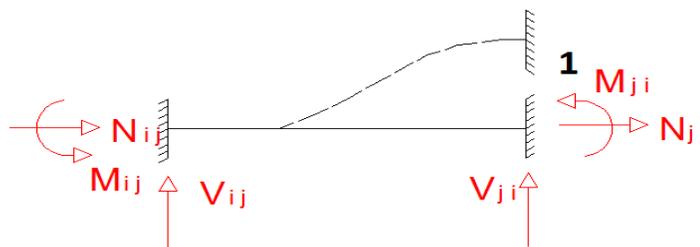


Figura 5.2.5: Cuarto desplazamiento elemental
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$D=e_5$

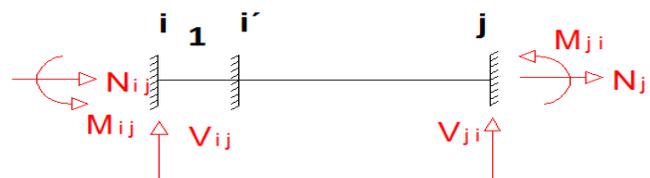


Figura 5.2.6: Quinto desplazamiento elemental
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$D=e_6$$



Figura 5.2.7: Sexto desplazamiento elemental
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Aplicando el principio de trabajo virtual para cuerpos elásticos, tenemos para el primer desplazamiento elemental ($d=e_1$).

Sistema Primario



Figura 5.2.8: Sistema primario para el primer desplazamiento elemental
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Sistema "0"



Figura 5.2.9: Sistema cero para el primer desplazamiento elemental
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Sistema "1"



Figura 5.2.10: Sistema uno para el primer desplazamiento elemental
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Sistema "2"



Figura 5.2.11: Sistema dos para el primer desplazamiento elemental
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Sistema "3"



Figura 5.2.12: Sistema tres para el primer desplazamiento elemental
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$D_{10} = D_{20} = D_{30} = 0$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\frac{-x}{L} \frac{-x}{L}}{EI} dx = \frac{L}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{\frac{x}{L} \frac{x}{L}}{EI} dx = \frac{L}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{\frac{-x}{L} \frac{x}{L}}{EI} dx = -\frac{L}{6EI}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 0$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

$$\delta_{33} = 0$$

Ecuaciones de compatibilidad

$$1. D_{10} + \delta_{11} M_{ij} + \delta_{12} M_{ji} + \delta_{13} N_{ji} = \theta_i$$

$$2. D_{20} + \delta_{21} M_{ij} + \delta_{22} M_{ji} + \delta_{23} N_{ji} = 0$$

$$3. D_{30} + \delta_{31} M_{ij} + \delta_{32} M_{ji} + \delta_{33} N_{ji} = 0$$

Utilizando las ecuaciones (1) y (2) y sustituyendo los valores conocidos, tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{3EI} M_{ij} - \frac{L}{6EI} M_{ji} = \theta_i \\ -\frac{L}{6EI} M_{ij} + \frac{L}{3EI} M_{ji} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Multiplicando esta ecuación por } \frac{1}{2} \text{ como artificio matemático, tenemos:}$$

$$\frac{3L}{12EI} M_{ij} = \theta_i$$
$$M_{ji} = \frac{1}{2} M_{ij}$$

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L}$$
$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}$$

Por lo tanto para $d=e_1$ tenemos que:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De igual forma, se obtiene la matriz k de cada desplazamiento elemental, con el procedimiento mostrado anteriormente, por lo tanto la matriz k total de un miembro bidimensional cuyas juntas no sufren deformación respecto a su ángulo, y donde no se consideran los efectos de corte, viene expresada de la siguiente manera:

$$[k]= \begin{pmatrix} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ q_1 & 4EI/L & 2EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 0 & 0 \\ q_2 & 2EI/L & 4EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 0 & 0 \\ q_3 & 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 & 0 & 0 \\ q_4 & -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L & -AE/L \\ q_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -AE/L & AE/L \end{pmatrix}$$

Donde,

L, es la longitud del miembro

A, el área del miembro

I, momento de inercia

E, constante de elasticidad longitudinal. (Módulo de Young)

Por lo tanto para poder transformar las deformaciones en fuerzas internas, la matriz de rigidez del miembro tiene que venir dada por un arreglo diagonal de submatrices $[k_{ij}]$, donde las otras submatrices son nulas. Y poseerá "n" columnas, como miembros posea la estructura, por lo tanto será una matriz $n \times n$, como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{pmatrix}$$

Para los miembros, podemos escribir la siguiente relación:

$$[q] = [k]*[d]$$

Donde se refleja que mediante las deformaciones del miembro $[d]$, se pueden obtener las fuerzas internas $[q]$, mediante la matriz $[k]$.

La matriz de rigidez de una barra recta tridimensional, es una matriz de 6×6 , la cual posee torsión, flexión y esfuerzo axial. Esta complicación es lo que hace que la barra requiera una matriz de rigidez más compleja, como se muestra a continuación:

$$[k]= \begin{pmatrix} J_{11}G/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4EI_{22}/L & 2EI_{22}/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2EI_{22}/L & 4EI_{22}/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4EI_{33}/L & 2EI_{33}/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2EI_{33}/L & 4EI_{33}/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L \end{pmatrix}$$

Donde:

L, longitud de la barra

A, área transversal

I_{22} , I_{33} , momentos de inercia en las direcciones Y y Z.

J, módulo de torsión

E, módulo de elasticidad longitudinal

G, módulo de elasticidad transversal

Módulo de elasticidad transversal

El módulo de elasticidad trasversal es una constante elástica que caracteriza el cambio de forma que experimenta un material elástico (lineal e isótropo) cuando se aplican esfuerzos cortantes.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Donde:

E, módulo de elasticidad longitudinal

ν , es el coeficiente de Poisson.

$$\nu = -\frac{\epsilon_{trans}}{\epsilon_{long}}$$

- Matriz de rigidez de un miembro axialmente rígido

Al considerar a un miembro axialmente rígido (A^∞), se elimina la tercera fila y columna de la matriz de rigidez para un miembro de sección constante, en donde se ignoran los efectos de corte.

$$[k]= \begin{pmatrix} 4EI_{ab}/L_{ab} & 2EI_{ab}/L_{ab} \\ 2EI_{ab}/L_{ab} & 4EI_{ab}/L_{ab} \end{pmatrix}$$

Es importante resaltar que si bien en el sistema las fuerzas que se generan son cero (0), no significa que las fueras axiales sean nulas, en efecto si existe cargas aplicadas, las fuerzas axiales se pueden generar por muy pequeñas que sean.

- Matriz de rigidez de un miembro transversalmente rígido

Si se considera un miembro transversalmente rígido ($I \rightarrow \infty$), se elimina la primera y segunda fila y columna de la matriz de rigidez para un miembro de sección constante en donde se ignoran los efectos de corte.

$$[k]= \left[\begin{matrix} AE/L_{ab} \end{matrix} \right]$$

- Matriz de rigidez de un miembro rotado

Muchas veces los miembros poseen ángulos de rotación que representan la particularidad del sistema estructural, es decir, una estructura puede poseer cuerpos cuyos ángulos de rotación sean de 0° , 45° , 90° grados y otros que conectados entre sí forman el esqueleto estructural, como se muestra a continuación:

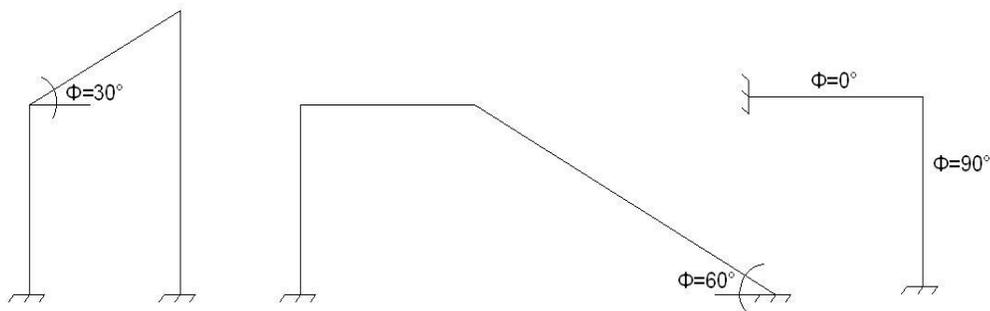


Figura 5.2.13: Diferentes angulos de rotacion de miembros en estructuras
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Por ello que para simplificar el cálculo estructural se ha establecido una matriz de rigidez genérica en función de un ángulo de rotación Φ , que se denominara matriz de rigidez de un miembro rotado. Esta matriz se estableció con un ángulo de rotación (Φ) diferente de cero (0), con la que se puede conseguir de una manera eficaz, rápida y precisa las matrices de rigidez de miembros con solo el conocimiento del ángulo de rotación.

Los ángulos de rotación son los siguientes:

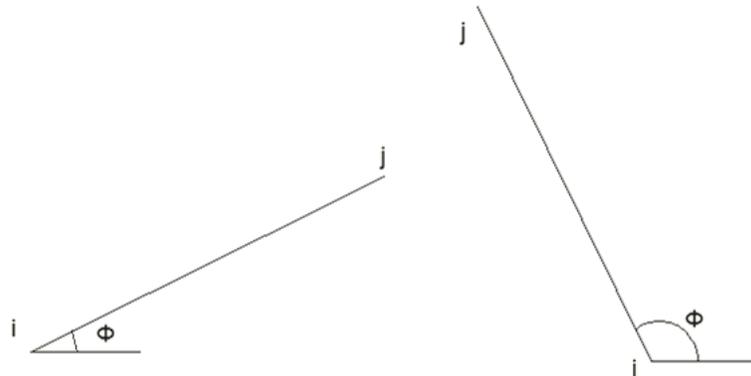


Figura 5.2.14: Angulo de rotacion de un miembro
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

La consideración más importante de este tema, es la numeración, el sentido y la dirección de los desplazamientos que se producen en el miembro, que debe mantenerse igual para que la matriz de rigidez de un miembro rotado genérica no sufra alteraciones, por lo tanto se definen primero los giros, luego los desplazamientos verticales y por último los desplazamientos horizontales, de la siguiente manera:



Figura 5.2.15: Enumeracion de las coordenadas generalizadas para un miembro horizontal
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Y luego, dependiendo del ángulo que posea el miembro en estudio, mantener dicha numeración, como se muestra a continuación:

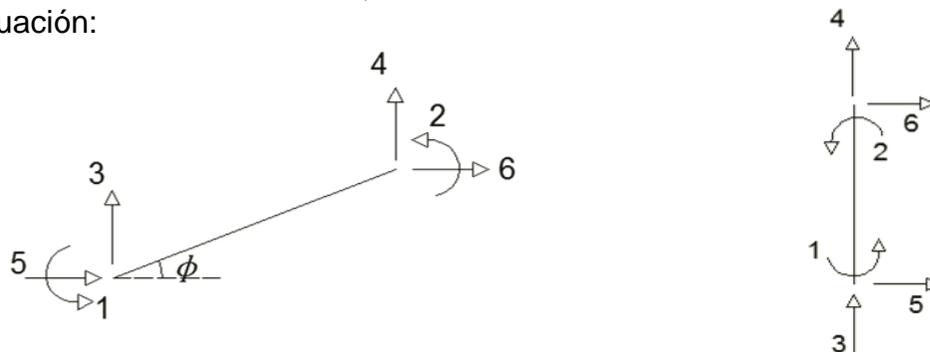


Figura 5.2.16: Enumeracion de las coordenadas generalizadas dependiendo del angulo de rotacion de un miembro
Fuente: Mejías & Ramos (2011)



Se puede apreciar en las imágenes anteriores, que no importa que tanto se rote el miembro, este siempre mantiene el mismo sentido y dirección de los desplazamientos.

Matriz de carga-desplazamiento

- Matriz de rigidez de una estructura

La matriz de rigidez de una estructura viene expresada de la siguiente manera:

$$[K]$$

Que representa a las componentes de las acciones requeridas o cargas que se deben aplicar a las juntas de una estructura para mantenerla cinemáticamente determinada, cuando dichas juntas se someten, en forma alterna, a la aplicación de valores unitarios de desplazamiento en la dirección del vector D.

Como obtener la matriz de rigidez por el método matricial

Se obtiene a partir de la matriz de transformación [A] (matriz desplazamiento-deformación), y la matriz deformación-fuerza [k], como lo muestra la siguiente relación:

$$[K] = [A]^t [k] [A]$$

Mediante la matriz de rigidez de una estructura se puede relacionar los desplazamientos incógnita de una estructura con las cargas conocidas de la misma, lo cual permite encontrar las reacciones, fuerzas internas y tensiones en cualquier punto de la estructura. En otras palabras, se va a establecer una relación entre el vector de cargas generalizadas y el vector de desplazamientos generalizados.

A través de la siguiente ecuación, se aprecia como la matriz de rigidez [K] relaciona las fuerzas externas [Q] con los desplazamientos [D]:

$$[Q] = [K] \cdot [D]$$

$$[CARGAS] = [K][DESPLAZAMIENTOS]$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}$$

Donde K_{ij} , representa las fuerzas en la dirección i producidas por el estado de desplazamiento unitario j .

Al establecer una relación a través de la matriz de rigidez entre el vector cargas generalizadas y el vector de desplazamientos generalizados, se sabrá que cumplirá con las siguientes implicaciones:

- Cumple con la ley de Hooke en sus tres dimensiones, significa que el alargamiento unitario que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada F .

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{F}{AE}$$

Donde, δ el alargamiento, L la longitud original, E : módulo de Young.

- Las deformaciones que se forman en la estructura son tan pequeñas, que se aplica la teoría de los desplazamientos infinitesimos.
- No existe interacción entre los efectos axiales en los elementos con la flexión en el mismo.

Ejercicio Ilustrativo 5.2.1

Calcular la matriz de rigidez de la siguiente figura, cuya sección transversal se muestra a continuación.

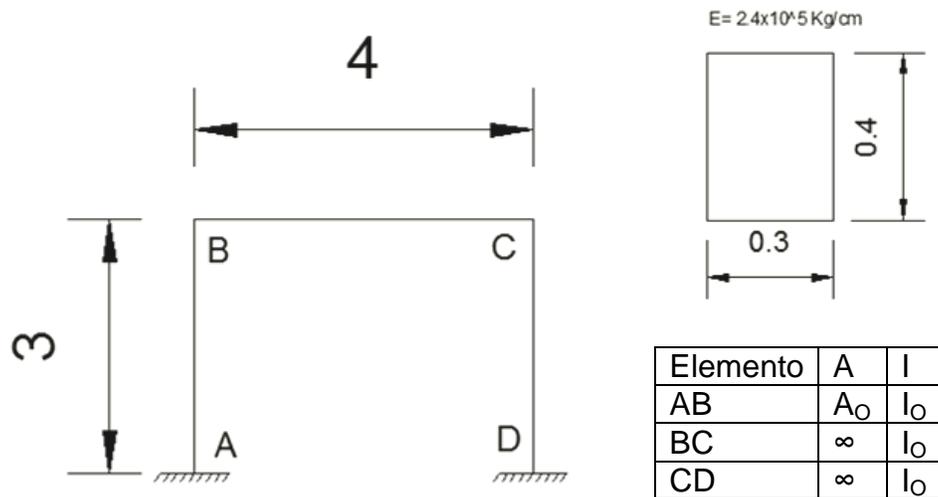


Figura 5.2.17: Sistema estructural de tres barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.2.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

1. Determinación de los sistemas de coordenadas de la estructura
 - a. Sistema de coordenadas R-r

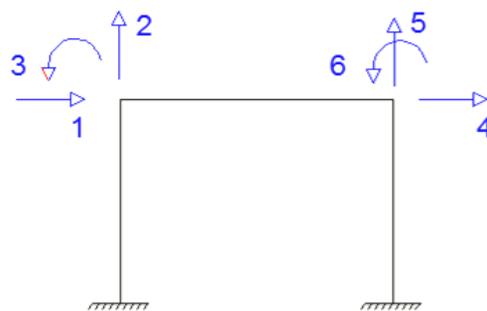


Figura 5.2.18: Sistema de coordenadas R-r. (Ejemplo Ilustrativo 5.2.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

b. Sistema de coordenadas Q-D

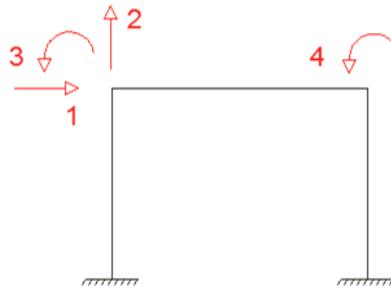


Figura 5.2.19: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.2.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

c. Sistema de coordenadas q-d

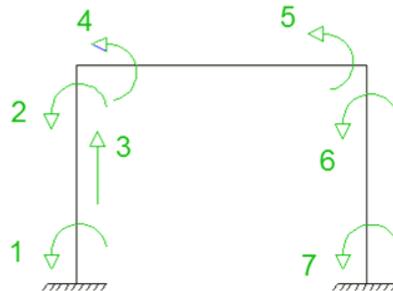


Figura 5.2.20: Sistema de coordenadas q-d. (Ejemplo Ilustrativo 5.2.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

2. Determinación de la matriz [A]

Tomando en cuenta los posibles desplazamientos de la estructura según el sistema de coordenadas generalizadas Q-D, se libera uno a uno los desplazamientos restringiendo los demás.

a. $D=e_1$

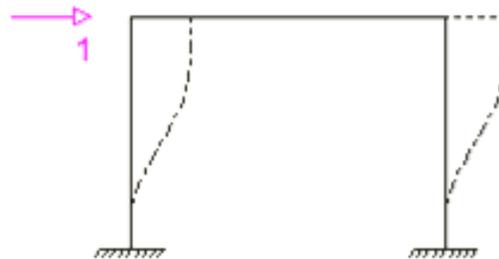


Figura 5.2.21: Elastica del primer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.2.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_1]^t = [1/3 \quad 1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/3 \quad 1/3]$$

b. $D=e_2$

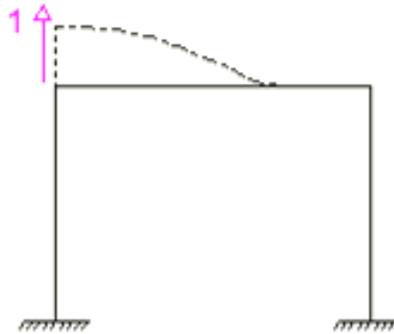


Figura 5.2.22: Elastica del segundo desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.2.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_2]^t = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

c. $D=e_3$

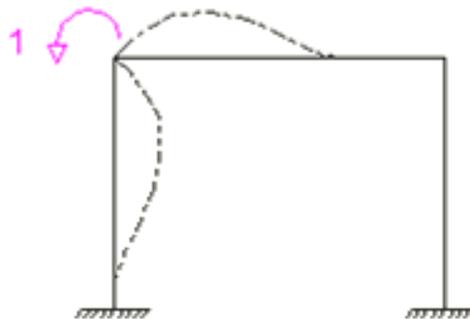


Figura 5.2.23: Elastica del tercer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.2.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_3]^t = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

d. $D=e_4$

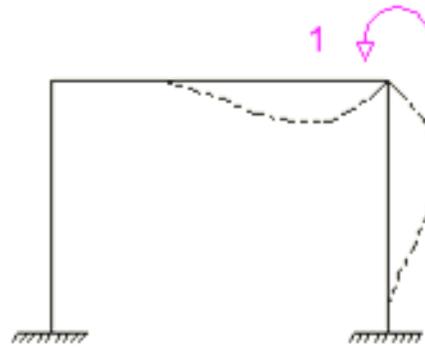


Figura 5.2.24: Elastica del cuarto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.2.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_4]^t = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]$$

$$[A] = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Determinación de la matriz de rigidez

$$[K] = [A]^t [k] [A]$$

$$[A]^t = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el calculo de la inercia tomando en cuenta la seccion transversal tenemos:

$$I = \frac{b * h^3}{12} = \frac{30 * 40^3}{12} = 1,6 \times 10^5 \text{ cm}^4 = 1,6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

Para el calculo del modulo de elasticidad tenemos:

$$E = 15100\sqrt{F_y} = 15100\sqrt{250} = 2,4 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2 = 2,4 \times 10^9 \text{ Kg/m}^2$$

Se procede al calculo de [k]

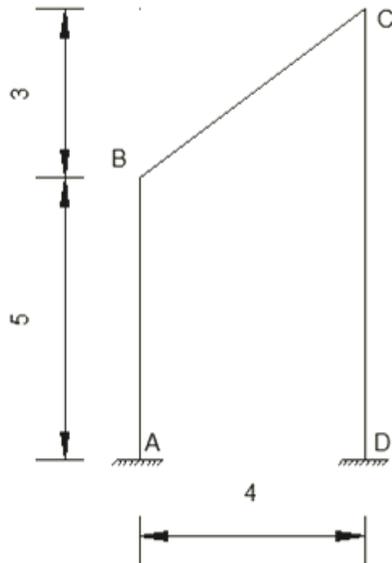
$$[k] = \begin{pmatrix} 4E I_{ab}/L_{ab} & 2E I_{ab}/L_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2E I_{ab}/L_{ab} & 4E I_{ab}/L_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AE/L_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4E I_{bc}/L_{bc} & 2E I_{bc}/L_{bc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2E I_{bc}/L_{bc} & 4E I_{bc}/L_{bc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4E I_{cd}/L_{cd} & 2E I_{cd}/L_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2E I_{cd}/L_{cd} & 4E I_{cd}/L_{cd} \end{pmatrix}$$

$$[k] = \begin{pmatrix} 5,12E+06 & 2,56E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,56E+06 & 5,12E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9,60E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,84E+06 & 1,92E+06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,92E+06 & 3,84E+06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,12E+06 & 2,56E+06 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,56E+06 & 5,12E+06 \end{pmatrix}$$

$$[K] = \begin{pmatrix} 3,41E+06 & 0 & 2,56E+06 & 2,56E+06 \\ 0 & 9,60E+07 & 0 & 0 \\ 2,56E+06 & 0 & 8,96E+06 & 1,92E+06 \\ 2,56E+06 & 0 & 1,92E+06 & 8,96E+06 \end{pmatrix}$$

Ejercicio Ilustrativo 5.2.2

Ejercicio de matriz de rigidez de un miembro rotado
Determine la matriz de rigidez de la siguiente figura cuya sección transversal se muestra a continuación:



Elemento	A	I
Todos	A_0	I_0

Figura 5.2.25: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

1. Determinación de los sistemas de coordenadas de la estructura
 - a. Sistema de Coordenadas R-r

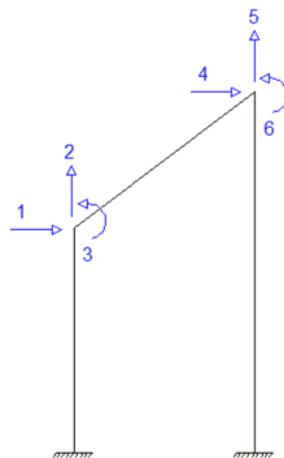


Figura 5.2.26: Sistema de coordenadas R-r. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

b. Sistema de coordenadas Q-D

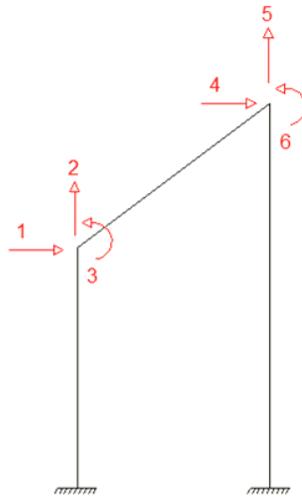


Figura 5.2.27: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

2. Determinación de la matriz de rigidez

$$[K] = [k_{AB}] + [k_{BC}] + [k_{CD}]$$

a) Determinación de $[k_{AB}]$

$$[k_{AB}] = \begin{pmatrix} & D_1=d_6 & D_2=d_4 & D_3=d_2 & D_4=0 & D_5=0 & D_6=0 \\ Q_1=q_6 & 4EI_{ab}/L_{ab} & 2EI_{ab}/L_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_2=q_4 & 2EI_{ab}/L_{ab} & 4EI_{ab}/L_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_3=q_2 & 0 & 0 & AE/L_{ab} & 0 & 0 & 0 \\ Q_4=0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_5=0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_6=0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[k_{AB}] = \begin{pmatrix} 3,04E+06 & 1,52E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,52E+06 & 3,04E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,71E+07 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



a) Determinación de $[K_{BC}]$
 Usando para el miembro BC $\phi=36,86$ tenemos:

$[k_{BC}] =$

	D1=d5	D2=d3	D3=d1	D4=d6	D5=d4	D6=d2
Q1=q5	$((12EI_{bc}/L_{bc}^3) \cdot \text{Sen}^2\phi) + ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Cos}^2\phi)$	$12EI_{bc}/L_{bc}^3 \cdot \text{Sen}\phi \text{Cos}\phi + ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Cos}\phi \text{Sen}\phi)$	$(-6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Sen}\phi$	$((-12EI_{bc}/L_{bc}^3) \cdot \text{Sen}^2\phi) - ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Cos}^2\phi)$	$((12EI_{bc}/L_{bc}^3) \cdot \text{Sen}\phi \text{Cos}\phi) - ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Cos}\phi \text{Sen}\phi)$	$(-6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Sen}\phi$
Q2=q3	$((-12EI_{bc}/L_{bc}^3) \cdot \text{Sen}\phi \text{Cos}\phi) + ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Cos}\phi \text{Sen}\phi)$	$((12EI_{bc}/L_{bc}^3) \cdot \text{Cos}^2\phi) + ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Sen}^2\phi)$	$(6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Cos}\phi$	$((12EI_{bc}/L_{bc}^3) \cdot \text{Sen}\phi \text{Cos}\phi) - ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Cos}\phi \text{Sen}\phi)$	$((-12EI_{bc}/L_{bc}^3) \cdot \text{Cos}^2\phi) - ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Sen}^2\phi)$	$(6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Cos}\phi$
Q3=q1	$(-6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Sen}\phi$	$(6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Cos}\phi$	$4EI_{bc}/L_{bc}$	$(6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Sen}\phi$	$(-6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Cos}\phi$	$2EI_{bc}/L_{bc}$
Q4=q6	$((-12EI_{bc}/L_{bc}^3) \cdot \text{Sen}^2\phi) - ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Cos}^2\phi)$	$((12EI_{bc}/L_{bc}^3) \cdot \text{Sen}\phi \text{Cos}\phi) - ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Cos}\phi \text{Sen}\phi)$	$(6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Sen}\phi$	$((12EI_{bc}/L_{bc}^3) \cdot \text{Sen}^2\phi) + ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Cos}^2\phi)$	$12EI_{bc}/L_{bc}^3 \cdot \text{Sen}\phi \text{Cos}\phi + ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Cos}\phi \text{Sen}\phi)$	$(6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Sen}\phi$
Q5=q4	$((12EI_{bc}/L_{bc}^3) \cdot \text{Sen}\phi \text{Cos}\phi) - ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Cos}\phi \text{Sen}\phi)$	$((-12EI_{bc}/L_{bc}^3) \cdot \text{Cos}^2\phi) - ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Sen}^2\phi)$	$(-6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Cos}\phi$	$12EI_{bc}/L_{bc}^3 \cdot \text{Sen}\phi \text{Cos}\phi + ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Cos}\phi \text{Sen}\phi)$	$((12EI_{bc}/L_{bc}^3) \cdot \text{Cos}^2\phi) + ((AE/L_{bc}) \cdot \text{Sen}^2\phi)$	$(-6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Cos}\phi$
Q6=q2	$(-6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Sen}\phi$	$(6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Cos}\phi$	$2EI_{bc}/L_{bc}$	$(6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Sen}\phi$	$(-6EI_{bc}/L_{bc}^2) \cdot \text{Cos}\phi$	$4EI_{bc}/L_{bc}$

$[k_{BC}] =$

	D1=d5	D2=d3	D3=d1	D4=d6	D5=d4	D6=d2
Q1=q5	3,70E+08	2,75E+07	-5,50E+05	-3,70E+08	-2,75E+07	-5,50E+05
Q2=q3	2,75E+07	2,10E+07	7,37E+05	-2,75E+07	-2,10E+07	7,37E+05
Q3=q1	-5,50E+05	7,37E+05	3,07E+06	5,50E+05	7,37E+05	1,54E+06
Q4=q6	-3,70E+08	-2,75E+07	5,50E+05	3,70E+08	2,75E+07	5,50E+05
Q5=q4	-2,75E+07	-2,10E+07	7,37E+05	2,75E+07	2,10E+07	7,37E+05
Q6=q2	-5,50E+05	7,37E+05	1,54E+06	5,50E+05	7,37E+05	3,07E+06

b) Determinación de $[K_{CD}]$

$$[K_{CD}] = \begin{pmatrix} & D_1=d_6 & D_2=d_4 & D_3=d_2 & D_4=0 & D_5=0 & D_6=0 \\ Q_1=q_6 & 4E_{cd}/L_{cd} & 2E_{cd}/L_{cd} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_2=q_4 & 2E_{cd}/L_{cd} & 4E_{cd}/L_{cd} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_3=q_2 & 0 & 0 & AE/L_{cd} & 0 & 0 & 0 \\ Q_4=0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_5=0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_6=0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[k_{CD}] = \begin{pmatrix} 3,04E+06 & 1,52E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,52E+06 & 3,04E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,71E+07 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[K] = \begin{pmatrix} & D_1=d_5 & D_2=d_3 & D_3=d_1 & D_4=d_6 & D_5=d_4 & D_6=d_2 \\ Q_1=q_5 & 3,76E+08 & 3,05E+07 & -5,50E+05 & -3,70E+08 & -2,75E+07 & -5,50E+05 \\ Q_2=q_3 & 3,05E+07 & 2,71E+07 & 7,37E+05 & -2,75E+07 & -2,10E+07 & 7,37E+05 \\ Q_3=q_1 & -5,50E+05 & 7,37E+05 & 1,17E+08 & 5,50E+05 & 7,37E+05 & 1,54E+06 \\ Q_4=q_6 & -3,70E+08 & -2,75E+07 & 5,50E+05 & 3,70E+08 & 2,75E+07 & 5,50E+05 \\ Q_5=q_4 & -2,75E+07 & -2,10E+07 & 7,37E+05 & 2,75E+07 & 2,10E+07 & 7,37E+05 \\ Q_6=q_2 & -5,50E+05 & 7,37E+05 & 1,54E+06 & 5,50E+05 & 7,37E+05 & 3,07E+06 \end{pmatrix}$$

- Matriz de flexibilidad de una estructura

La matriz de flexibilidad en las estructuras, viene expresada de la siguiente manera:

$$[F]$$

Representa aquella matriz capaz de transformar las cargas generalizadas $[Q]$ en coordenadas generalizadas $[D]$ ó bien en desplazamientos, como se expresa a continuación:

$$[D] = [F] * [Q]$$

La matriz de flexibilidad no es más que la medida de la magnitud de los desplazamientos que ocurre en un punto cuando hemos aplicado una carga unitaria en dicho punto.

Así como existen procedimientos para hallar la matriz de rigidez, la matriz de flexibilidad también consta de un procedimiento. A continuación se presenta la matriz de flexibilidad de un miembro $l=l_0$ y $A=A_0$:

$$[f_i] = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI_0} & -\frac{L}{6EI_0} & 0 \\ -\frac{L}{6EI_0} & \frac{L}{3EI_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EI_0} \end{bmatrix}$$

Si consideramos un miembro axialmente rígido (A^∞), se elimina la tercera fila y columna de la matriz de rigidez para un miembro de sección constante, en donde se ignoran los efectos de corte.

$$[f_i] = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI_0} & -\frac{L}{6EI_0} \\ -\frac{L}{6EI_0} & \frac{L}{3EI_0} \end{bmatrix}$$

Por otro lado esta matriz también se puede obtener como la inversa de la matriz de rigidez $[K]$, por lo tanto $[F]=1/K$.

Matriz de desplazamiento-deformación

- Matriz [A]

La matriz de transformación $[A]$, de orden $m \times n$, transforma los desplazamientos de las juntas $[D]$ en las deformaciones de los extremos de los miembros $[d]$, se define como “matriz desplazamiento-deformación” y se expresa de la siguiente manera:

$$[d] = [A] * [D]$$

Esta matriz de desplazamiento-deformación se obtiene por geometría, al imponer uno a uno los desplazamientos con valores unitarios, para organizarlos en una matriz A.

Cada elemento A_{ij} de la matriz de transformación A, será la deformación en dirección i producida por el desplazamiento unitario en la dirección j , cuando todos los desplazamientos en las otras direcciones se mantienen en cero. Por consiguiente, cada elemento de la matriz [A] representa las deformaciones para los desplazamientos.

Ejemplo Ilustrativo 5.2.3

Determinar la matriz de transformación A, del siguiente sistema estructural, considerando que el sistema no posee restricciones.



Figura 5.2.28: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

3. Determinación de los sistemas de coordenadas que posee la estructura.

a. Sistema de Coordenadas R-r.

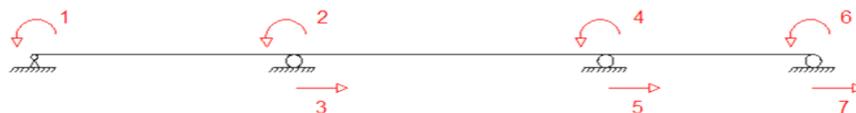


Figura 5.2.29: Sistema de coordenadas R-r. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

b. Sistema de coordenadas Q-D.

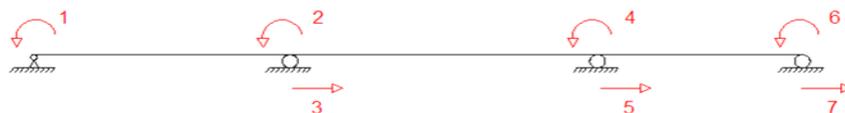


Figura 5.2.30: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

c. Sistema de Coordenadas q-d.



Figura 5.2.31: Sistema de coordenadas q-d. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Por lo tanto el vector deformación del sistema es el siguiente:

$$[d] = \begin{bmatrix} \theta_A - \varphi_{AB} \\ \theta_B - \varphi_{AB} \\ \Delta L_{AB} \\ \theta_B - \varphi_{BC} \\ \theta_C - \varphi_{BC} \\ \Delta L_{BC} \\ \theta_C - \varphi_{CD} \\ \theta_D - \varphi_{CD} \\ \Delta L_{CD} \end{bmatrix}$$

4. Determinación de la matriz de transformación [A]

Tomando en cuenta los posibles desplazamientos de la estructura según el sistema de coordenadas generalizadas Q-D, se libera uno a uno los desplazamientos restringiendo los demás.

a. $D=e_1$



Figura 5.2.32: Elastica producida por el primer desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_1]^t = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

b. $D=e_2$

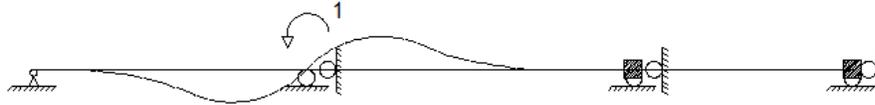


Figura 5.2.33: Elastica producida por el segundo desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_2]^t = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

c. $D=e_3$

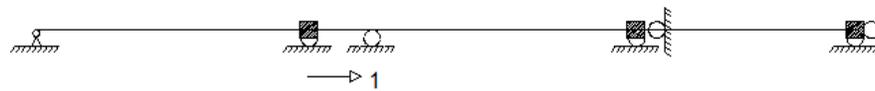


Figura 5.2.34: Elastica producida por el tercer desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_3]^t = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

d. $D=e_4$



Figura 5.2.35: Elastica producida por el cuarto desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_4]^t = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

e. $D=e_5$

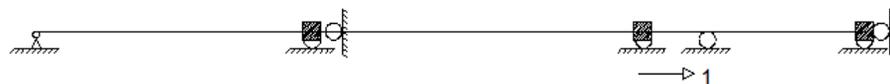


Figura 5.2.36: Elastica producida por el quinto desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_5]^t = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1]$$

f. $D=e_6$

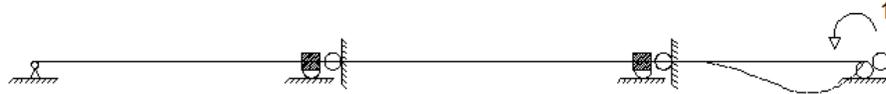


Figura 5.2.37: Elastica producida por el sexto desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_6]^t = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

g. $D=e_7$

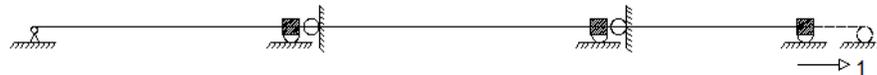


Figura 5.2.38: Elastica producida por el séptimo desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.3)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_7]^t = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Por lo tanto, ordenando cada uno de los vectores desplazamientos obtenidos, en una matriz, obtenemos la matriz de desplazamiento-deformación $[A]$.

$$[A]= \begin{matrix} & \begin{matrix} D=e_1 & D=e_2 & D=e_3 & D=e_4 & D=e_5 & D=e_6 & D=e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} d \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matriz de fuerza-carga

- Matriz [A]^t

Esta matriz se define como aquella que transforma las fuerzas en los extremos de los miembros de una estructura en cargas aplicadas en las juntas.

No es más que la transpuesta de la matriz de desplazamiento-deformación [A], por lo tanto se representa de la siguiente manera:

$$[A]^t$$

Es importante resaltar que con la matriz [A]^t, se puede expresar el equilibrio entre las cargas [Q], y las fuerzas [q], además de la compatibilidad geométrica, como se muestra a continuación:

$$[Q] = [A]^t * [q]$$

Matriz carga-fuerza de la estructura

- Matriz [B]

La matriz carga-fuerza, conocida también como matriz [B], está relacionada con las matrices [k], [A] y [F], de la siguiente manera:

$$\text{Primera Relación: } [D] = [F] * [Q]$$

$$\text{Segunda Relación: } [d] = [A] * [D]$$

Donde, sustituyendo la primera en la segunda obtenemos:

$$[d] = [A] * [F] * [Q] \dots (1)$$

Si aplicamos un artificio matemático y multiplicamos ambos miembros de la ecuación por [k], o bien sea por la matriz deformación-fuerza, se tiene:

$$[k] * [d] = [k] * [A] * [F] * [Q] \dots (2)$$

Recordamos que la matriz deformación-fuerza de la estructura puede transformar las deformaciones de los miembros en fuerzas, y que su relación viene expresada de la siguiente manera:

Tercera relación: $[q] = [k] \cdot [d]$

Por lo tanto sustituyendo la tercera relación en (2), tenemos:

$$[q] = [k] \cdot [A] \cdot [F] \cdot [Q].$$

Si ya de ante mano conocemos que la matriz $[B]$, transforma las cargas de las juntas en las fuerzas de los extremos de los miembros, $[q] = [B] \cdot [Q]$, podemos concluir que la matriz $[B]$ viene dada por la siguiente expresión:

$$[B] = [k] \cdot [A] \cdot [F].$$

Matriz de Transformación [T]

Para poder determinar la matriz de transformación se deben establecer dos sistemas de coordenadas uno Q-D y otro Q*-D*. Para el cual se realiza el siguiente procedimiento:

1.- Se realiza uno a uno cada desplazamiento elemental del sistema de coordenadas Q*-D*.

2.- En base a los desplazamientos elementales del sistema de coordenadas Q*-D*, se determina si en el sistema de coordenadas Q-D está definido ese desplazamiento, y de ser así este tomará un valor diferente de cero en el vector deformación en estudio.

3.- Finalmente luego de haber producido todos los desplazamientos del sistema Q*-D*, se define la matriz transformación T.

Ejemplo Ilustrativo 5.2.4

Definir la matriz de transformación de la siguiente estructura:

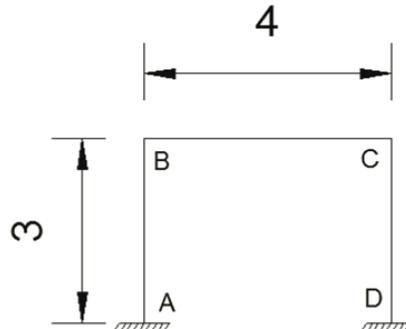


Figura 5.2.39: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Sistema de coordenadas que se le definen al sistema

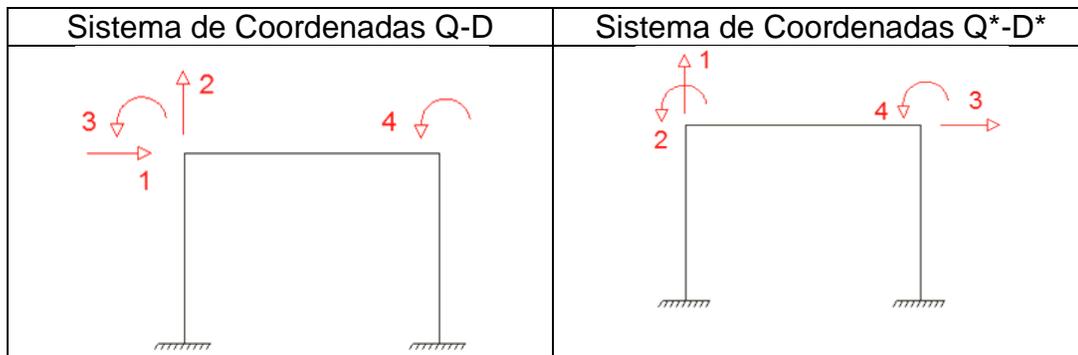


Figura 5.2.40: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Figura 5.2.41: Sistema de coordenadas Q*-D*. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

1.- Se define el primer desplazamiento elemental del sistema Q*-D*

f. $D^* = e_1$

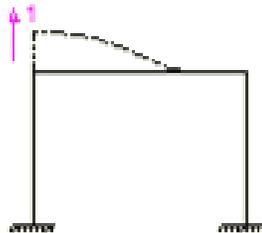


Figura 5.2.42: Elástica producida por el primer desplazamiento elemental. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Se verifica si en el sistema de coordenadas Q-D, se definió este desplazamiento elemental:

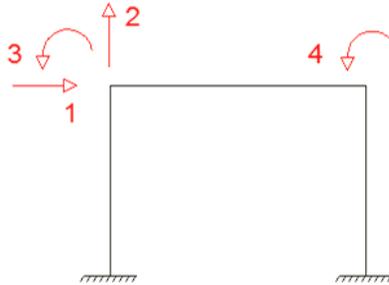


Figura 5.2.40: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejercicio Ilustrativo 5.2.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Se puede observar que el desplazamiento vertical 2 se había definido previamente en el sistema de coordenadas Q-D, por lo tanto el vector deformación del primer desplazamiento generalizado ($D^*=e_1$), se define como se muestra a continuación:

$$[d_1]^{*t} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

Este procedimiento se lleva a cabo de la misma manera para todos los desplazamientos generalizados del sistema de coordenadas Q*-D*, y finalmente se obtiene la matriz de transformación T, ordenando por columnas las deformaciones (d_i) obtenidas.

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



5.3 CALCULO MATRICIAL

Para el cálculo matricial de las estructuras indeterminadas existen dos métodos clásicos, el método de las fuerzas, donde las fuerzas en los miembros y sus deformaciones son encontradas en función de las fuerzas y cargas externas, y el método de los desplazamientos, donde se pueden expresar las deformaciones de los miembros y sus fuerzas, en términos de los desplazamientos de las juntas de la estructura. Ambos métodos para resolver estructuras indeterminadas poseen pequeñas diferencias, por lo tanto la escogencia de uno sobre el otro corresponde a la conveniencia del cálculo. Poseen ventajas y desventajas, uno con respecto al otro, sin embargo para resolver a mano se escoge aquel que proporcione rapidez de cálculo y menor esfuerzo, sin embargo con la avanzada tecnología y con el uso de computadores resulta más eficiente el método de los desplazamientos, por ser el que mejor se adapta gracias a lo repetitivo de sus pasos. A continuación se muestran algunas diferencias importantes entre el método de las fuerzas y el método de los desplazamientos:

En el método de los desplazamientos las coordenadas de análisis son las geométricas, las cuales definen el desplazamiento de las juntas, al conocer las coordenadas geométricas, se conoce también el desplazamiento de todas las juntas. Las coordenadas de análisis en el método de las fuerzas son las coordenadas estáticas, por lo tanto, la cantidad de trabajo que se realiza con este método, depende del número de componentes del desplazamiento de juntas que se quiera obtener en el análisis.

En el método de los desplazamientos las coordenadas geométricas deben ser completas e independientes para que puedan existir los estados de desplazamiento elemental y la matriz de rigidez por ello, cuando el sistema $Q-q$ es incompleto, es necesario tomar coordenadas adicionales y así poder representar el desplazamiento de todas las juntas. Por el contrario en el método de las fuerzas, ya que se trabaja con las coordenadas estáticas, las cuales deben ser suficientes para poder representar el estado de carga, es necesario que las mismas sean independientes para que puedan existir los estados de carga elemental y la matriz de flexibilidad. En una estructura estable, un sistema cualquiera de coordenadas estáticas, es siempre independiente y por ello la correspondiente matriz de flexibilidad existe. En el método de las fuerzas, al igual que en el método de los desplazamientos se puede trabajar con el sistema de coordenadas $Q-D$.



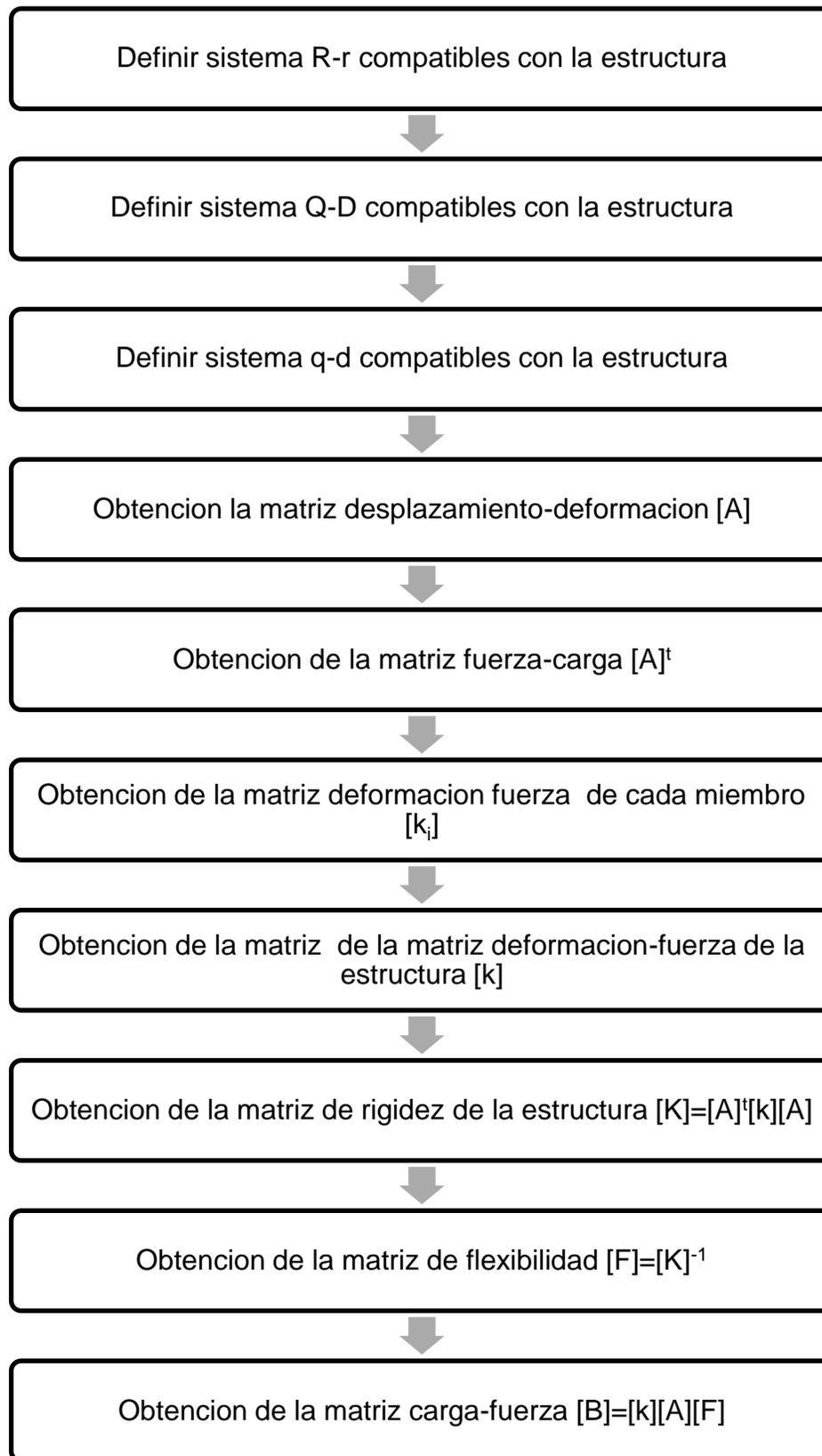
En este trabajo se hará mayor enfoque en el método de la rigidez o método de los desplazamientos, por ser este el cual tiene mayor utilidad en cuanto al análisis matricial estructural.

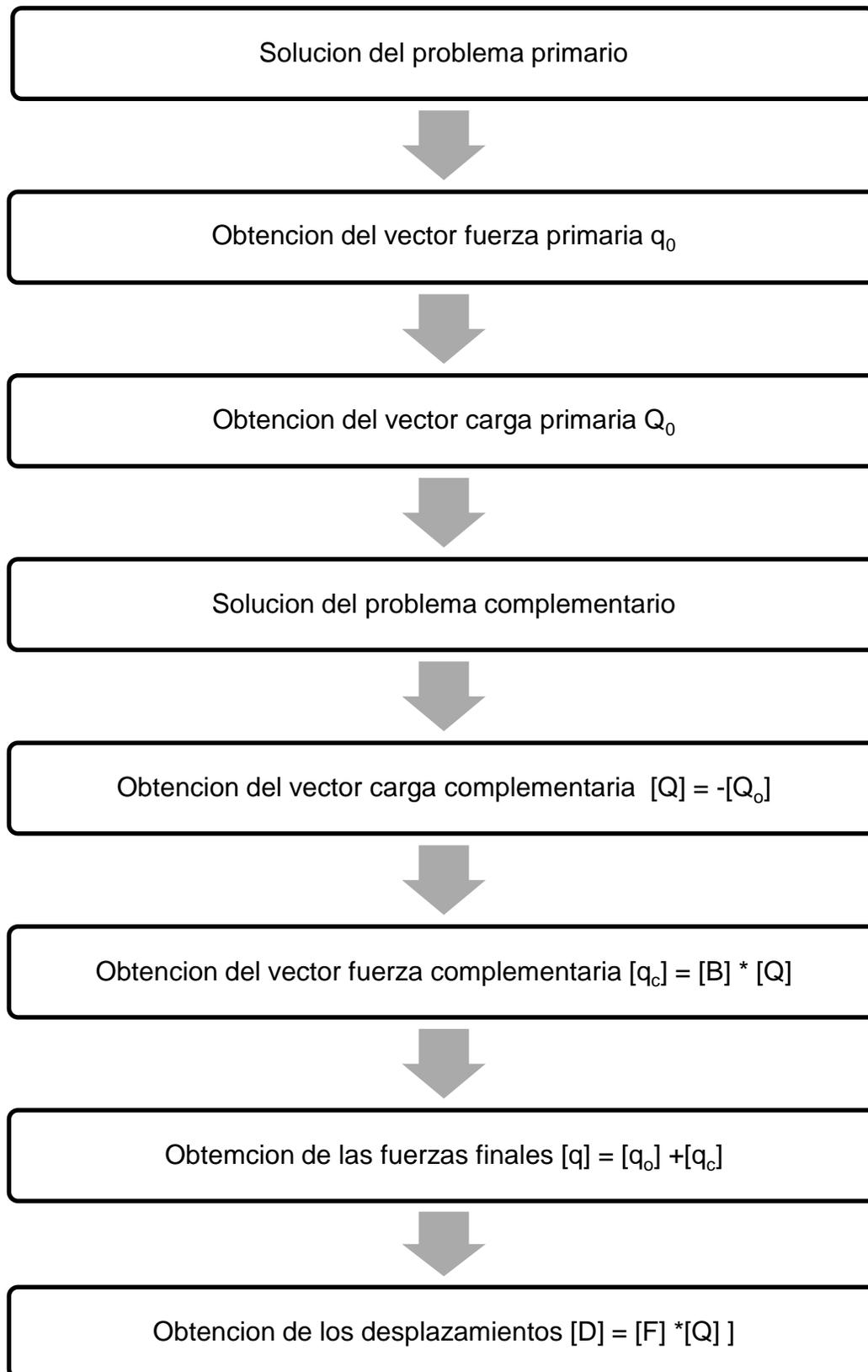
Estructuras con grado de hiperestaticidad alta. Método de los desplazamientos

El método de los desplazamientos, conocido también como método de la rigidez, es el procedimiento en el cual las ecuaciones finales a solucionar tienen como incógnita los desplazamientos en función de la rigidez del elemento. Estos desplazamientos se definen con el vector $[D]$, el cual está asociado al vector de las cargas $[Q]$.

Después de escoger el sistema Q-D se reduce la estructura a “cinemáticamente determinada”, colocando vínculos ficticios para impedir todo movimiento, puesto que las magnitudes y direcciones de los desplazamientos de las juntas bloqueadas artificialmente son las incógnitas, es necesario analizar la estructura bloqueada aplicando desplazamientos unitarios individuales en cada coordenada del vector $[D]$, esto generará fuerzas en la junta desplazada y en las contiguas a ellas. Estos valores de las fuerzas no son otra cosa que los denominados coeficientes de rigidez. Gracias a estos podremos obtener las fuerzas complementarias y las fuerzas finales para posteriormente llegar a los desplazamientos incógnitas del sistema. Además es importante resaltar que todas las fuerzas y deformaciones de los extremos de los miembros, pueden ser obtenidas una vez que los desplazamientos incógnitas sean conocidos.

Diagrama de flujo del método de los desplazamientos:





Análisis Plano

Ejemplo Ilustrativo 5.3.1

Se tiene la siguiente figura, cuya sección transversal se muestra a continuación. Aplicando la formulación matricial del método de los desplazamientos, determinar las solicitaciones de la estructura.

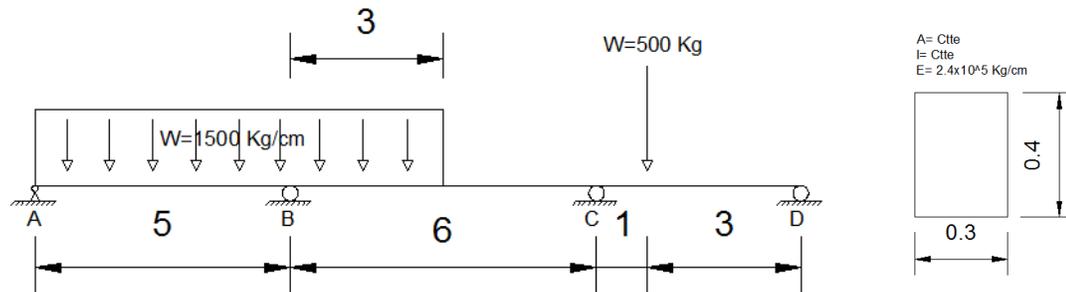


Figura 5.3.1: Sistema Estructural de tres barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

1. Determinación de los sistemas de coordenadas de la estructura

a. Sistema de Coordenadas R-r



Figura 5.3.2: Sistema de coordenadas R-r. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

b. Sistema de coordenadas Q-D



Figura 5.3.3: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

c. Sistema de Coordenadas q-d

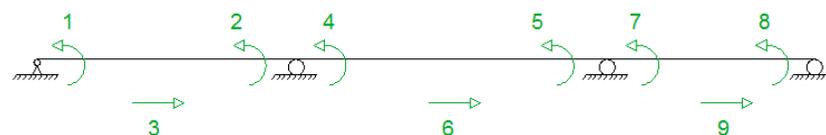


Figura 5.3.4: Sistema de coordenadas q-d. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

2. Determinación de la matriz de transformación [A]

Tomando en cuenta los posibles desplazamientos de la estructura según el sistema de coordenadas generalizadas Q-D, se libera uno a uno los desplazamientos restringiendo los demás.

a. $D=e_1$



Figura 5.3.5: Elástica producida por el primer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_1]^t = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

b. $D=e_2$

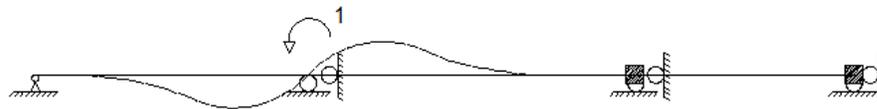


Figura 5.3.: Elástica producida por el segundo desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_2]^t = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

c. $D=e_3$

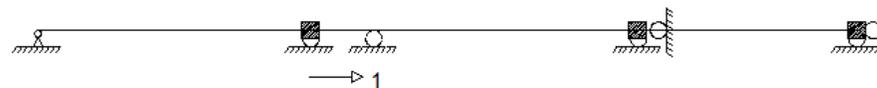


Figura 5.3.7: Elástica producida por el tercer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_3]^t = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

d. $D=e_4$



Figura 5.3.8: Elástica producida por el cuarto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_4]^t = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

e. $D=e_5$



Figura 5.3.9: Elástica producida por el quinto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_5]^t = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

f. $D=e_6$



Figura 5.3.10: Elástica producida por el sexto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_6]^t = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

g. $D=e_7$



Figura 5.3.11: Elástica producida por el séptimo desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_7]^t = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$[A]= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Determinación de la matriz de rigidez

$$[K]= [A]^t[k][A]$$

$$[A]^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el calculo de la inercia tomando en cuenta la seccion transversal tenemos:

$$I = \frac{b * h^3}{12} = \frac{30 * 40^3}{12} = 1,6x10^5 cm^4 = 1,6x10^{-3} m^4$$

Para el calculo del modulo de elasticidad tenemos:

$$E = 15100 \sqrt{F_y} = 15100 \sqrt{250} = 2,4x10^5 Kg/cm^2 = 2,4x10^9 Kg/m^2$$



Se procede al calculo de [k]

$$[k]= \begin{pmatrix} 4E_{ab}/L_{ab} & 2E_{ab}/L_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2E_{ab}/L_{ab} & 4E_{ab}/L_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AE/L_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4E_{bc}/L_{bc} & 2E_{bc}/L_{bc} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2E_{bc}/L_{bc} & 4E_{bc}/L_{bc} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L_{bc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4E_{cd}/L_{cd} & 2E_{cd}/L_{cd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2E_{cd}/L_{cd} & 4E_{cd}/L_{cd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L_{cd} \end{pmatrix}$$

$$[k]= \begin{pmatrix} 3,04E+06 & 1,52E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,52E+06 & 3,04E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,71E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,52E+06 & 1,27E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,27E+06 & 2,52E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,76E+07 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,81E+06 & 1,90E+06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,90E+06 & 3,81E+06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,14E+07 \end{pmatrix}$$

$$[K]= \begin{pmatrix} 3,04E+06 & 1,52E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,52E+06 & 5,56E+06 & 0 & 1,27E+06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,05E+08 & 0 & 4,76E+07 & 0 & 0 \\ 0 & 1,27E+06 & 0 & 6,33E+06 & 0 & 1,90E+06 & 0 \\ 0 & 0 & 4,76E+07 & 0 & 1,19E+08 & 0 & 7,14E+07 \\ 0 & 0 & 0 & 1,90E+06 & 0 & 3,81E+06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,14E+07 & 0 & 7,14E+07 \end{pmatrix}$$

4. Determinación de la matriz de flexibilidad

$$[F] = [K]^t$$

$$[F] = \begin{pmatrix} 3,84E-07 & -1,11E-07 & 0 & 2,62E-08 & 0 & -1,31E-08 & 0 \\ -1,11E-07 & 2,22E-07 & 0 & -5,24E-08 & 0 & 2,61E-08 & 0 \\ 0 & 0 & 1,75E-08 & 0 & 1,75E-08 & 0 & 1,75E-08 \\ 2,62E-08 & -5,24E-08 & 0 & 1,98E-07 & 0 & -9,88E-08 & 0 \\ 0 & 0 & 1,75E-08 & 0 & 3,85E-08 & 0 & 3,85E-08 \\ -1,31E-08 & 2,61E-08 & 0 & -9,88E-08 & 0 & 3,12E-07 & 0 \\ 0 & 0 & 1,75E-08 & 0 & 3,85E-08 & 0 & 5,25E-08 \end{pmatrix}$$

5. Determinación de la matriz de transformación [B] para convertir cargas [Q] en fuerzas [q]

$$[Q] \text{ en fuerzas } [q]$$

$$[B] = [k][A][F]$$

$$[B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,47E-01 & 5,07E-01 & 0 & -1,20E-01 & 0 & 5,96E-02 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2,47E-01 & 4,93E-01 & 0 & 1,20E-01 & 0 & -5,96E-02 & 0 \\ -7,50E-02 & 1,50E-01 & 0 & 4,33E-01 & 0 & -2,16E-01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 7,50E-02 & -1,50E-01 & 0 & 5,67E-01 & 0 & 2,16E-01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2,22E-16 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Problema primario

a. Determinación del vector fuerza primaria [q₀]

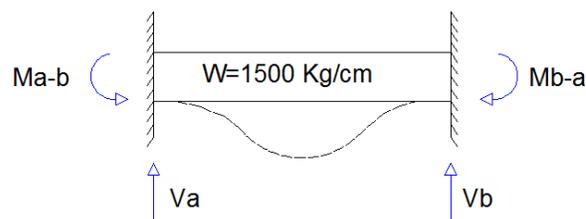


Figura 5.3.12: Carga distribuida sobre la barra AB. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejias & Ramos (2011)

$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{q L^2}{2} = \frac{1500 * 5^2}{2} = 3125 \text{ Kg} - m$$

$$V_A = V_B = \frac{q}{2} = \frac{1500}{2} = 750 \text{ Kg}$$

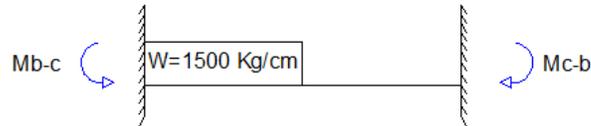


Figura 5.3.13: Carga distribuida sobre la barra BC. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$M_{BC} = \frac{11 q L^2}{192} = \frac{11 * 1500 * 6^2}{192} = 3093,75 \text{ Kg} - m$$

$$M_{CB} = \frac{5 q L^2}{192} = \frac{5 * 1500 * 6^2}{192} = 1406,25 \text{ Kg} - m$$

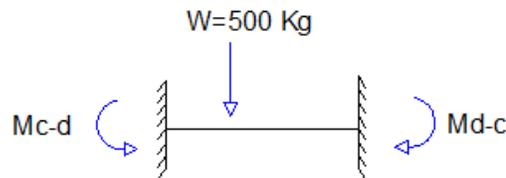


Figura 5.3.14: Carga puntual sobre la barra CD. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$M_{CD} = \frac{q a b^2}{L^2} = \frac{1500 * 1 * 3^2}{4^2} = 281,25 \text{ Kg} - m$$

$$M_{DC} = \frac{q a^2 b}{L^2} = \frac{1500 * 1^2 * 3}{4^2} = 93,75 \text{ Kg} - m$$

$$[q_0] = \begin{pmatrix} 3125 \\ -3125 \\ 0 \\ 3093,75 \\ -1406,25 \\ 0 \\ 281,25 \\ -93,75 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. Determinación del vector carga primaria $[Q_0]$

Sistema de Carga



Figura 5.3.15: Sistema de cargas sobre toda la estructura. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Realizando trabajo virtual para cada desplazamiento
 $\sum TV=0$

- $D=e_1$



Figura 5.3.16: Trabajo virtual para el primer desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$Q_{01} * 1 + 3125 * 1 = 0 \rightarrow Q_{01} = -3125$$

- $D=e_2$

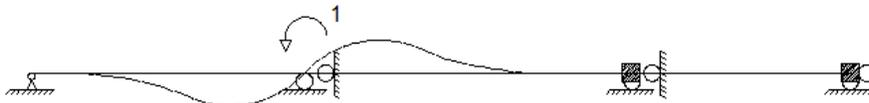


Figura 5.3.17: Trabajo virtual para el segundo desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$Q_{02} * 1 - 3125 * 1 + 3093,75 * 1 = 0 \rightarrow Q_{02} = -3125$$

- $D=e_3$



Figura 5.3.18: Trabajo virtual para el tercer desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$Q_{03} * 1 = 0 \rightarrow Q_{03} = 0$$

- $D=e_4 \rightarrow$

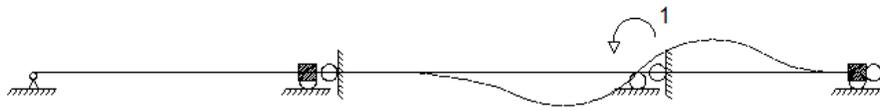


Figura 5.3.19: Trabajo virtual para el cuarto desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$Q_{04} * 1 + 281,25 * 1 - 1406,25 * 1 = 0 \rightarrow Q_{04} = 1125$$

- $D=e_5 \rightarrow$



Figura 5.3.20: Trabajo virtual para el quinto desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$Q_{05} * 1 = 0 \rightarrow Q_{05} = -3125$$

- $D=e_6$

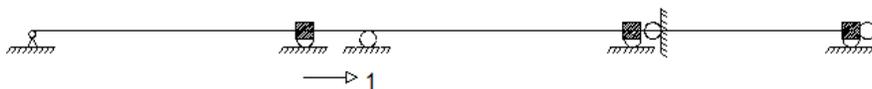


Figura 5.3.21: Trabajo virtual para el sexto desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$Q_{06} * 1 - 93,75 * 1 = 0 \rightarrow Q_{06} = 93,75$$

- $D=e_7$



Figura 5.3.22: Trabajo virtual para el séptimo desplazamiento. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$Q_{07} * 1 = 0 \rightarrow Q_{07} = 0$$

$$[Q_0] = \begin{pmatrix} -3125 \\ 31,25 \\ 0 \\ 1125 \\ 0 \\ 93,75 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. Determinación de [Q]

$$[Q] = -[Q_0]$$

$$[Q] = \begin{pmatrix} 3125 \\ -31,25 \\ 0 \\ -1125 \\ 0 \\ -93,75 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8. Problema Complementario

- a. Determinación de las solicitaciones por desplazamientos en juntas

$$[q_c] = [B] * [Q]$$

$$[q_c] = \begin{pmatrix} 3125 \\ 883,9542 \\ 0 \\ -915,204 \\ -705,825 \\ 0 \\ -419,175 \\ -93,75 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9. Determinación de las solicitaciones totales

$$[q] = [q_o] + [q_c]$$

$$[q] = \begin{pmatrix} 6250 \\ -2241,05 \\ 0 \\ 2178,546 \\ -2112,08 \\ 0 \\ -137,925 \\ -187,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

10. Si es de interés

$$[D] = [F] * [Q]$$

$$[D] = \begin{pmatrix} 1,18E-03 \\ -2,98E-04 \\ 0 \\ -1,30E-04 \\ 0 \\ 4,03E-05 \\ 0 \end{pmatrix}$$

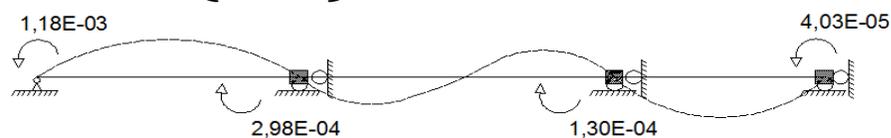


Figura 5.3.23: Desplazamientos finales sobre la estructura. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.1)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Ejercicios propuestos

Se tiene la siguiente figura, cuya sección transversal se muestra a continuación. Aplicando la formulación matricial del método de los desplazamientos, determinar las solicitaciones de la estructura.

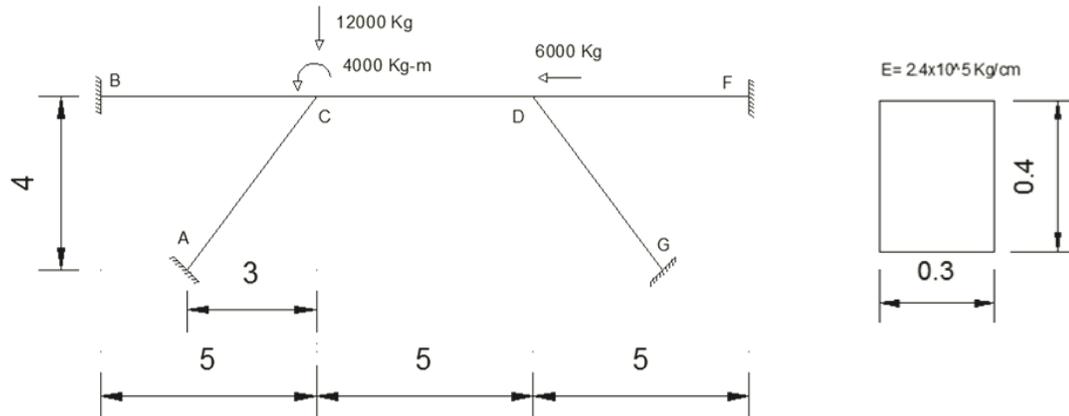


Figura 5.3.24: Sistema estructural de cinco barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Elemento	A	I
AC, Bc	A_0	I_0
CD	$2 A_0$	$2 I_0$
DE, DF	A_0	I_0

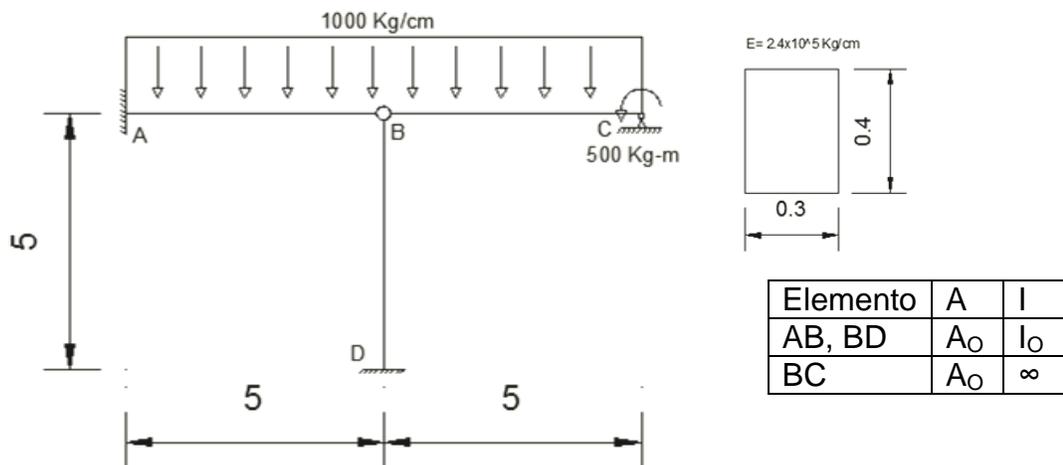


Figura 5.3.25: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

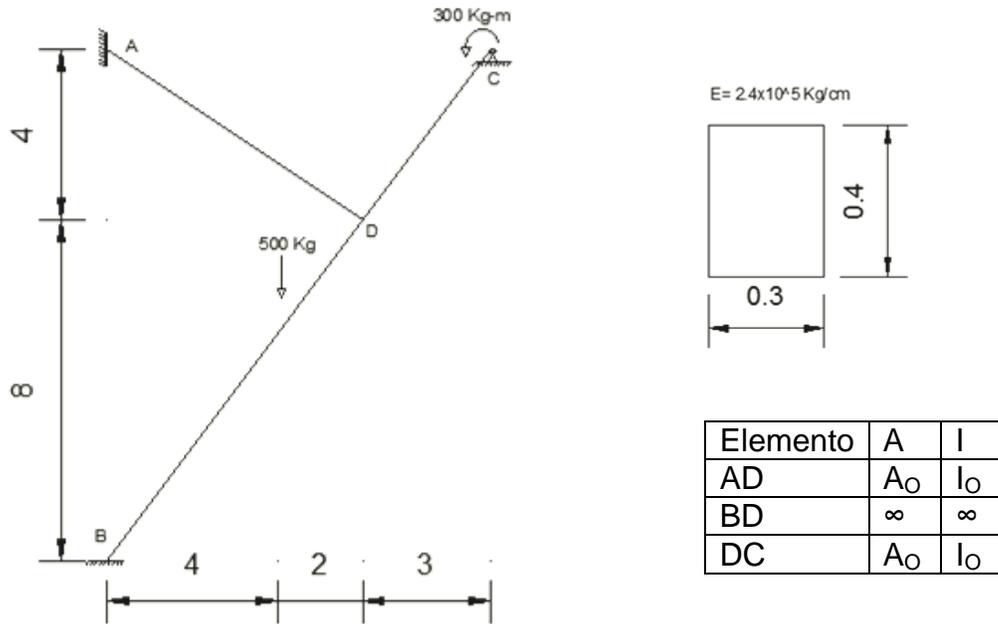


Figura 5.3.26: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

- Cosenos Directores

Es un procedimiento que se aplica generalmente para miembros inclinados, dicho miembro se debe adaptar a un sistema de coordenadas globales, ya que las componentes de este sistema son necesarias para la obtención de los parámetros del método (Δx , Δy y L).

Se llaman cosenos directores por el ángulo que forma esta con los ejes coordenados del sistema. Dichos ángulos, conocidos también como ángulos directores, son aquellos que el elemento forma con las direcciones positivas de los ejes coordenados, ellos deben ser tomados entre cero (0) y π . Si el elemento está en el espacio (sistema tridimensional), poseerá tres (3) ángulos directores α (ángulo formado con la dirección positiva del eje x); β (ángulo formado con la dirección positiva del eje y) y γ (ángulo formado con la dirección positiva del eje z).

Consideramos el siguiente elemento estructural en dos dimensiones:

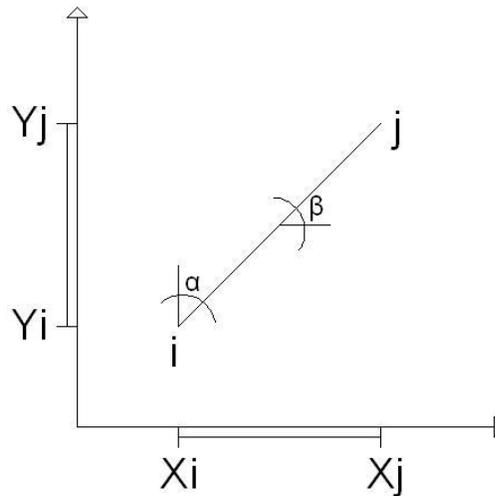


Figura 5.3.27: Sistema estructural de cinco barras
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Según la posición que poseen, se definen los valores de cósenos directores según los ejes coordenados:

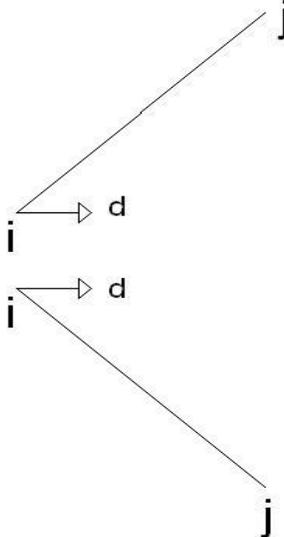
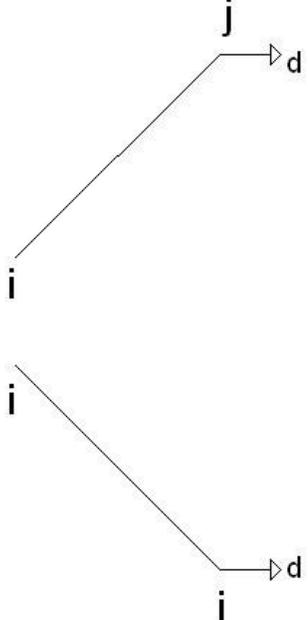
$$C_x = \cos(\alpha) = (X_j - X_i)/L$$
$$C_y = \cos(\beta) = (Y_j - Y_i)/L$$

Esta información es fundamental para el ensamblaje de la matriz de transformación A, sin embargo se hace necesario el conocimiento del signo del valor obtenido, por lo que se hace la siguiente evaluación:

1. Los desplazamientos generan compresión al estar aplicados a la izquierda del elemento.
2. Los desplazamientos generan tracción al estar aplicados a la derecha del miembro.

Por consiguiente, y para facilitar la comprensión del tema, se resumen en una tabla los diferentes esfuerzos que puedan afectar a un miembro, y el signo que le corresponde a cada coseno director:

Tabla 5.3.1: Cosenos directores
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Esfuerzo Aplicado	Figura Demostrativa	Descripción	Signo del Coseno Director
Compresión		<p>Se puede apreciar en el elemento, una compresión, por lo que la matriz de transformación A, asociado al estado de desplazamiento dado y al esfuerzo axial en el elemento debe ser negativo.</p>	$d_{ij} = -Cx$
Tracción		<p>Se puede apreciar tracción en el elemento, por lo que la matriz de transformación A, asociado al estado de desplazamiento dado y al esfuerzo axial en el elemento debe ser positivo.</p>	$d_{ij} = +Cx$

Sin esfuerzo axial		En este caso el elemento no se ve sometido a esfuerzos axiales.	$d_{ij} = 0$
--------------------	--	---	--------------

Ejemplo Ilustrativo 5.3.2

Se tiene la siguiente figura, cuya sección transversal se muestra a continuación. Aplicando la formulación matricial del método de los desplazamientos, determinar las solicitaciones de la estructura.

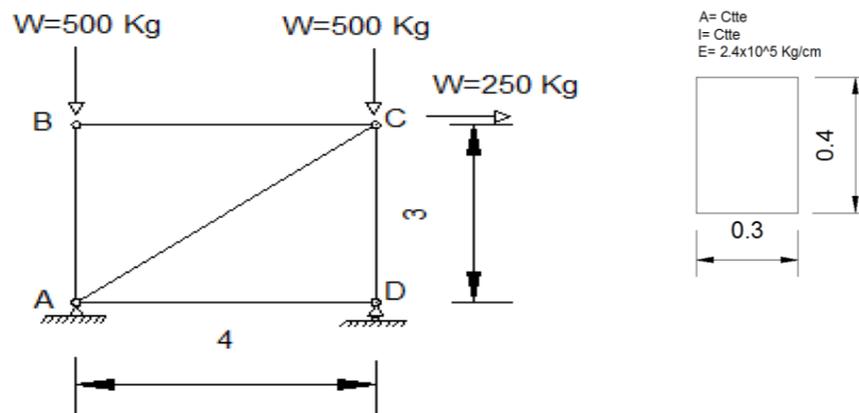


Figura 5.3.28: Sistema estructural de cinco barras. (Ejercicio Ilustrativo 5.3.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

7. Determinación de los sistemas de coordenadas de la estructura
a. Sistema de Coordenadas R-r

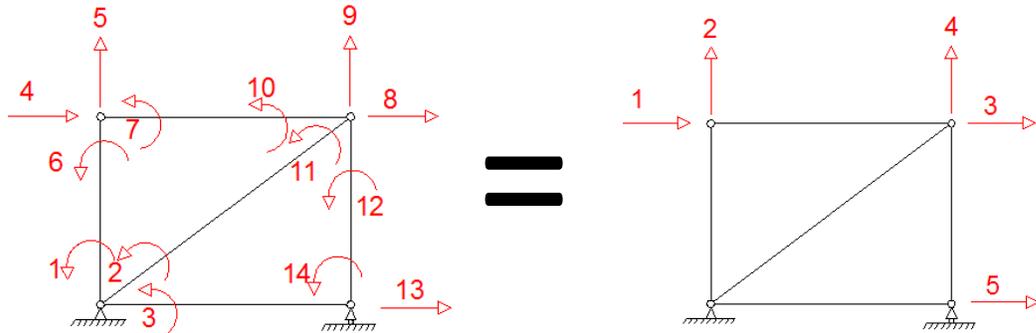


Figura 5.3.29: Sistema de coordenadas R-r. (Ejercicio Ilustrativo 5.3.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

El caso de la cercha es un caso muy particular donde todas las cargas se deben aplicar directamente en las uniones o nodos, y no en los miembros, por ello que cada cercha es un elemento sometidos a fuerzas axiales directas (tracción o compresión). La sollicitación asociada a las coordenadas rotacionales es muy pequeña respecto a las axiales por lo que se pueden obviar, por esta razón no se definen en el sistema R-r. Debido a que no existen restricciones internas el sistema R-r es igual al sistema Q-D

b. Sistema de coordenadas Q-D

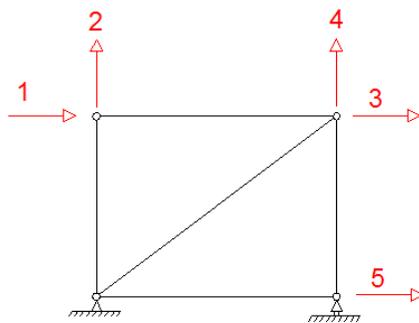


Figura 5.3.30: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejercicio Ilustrativo 5.3.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

c. Sistema de Coordenadas q-d

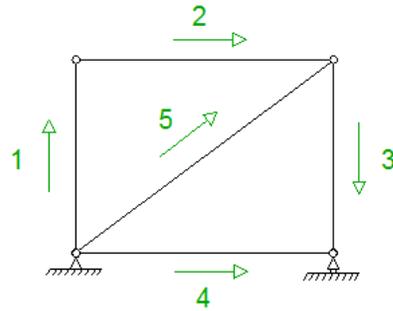


Figura 5.3.31: Sistema de coordenadas q-d. (Ejercicio Ilustrativo 5.3.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

8. Determinación de la matriz de transformación [A]

Usando los cosenos directores como herramienta para la solución de una armadura plana se tiene lo siguiente:

- Elemento #1



$$l = 3$$

$$\Delta x = 0$$

$$\Delta y = 3$$

- Elemento #2



$$l = 4$$

$$\Delta x = 4$$

$$\Delta y = 0$$

- Elemento #3



$$l = 3$$

$$\Delta x = 0$$

$$\Delta y = 3$$

9. Determinación de la matriz de rigidez

$$[K] = [A]^t [k] [A]$$

$$[A]^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el calculo de la inercia tomando en cuenta la seccion transversal tenemos:

$$I = \frac{b * h^3}{12} = \frac{30 * 40^3}{12} = 1,6x10^5 cm^4 = 1,6x10^{-3} m^4$$

Para el calculo del modulo de elasticidad tenemos:

$$E = 15100 \sqrt{F_y} = 15100 \sqrt{250} = 2,4x10^5 Kg/cm^2 = 2,4x10^9 Kg/m^2$$

Se procede al calculo de [k]

$$[k] = \begin{pmatrix} AE/L_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & AE/L_{bc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AE/L_{cd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & AE/L_{ad} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L_{ac} \end{pmatrix}$$

$$[k] = \begin{pmatrix} 9,60E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7,20E+07 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9,60E+07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7,20E+07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,76E+07 \end{pmatrix}$$

$$[K]= \begin{pmatrix} 7,20E+07 & 0 & -7,20E+07 & 0 & 0 \\ 0 & 9,60E+07 & 0 & 0 & 0 \\ -7,20E+07 & 0 & 1,09E+08 & 2,76E+07 & 0 \\ 0 & 0 & 2,76E+07 & 1,17E+08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,20E+07 \end{pmatrix}$$

10. Determinación de la matriz de flexibilidad

$$[F]= [K]^t$$

$$[F]= \begin{pmatrix} 4,69E-08 & 0 & 3,30E-08 & -7,81E-09 & 0 \\ 0 & 1,04E-08 & 0 & 0 & 0 \\ 3,30E-08 & 0 & 3,30E-08 & -7,81E-09 & 0 \\ -7,81E-09 & 0 & -7,81E-09 & 1,04E-08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,39E-08 \end{pmatrix}$$

11. Determinación de la matriz de transformación [B] para convertir cargas

[Q] en fuerzas [q]

$$[B]= [k][A][F]$$

$$[B]= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7,50E-01 & 0 & -7,50E-01 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Determinación de [Q]

$$[Q] = -[Q_o]$$

$$[Q] = \begin{pmatrix} 0 \\ -500 \\ 250 \\ -500 \\ 0 \end{pmatrix}$$

13. Problema Complementario

- a. Determinación de las solicitaciones por desplazamientos en juntas

$$[q_c] = [B] * [Q]$$

$$[q_c] = \begin{pmatrix} -500 \\ 0 \\ -687,5 \\ 0 \\ 312,5 \end{pmatrix}$$

14. Determinación de las solicitaciones totales

$$[q] = [q_o] + [q_c]$$

$$[q] = \begin{pmatrix} -500 \\ 0 \\ -687,5 \\ 0 \\ 312,5 \end{pmatrix}$$

15. Si es de interés

$$[D] = [F] * [Q]$$

$$[D] = \begin{pmatrix} 1,22E-05 \\ -5,21E-06 \\ 1,22E-05 \\ -7,16E-06 \\ 0 \end{pmatrix}$$

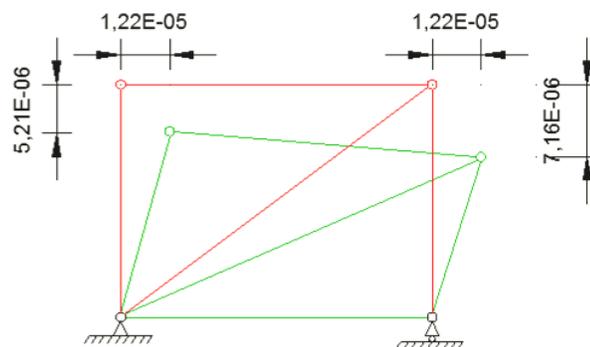


Figura 5.3.32: Desplazamientos finales sobre la estructura. (Ejercicio Ilustrativo 5.3.2)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Ejercicios propuestos

Se tiene la siguiente figura, cuya sección transversal se muestra a continuación. Aplicando la formulación matricial del método de los desplazamientos, determinar las solicitaciones de la estructura.

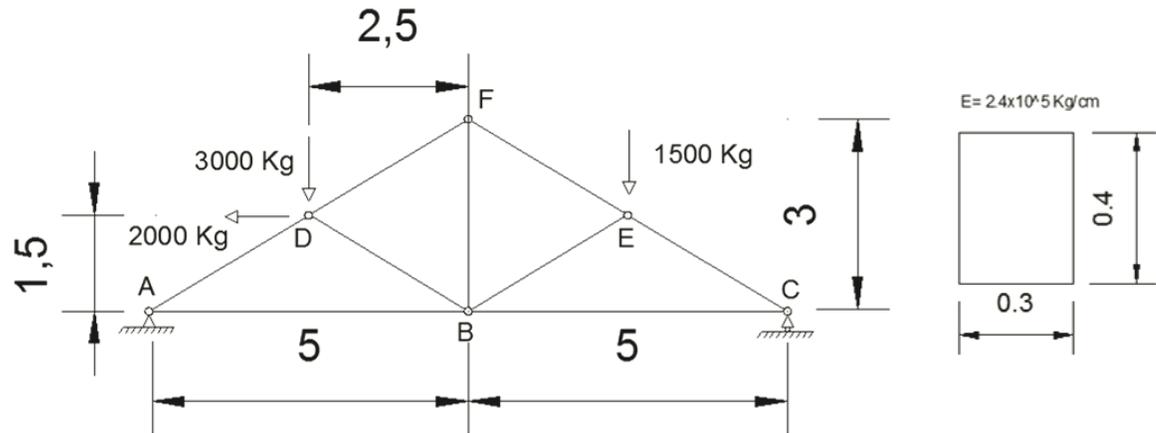


Figura 5.3.33: Sistema estructural de nueve barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Elemento	A	I
Todos	A_0	I_0

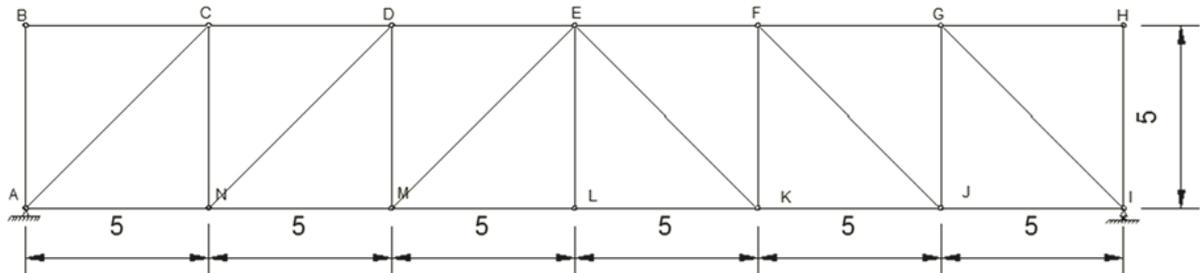
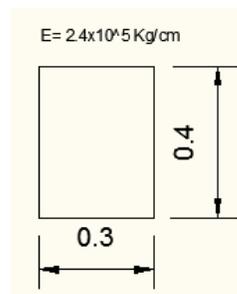


Figura 5.3.34: Sistema estructural de veinticinco barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.5)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Elemento	A	I
Todos	A_0	I_0



- Condensación de Coordenadas

En los conceptos definidos anteriormente, nos hemos enfocado en el método de los desplazamientos para la solución de los sistemas estructurales. Sin embargo existen algunas complicaciones usuales para la aplicación del método de los desplazamientos, que suelen estar asociadas a las siguientes situaciones:

- Tamaño de la estructura
- Eficiencia de la solución
- Exactitud de los resultados obtenidos.

Estas complicaciones surgen cuando la estructura posee un gran número de coordenadas generalizadas, que conlleva un análisis de la misma por partes, y puede resultar un procedimiento tedioso y complicado que castigue la eficiencia en la solución, por lo tanto el tratamiento que se le aplica a las estructuras de gran tamaño, es aplicar idealizaciones estructurales, como hacer caso omiso, suprimir o aproximar los efectos de los grados de libertad, considerar un sistema muy robusto infinitamente rígido, o despreciar deformaciones axiales, estas simplificaciones son producto de la experiencia que contenga el calculista, por lo tanto nace el concepto de Condensación o Reducción de Coordenadas para el cálculo de sistemas estructurales. El método de condensación, se refiere a la contracción o reducción en tamaño de un sistema de ecuaciones dentro del método de los desplazamientos al no tomar en cuenta ciertas coordenadas generalizadas. Este método se aplica con eficiencia cuando tan solo las cargas actuantes en las juntas y en la dirección de las coordenadas generalizadas definidas sean conocidas, caso muy usual al analizar cargas por sismo o viento, o cuando cargas en las juntas suelen ser nulas.

Básicamente la ecuación condensada está expresada en términos de un grupo de coordenadas generalizadas del sistema, las cuales junto a las coordenadas no tomadas en cuenta, comprenden el total de las coordenadas del sistema Q-D. Para definir que desplazamientos se quieren condensar o suprimir, se procede a tomar en cuenta el criterio del calculista o las exigencias que requiera el sistema estructural a resolver. Por ejemplo, la condensación de coordenadas es muy útil para resolver los ejercicios en dinámica de sistemas estructurales, y para este caso resulta conveniente tomar en cuenta solo los desplazamientos horizontales que son equivalentes a las fuerzas producidas por el viento o sismo, que representan desplazamientos muchos mas grandes que las rotaciones que se puedan presentar en el sistema, es por ello que estas últimas resultan despreciables en comparación a las primeras. Sin embargo, el punto mas importante que hay que considerar en este tema es el orden con el que se define la matriz k o matriz de rigidez condensada del sistema, ya que se deben ordenar todos

los desplazamientos que se van a considerar de primero, y luego los desplazamientos que se van a despreciar, para que al momento de condensar o reducir la matriz esta no quede desordenada y sea mas eficaz su utilización.

Supongamos que se tiene el siguiente sistema estructural:

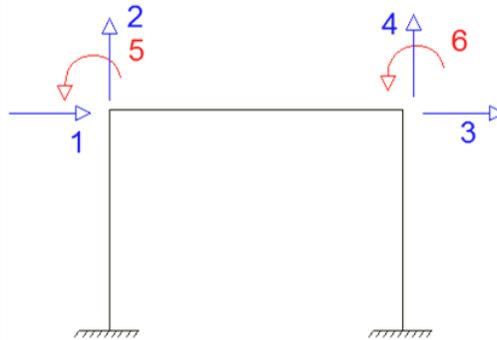


Figura 5.3.35: Sistema de coordenadas a condensar
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Donde se desea hallar la matriz de condensación asociada a las coordenadas lineales, partiendo de la siguiente ecuación $[Q]=[K][D]$ podemos obtener que para la figura mostrada anteriormente tenemos:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix}$$

Particionando las matrices:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$[P_1] = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}$$

$$[r_1] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

$$[P_2] = \begin{bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}$$

$$[r_2] = \begin{bmatrix} D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

Partiendo de la siguiente ecuación $[Q]=[K][D]$, el sistema se puede plantear en dos sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} [P_1] = [S_{11}][r_1] + [S_{12}][r_2] & (1) \\ [P_2] = [S_{21}][r_1] + [S_{22}][r_2] & (2) \end{cases}$$

Consideración estática $[P_2]=[0]$
 $[0] = [S_{21}][r_1] + [S_{22}][r_2] \quad (3)$

Despejando $[r_2]$ de la ecuación (3) tenemos:
 $[r_2] = -[S_{22}]^{-1}[S_{21}][r_1] \quad (4)$

Sustituyendo (4) en (1) obtenemos:
 $[P_1] = [S_{11}][r_1] - [S_{12}][S_{22}]^{-1}[S_{21}][r_1]$
 $[P_1] = \{ [S_{11}] - [S_{12}][S_{22}]^{-1}[S_{21}] \} [r_1]$

Donde la matriz de condensación es:
 $[K^*] = \{ [S_{11}] - [S_{12}][S_{22}]^{-1}[S_{21}] \}$

Ejemplo Ilustrativo 5.3.3

Determinar la matriz de rigidez condensada a la coordenada lateral 1 de la siguiente figura, cuya sección transversal se muestra a continuación.

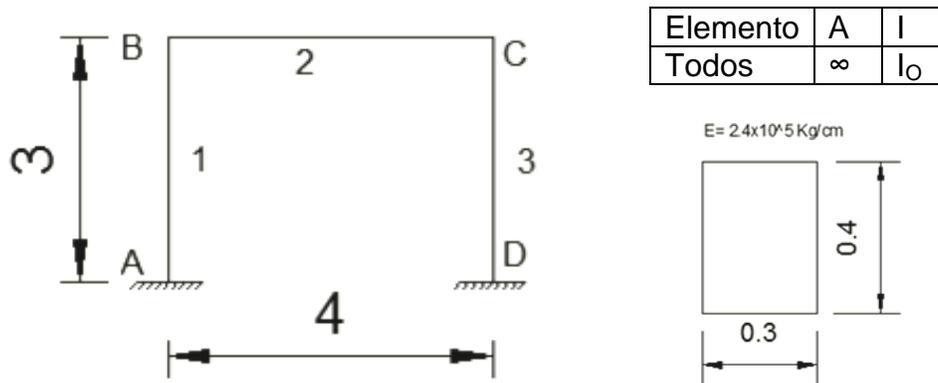


Figura 5.3.36: Sistema estructural de tres barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

1. Determinación de los sistemas de coordenadas de la estructura
 - a. Sistema de coordenadas Q-D

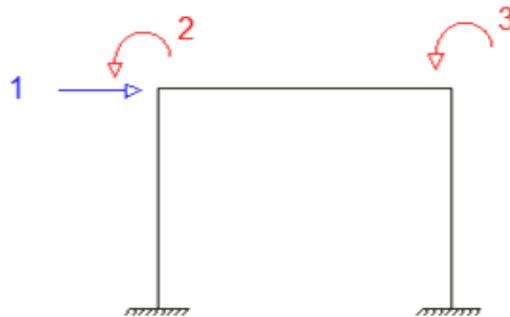


Figura 5.3.37: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

b. Sistema de Coordenadas q-d

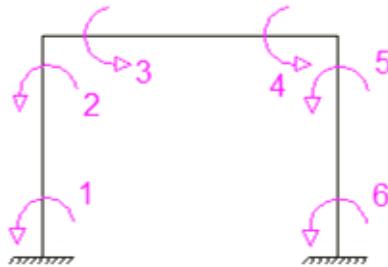


Figura 5.3.38: Sistema de coordenadas q-d. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.3)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[K] = \begin{pmatrix} 3,41E+06 & 2,56E+06 & 2,56E+06 \\ 2,56E+06 & 8,96E+06 & 1,92E+06 \\ 2,56E+06 & 1,92E+06 & 8,96E+06 \end{pmatrix}$$

Determinación de la matriz de rigidez condensada

$$[K^*] = \{ [S_{11}] - [S_{12}] [S_{22}]^{-1} [S_{21}] \}$$

$$[K^*] = \left(2,21E+06 \right)$$

Ejercicios Propuestos

Determinar la matriz de rigidez condensada a las coordenadas laterales de la siguiente figura, cuya sección transversal se muestra a continuación.

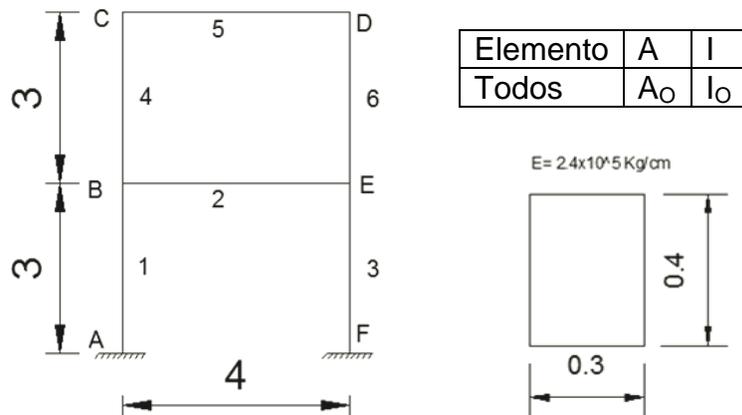


Figura 5.3.39: Sistema estructural de seis barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.6)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Determinar la matriz de rigidez condensada a las coordenadas verticales de la siguiente figura, cuya sección transversal se muestra a continuación.

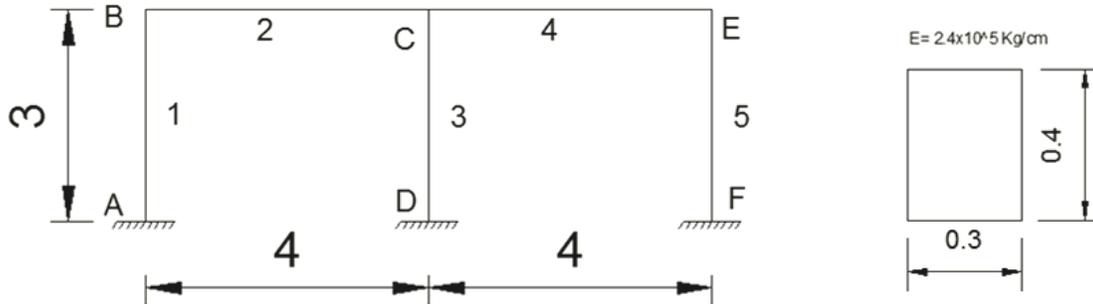


Figura 5.3.40: Sistema estructural de cinco barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.7)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Elemento	A	I
AB, CD y EF	A_0	I_0
BC y CE	∞	I_0

Determinar la matriz de rigidez condensada a las coordenadas rotacionales de la siguiente figura, cuya sección transversal se muestra a continuación.

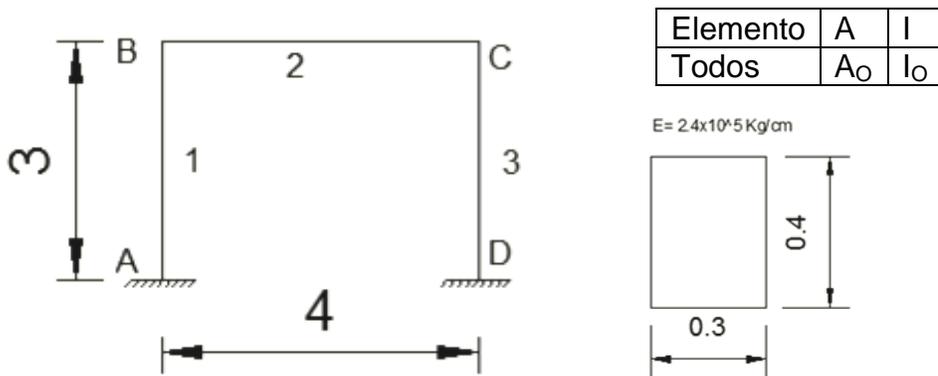


Figura 5.3.41: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.8)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

- Transformación de coordenadas

La transformación de coordenadas existe tanto para miembros o elementos como para estructuras. Es un método que nos permite determinar la matriz de rigidez y de flexibilidad de una manera más rápida y corta.

Hay dos tipos de transformaciones, una estática y otra geométrica. La estática es aquella que se define mediante una relación entre las coordenadas estáticas de ambos sistemas, mientras que la transformación geométrica se define a través de una relación entre las coordenadas geométricas de los dos sistemas. El fin de este tema es introducir el concepto de transformación de coordenadas, para generar más conocimientos e incorporar nuevos métodos para la solución de sistemas, por lo tanto solo se definirá la transformación de coordenadas en estructuras de manera geométrica como modelo para explicar este procedimiento.

Para la transformación geométrica de estructuras se debe determinar mediante el método de los desplazamientos la matriz de rigidez del sistema asociada a sus coordenadas geométricas. Esta transformación comienza con una relación entre las coordenadas geométricas del elemento, en los sistemas viejo y nuevo, de la siguiente manera:

$$q = T q^*$$

en donde T es la matriz de transformación, la cual no tiene que ser cuadrada ya que se puede tener dos sistemas de coordenadas diferentes.

Mientras que la relación entre las matrices de rigidez y las cargas generalizadas, viene dada por la siguiente expresión:

$$[K]^* = [T]^t [K] [T]$$

Ejercicio Ilustrativo 5.3.4

Se tiene la siguiente figura, cuya sección transversal se muestra a continuación. Calcular la matriz de rigidez que correspondan a las coordenadas del sistema Q*-D* haciendo uso del procedimiento de transformación de coordenadas.

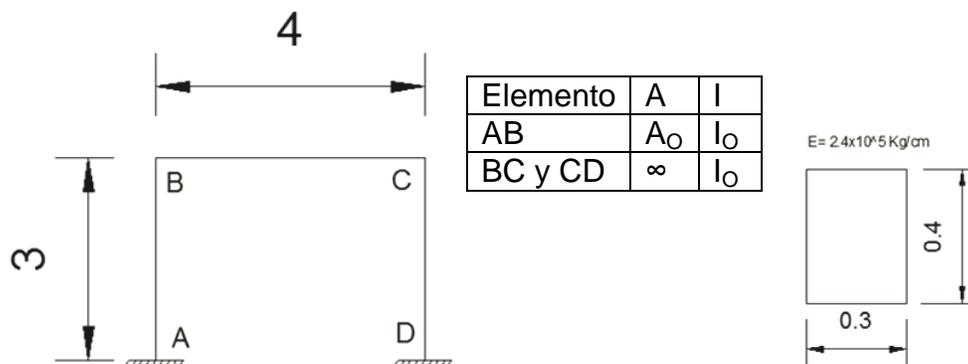


Figura 5.3.42: Sistema estructural de tres barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

1. Determinación de los sistemas de coordenadas de la estructura
 - a. Sistema de coordenadas R-r

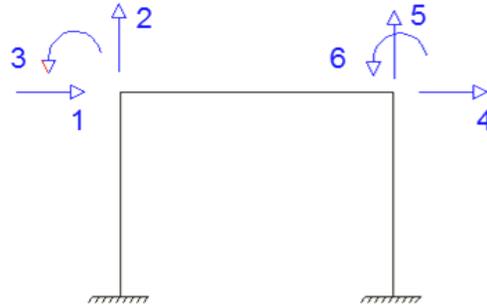


Figura 5.3.43: Sistema de coordenadas R-r. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

- b. Sistema de coordenadas Q-D

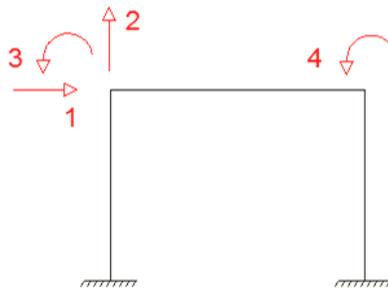


Figura 5.3.44: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[K]= \begin{pmatrix} 3,41E+06 & 0 & 2,56E+06 & 2,56E+06 \\ 0 & 9,60E+07 & 0 & 0 \\ 2,56E+06 & 0 & 8,96E+06 & 1,92E+06 \\ 2,56E+06 & 0 & 1,92E+06 & 8,96E+06 \end{pmatrix}$$

c. Sistema de coordenadas Q*-D*

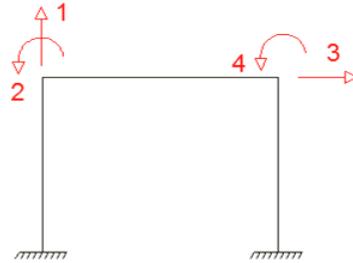


Figura 5.3.45: Sistema de coordenadas Q*-D*. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

d. Sistema de coordenadas q-d

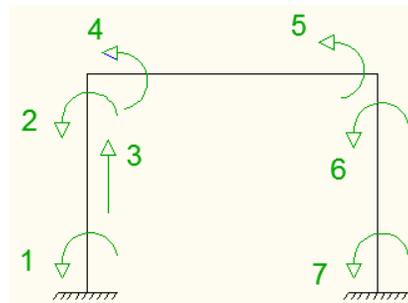
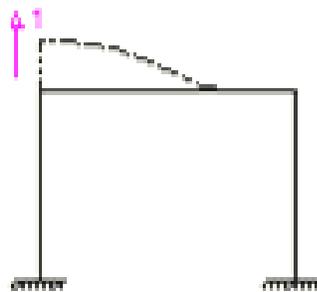


Figura 5.3.46: Sistema de coordenadas q-d. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

2. Determinación de la matriz de transformación T

Tomando los desplazamientos elementales del sistema Q*-D*, obtenemos los valores de desplazamiento en el sistema Q-D, para finalmente conseguir la matriz de transformación T.

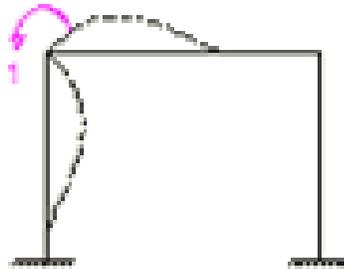
a. $D^* = e_1$



$$[d_1]^t = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

Figura 5.3.47: Elastica del primer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

b. $D^*=e_2$



$$[d_2]^{*t} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

Figura 5.3.48: Elastica del segundo desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

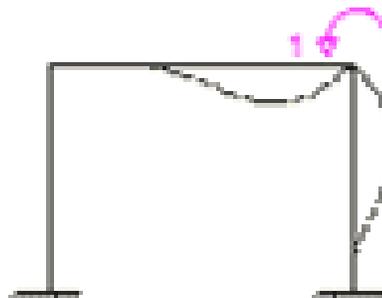
c. $D^*=e_3$



$$[d_3]^{*t} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Figura 5.3.49: Elastica del tercer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

d. $D^*=e_4$



$$[d_4]^{*t} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Figura 5.3.50: Elastica del cuarto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[T]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Determinación de la matriz de rigidez

$$[K]^*=[T]^t[K][T]$$

$$[K]=\begin{pmatrix} 9,60E+07 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8,96E+06 & 2,56E+06 & 1,92E+06 \\ 0 & 2,56E+06 & 3,41E+06 & 2,56E+06 \\ 0 & 1,92E+06 & 2,56E+06 & 8,96E+06 \end{pmatrix}$$

4. Finalmente comparando los K del Q-D con los K* del Q-D tenemos:

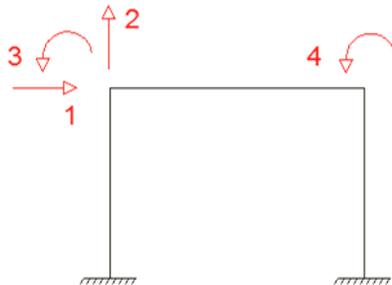
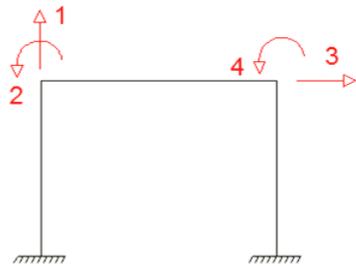


Figura 5.3.51: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[K]=\begin{pmatrix} 3,41E+08 & 0 & 2,56E+08 & 2,56E+08 \\ 0 & 9,60E+05 & 0 & 0 \\ 2,56E+08 & 0 & 8,96E+08 & 1,92E+08 \\ 2,56E+08 & 0 & 1,92E+08 & 8,96E+08 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 K_{11} &= K_{33}^* = 3,41E+08 \\
 K_{22} &= K_{11}^* = 3,41E+08 \\
 K_{33} &= K_{22}^* = 3,41E+08 \\
 K_{44} &= K_{44}^* = 3,41E+08
 \end{aligned}$$

Figura 5.3.52: Sistema de coordenadas Q*-D*. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.4)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[K] = \begin{pmatrix} 9,60E+05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8,96E+08 & 2,56E+08 & 1,92E+08 \\ 0 & 2,56E+08 & 3,41E+08 & 2,56E+08 \\ 0 & 1,92E+08 & 2,56E+08 & 8,96E+08 \end{pmatrix}$$

Ejercicios Propuestos

Se tiene la siguiente figura, cuya sección transversal se muestra a continuación. Calcular la carga generalizada y la matriz de rigidez que correspondan a las coordenadas del sistema Q*-D* haciendo uso del procedimiento de transformación de coordenadas.

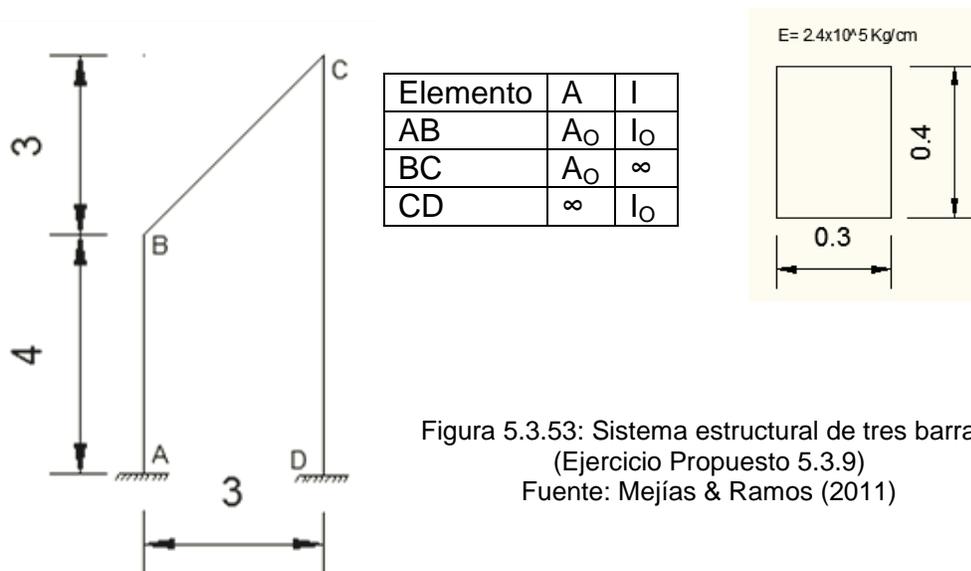


Figura 5.3.53: Sistema estructural de tres barras.

(Ejercicio Propuesto 5.3.9)

Fuente: Mejías & Ramos (2011)

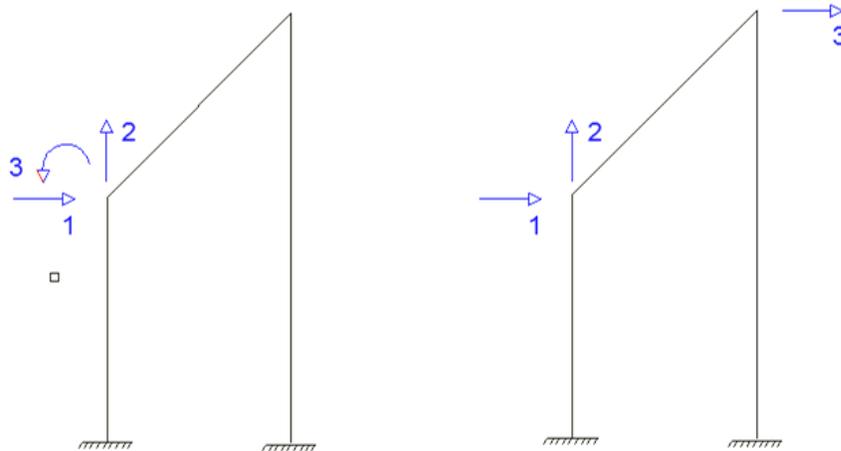
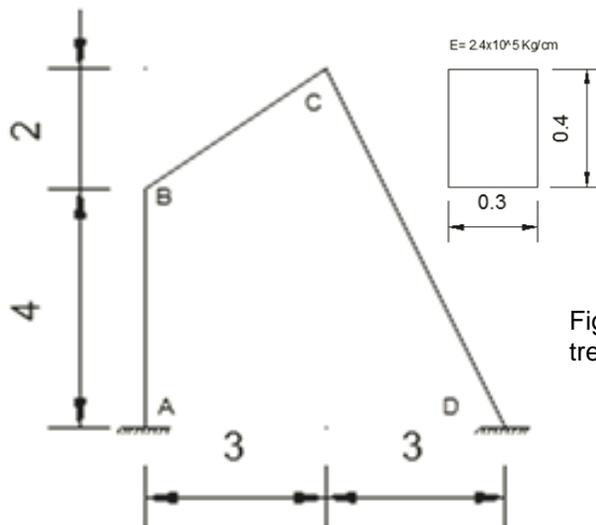


Figura 5.3.54: Sistema de coordenadas Q-D y Q*-D*. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.9)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)



Elemento	A	I
AB	A_0	I_0
BC y CD	∞	I_0

Figura 5.3.55: Sistema estructural de tres barras. (Ejercicio Propuesto 5.3.10)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

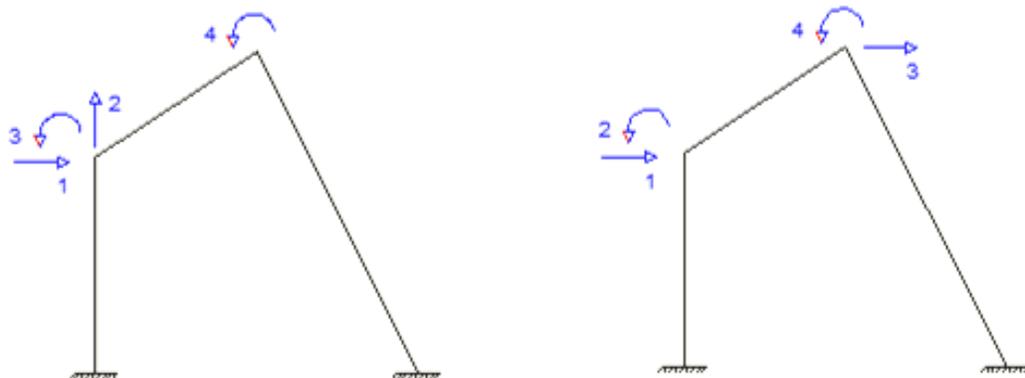


Figura 5.3.56: Sistema de coordenadas Q-D y Q*-D*. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.10)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Análisis Tridimensional

Anteriormente se ha definido una serie de conceptos para estructuras bidimensionales, por sencillez y conveniencia, sin embargo, si se analiza en detalle se puede notar que ninguno de los conceptos anteriores representa restricción alguna para realizar un análisis tridimensional, por lo tanto también son válidos. Debido a que para el análisis bidimensional de una barra sencilla solo se ha discretizado a seis grados de libertad en el plano, pudiendo tener doce en el espacio.

Para el análisis de estructuras espaciales las juntas típicas pueden experimentar traslación y rotación, cada una definida por sus tres componentes cartesianas en direcciones globales, la sollicitación de cada elemento comprende fuerzas y momentos en sus extremos, los cuales se definen en sus tres componentes tanto locales como globales. Es importante resaltar que a cada junta de una estructura tridimensional corresponden seis componentes de desplazamiento.

- Análisis de cerchas tridimensionales

En el análisis de cerchas tridimensionales las coordenadas geométricas son las componentes de traslación de las juntas. La matriz de rigidez de un elemento sollicitado solo por fuerza axial no influyen las direcciones principales de inercia de la sección transversal, por lo tanto el ángulo que forman no resulta importante y puede asignársele cualquier valor, siempre y cuando no se busque obtener las componentes del desplazamiento de los extremos de cada barra en las direcciones principales de inercia de su sección transversal.

Ejemplo Ilustrativo 5.3.5

Determinar la matriz de rigidez de la siguiente figura, cuya sección transversal se muestra a continuación.

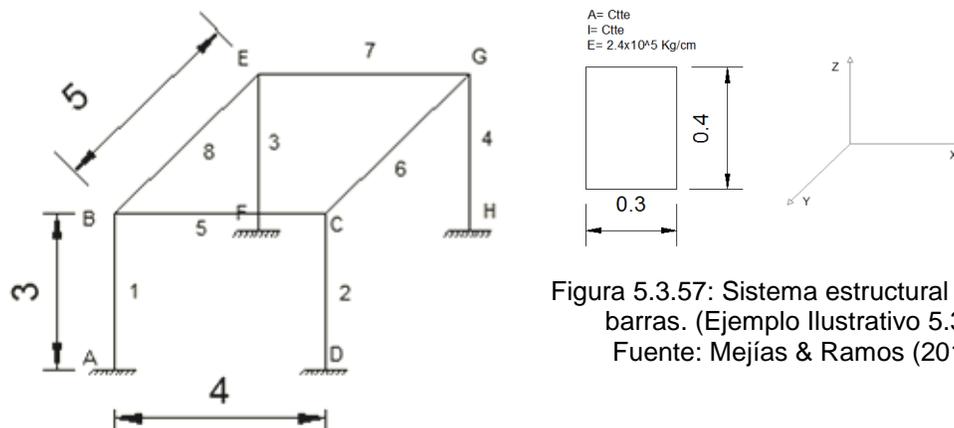


Figura 5.3.57: Sistema estructural de ocho barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.5)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

1. Determinación de los sistemas de coordenadas de la estructura
 a. Sistema de coordenadas Q-D

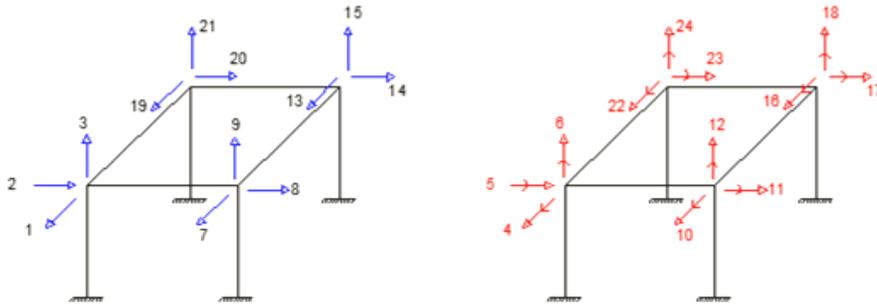


Figura 5.3.58: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.5)
 Fuente: Mejías & Ramos (2011)

b. Sistema de Coordenadas q-d

- Sistema q-d del miembro :

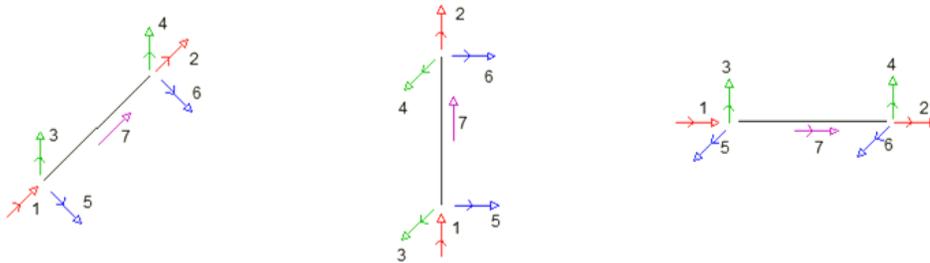


Figura 5.3.59: Sistema de coordenadas q-d del miembro. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.5)
 Fuente: Mejías & Ramos (2011)

- Sistema q-d de la estructura :

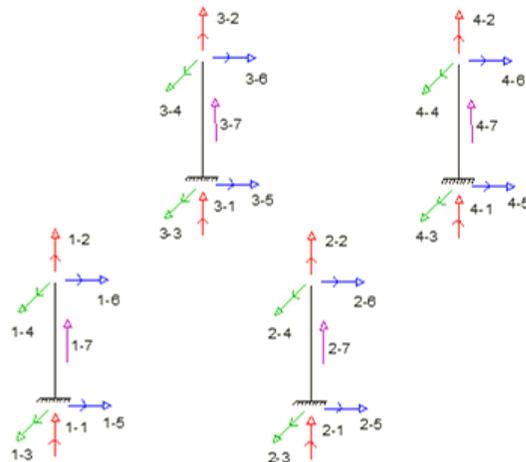


Figura 5.3.60: Sistema de coordenadas q-d de las columnas de la estructura. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.5)
 Fuente: Mejías & Ramos (2011)

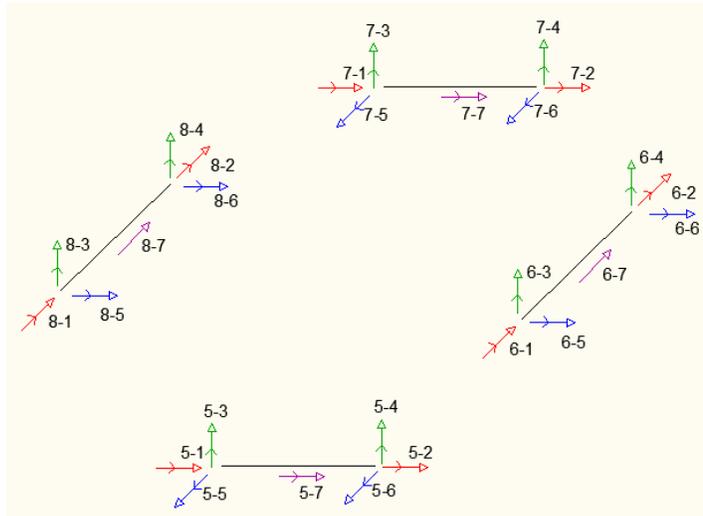
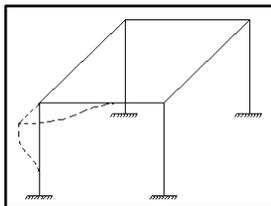


Figura 5.3.61: Sistema de coordenadas q-d de las vigas de la estructura. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.5) Fuente: Mejías & Ramos (2011)

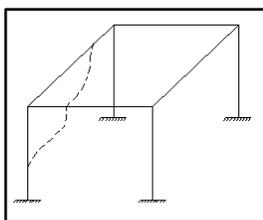
2. Determinación de la matriz de transformación [A]

a. $D=e_1$



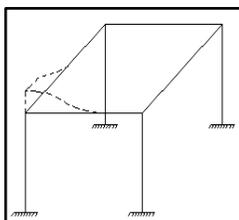
$d_{1-5} = d_{1-6} = -1/3$
 $d_{5-3} = d_{5-4} = -1/4$
 $d_{8-7} = 1$
 El resto son cero (0)

b. $D=e_2$



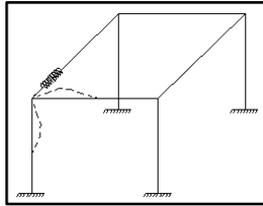
$d_{1-3} = d_{1-4} = 1/3$
 $d_{5-7} = -1$
 $d_{8-3} = d_{8-4} = -1/5$
 El resto son cero (0)

c. $D=e_3$



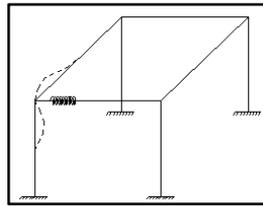
$d_{1-7} = 1$
 $d_{5-5} = d_{5-6} = 1/4$
 $d_{8-5} = d_{8-6} = 1/5$
 El resto son cero (0)

d. $D=e_4$



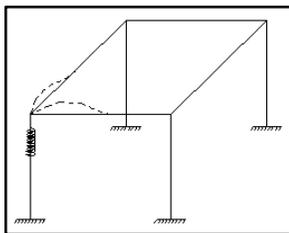
$d_{1-4} = 1$
 $d_{5-5} = 1$
 $d_{8-1} = 1$
 El resto son cero (0)

e. $D=e_5$



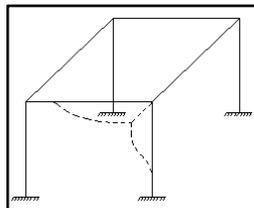
$d_{1-6} = 1$
 $d_{5-1} = 1$
 $d_{8-5} = 1$
 El resto son cero (0)

f. $D=e_6$



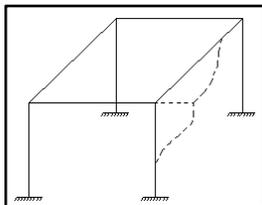
$d_{1-2} = 1$
 $d_{5-3} = 1$
 $d_{8-3} = 1$
 El resto son cero (0)

g. $D=e_7$



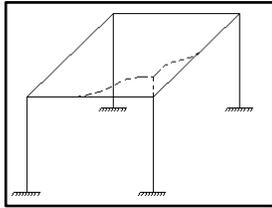
$d_{2-5} = d_{2-6} = -1/3$
 $d_{5-3} = d_{5-4} = 1/4$
 $d_{6-7} = 1$
 El resto son cero (0)

h. $D=e_8$



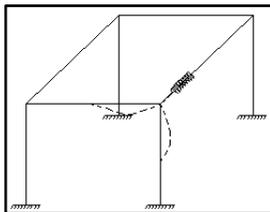
$d_{2-3} = d_{2-4} = 1/3$
 $d_{5-7} = 1$
 $d_{6-3} = d_{6-4} = -1/5$
 El resto son cero (0)

i. $D=e_9$



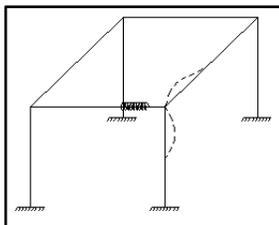
$d_{2-7} = 1$
 $d_{5-5} = d_{5-6} = -1/4$
 $d_{6-5} = d_{6-6} = 1/5$
 El resto son cero (0)

j. $D=e_{10}$



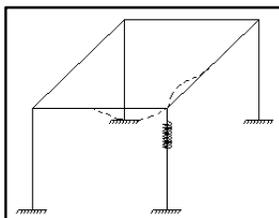
$d_{2-4} = 1$
 $d_{5-6} = 1$
 $d_{6-1} = 1$
 El resto son cero (0)

k. $D=e_{11}$



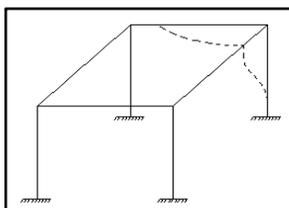
$d_{2-6} = 1$
 $d_{5-2} = 1$
 $d_{6-5} = 1$
 El resto son cero (0)

l. $D=e_{12}$



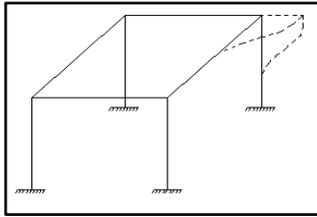
$d_{2-2} = 1$
 $d_{5-4} = 1$
 $d_{6-3} = 1$
 El resto son cero (0)

m. $D=e_{13}$



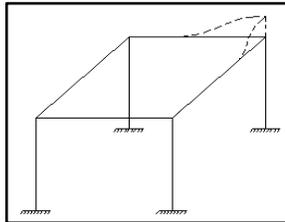
$d_{4-5} = d_{4-6} = -1/3$
 $d_{6-7} = -1$
 $d_{7-3} = d_{7-4} = 1/4$
 El resto son cero (0)

n. $D=e_{14}$



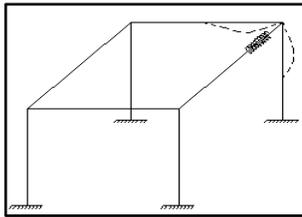
$$\begin{aligned}d_{4-3} &= d_{4-4} = 1/3 \\d_{6-3} &= d_{6-4} = 1/5 \\d_{7-7} &= 1 \\ \text{El resto son cero (0)}\end{aligned}$$

o. $D=e_{15}$



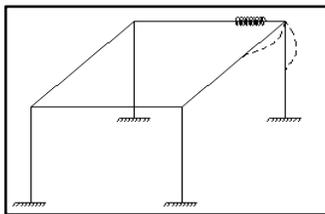
$$\begin{aligned}d_{4-7} &= 1 \\d_{6-5} &= d_{6-6} = -1/5 \\d_{7-5} &= d_{7-6} = -1/4 \\ \text{El resto son cero (0)}\end{aligned}$$

p. $D=e_{16}$



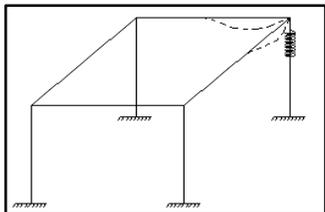
$$\begin{aligned}d_{4-4} &= 1 \\d_{6-2} &= 1 \\d_{7-6} &= 1 \\ \text{El resto son cero (0)}\end{aligned}$$

q. $D=e_{17}$



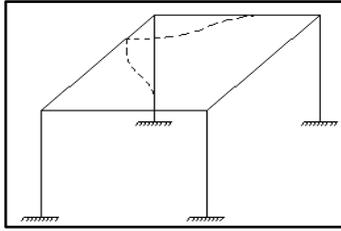
$$\begin{aligned}d_{4-6} &= 1 \\d_{6-6} &= 1 \\d_{7-2} &= 1 \\ \text{El resto son cero (0)}\end{aligned}$$

r. $D=e_{18}$



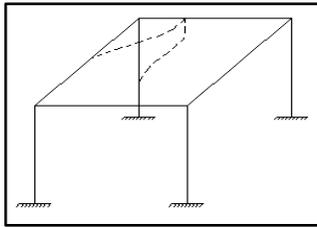
$$\begin{aligned}d_{4-2} &= 1 \\d_{6-4} &= 1 \\d_{7-4} &= 1 \\ \text{El resto son cero (0)}\end{aligned}$$

s. $D=e_{19}$



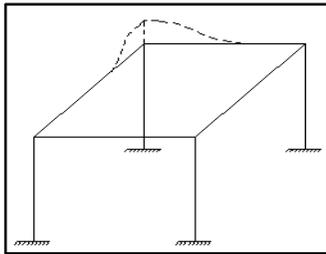
$d_{3-5} = d_{3-6} = -1/3$
 $d_{7-3} = d_{7-4} = -1/4$
 $d_{8-7} = -1$
 El resto son cero (0)

t. $D=e_{20}$



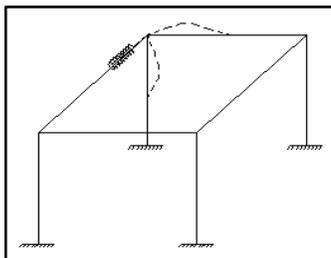
$d_{3-3} = d_{3-4} = 1/3$
 $d_{7-7} = -1$
 $d_{8-3} = d_{8-4} = 1/5$
 El resto son cero (0)

u. $D=e_{21}$



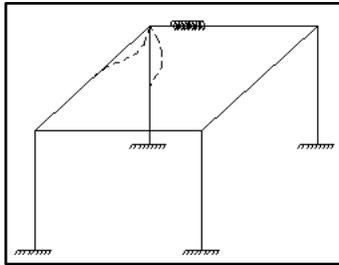
$d_{3-7} = 1$
 $d_{7-5} = d_{7-6} = 1/4$
 $d_{8-5} = d_{8-6} = -1/5$
 El resto son cero (0)

v. $D=e_{22}$



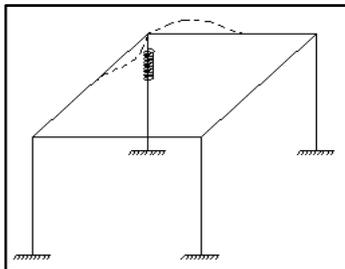
$d_{3-4} = 1$
 $d_{7-5} = 1$
 $d_{8-2} = 1$
 El resto son cero (0)

w. $D=e_{23}$



$d_{3-6} = 1$
 $d_{7-1} = 1$
 $d_{8-6} = 1$
 El resto son cero (0)

x. $D=e_{24}$



$d_{3-2} = 1$
 $d_{7-3} = 1$
 $d_{8-4} = 1$
 El resto son cero (0)

Figura 5.3.62: De a-x; elasticas del portico tridimensional. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.5)
 Fuente: Mejias & Ramos (2011)

3. Determinación de la matriz de rigidez

$$[K] = [A]^t [k] [A]$$

Para el calculo de la inercia tomando en cuenta la seccion transversal tenemos:

$$I_{33} = \frac{b * h^3}{12} = \frac{30 * 40^3}{12} = 1,6x10^5 cm^4$$

$$I_{22} = \frac{h * b^3}{12} = \frac{40 * 30^3}{12} = 9,0x10^4 cm^4$$

$$I_{11} = J_{11} = I_{22} + I_{33} = 1,6x10^5 + 9,0x10^4 = 2,5x10^5 cm^4$$

Para el calculo del modulo de elasticidad tenemos:

$$E = 15100\sqrt{F_y} = 15100\sqrt{250} = 2,4x10^5 Kg/cm^2$$

Se procede al calculo de $[k_i]$

$$[k_i] = \begin{pmatrix} [k_{11}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [k_{22}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [k_{33}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [k_{44}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [k_{55}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [k_{66}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [k_{77}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} [k_{11}] = [k_{22}] = \\ [k_{33}] = [k_{44}] = \end{matrix} \begin{pmatrix} J_{11}G/L_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{11}G/L_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EI_{22}/L_v & 2EI_{22}/L_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2EI_{22}/L_v & 4EI_{22}/L_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_{33}/L_v & 2EI_{33}/L_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2EI_{33}/L_v & 4EI_{33}/L_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} [k_{11}] = \\ [k_{22}] = \\ [k_{33}] = \\ [k_{44}] = \end{matrix} \begin{pmatrix} 8,33E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8,33E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,59E+13 & 1,30E+13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,30E+13 & 2,59E+13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,61E+13 & 2,30E+13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,30E+13 & 4,61E+13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9,60E+05 \end{pmatrix}$$



$$\begin{matrix} [k_{55}] = \\ [k_{77}] = \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccccc} J_{11}G/L_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{11}G/L_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EI_{22}/L_h & 2EI_{22}/L_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2EI_{22}/L_h & 4EI_{22}/L_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_{33}/L_h & 2EI_{33}/L_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2EI_{33}/L_h & 4EI_{33}/L_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L_h \end{array} \right)$$

$$\begin{matrix} [k_{55}] = \\ [k_{77}] = \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccccc} 6,25E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,25E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,46E+13 & 1,73E+13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,73E+13 & 3,46E+13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6,14E+13 & 3,07E+13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,07E+13 & 6,14E+13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,20E+05 \end{array} \right)$$

$$\begin{matrix} [k_{66}] = \\ [k_{88}] = \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccccc} J_{11}G/L_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{11}G/L_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EI_{22}/L_i & 2EI_{22}/L_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2EI_{22}/L_i & 4EI_{22}/L_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_{33}/L_i & 2EI_{33}/L_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2EI_{33}/L_i & 4EI_{33}/L_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L_i \end{array} \right)$$

$$\begin{matrix} [k_{66}] = \\ [k_{88}] = \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccccc} 5,00E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,00E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,32E+13 & 2,16E+13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,16E+13 & 4,32E+13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,68E+13 & 3,84E+13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,84E+13 & 7,68E+13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,76E+05 \end{array} \right)$$

Ejemplo Ilustrativo 5.3.6

Se tiene la siguiente figura, cuya sección transversal se muestra a continuación. Aplicando la formulación matricial, determinar la matriz de rigidez.

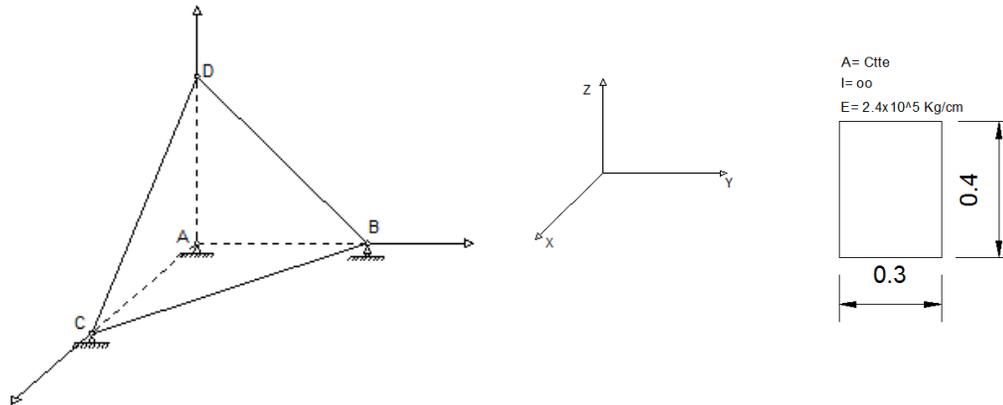


Figura 5.3.63: Sistema estructural de seis barras. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$A(0,0,0)$; $B(0,4,0)$; $C(3,0,0)$; $D(0,0,4)$
 $\overline{AB}= 4\text{m}$; $\overline{AC}= 3\text{m}$; $\overline{BC}= 5\text{m}$; $\overline{AD}= 4\text{m}$; $\overline{DB}= 5,66\text{m}$; $\overline{DC}=5\text{m}$

1. Determinación de los sistemas de coordenadas de la estructura
 - a. Sistema de Coordenadas R-r

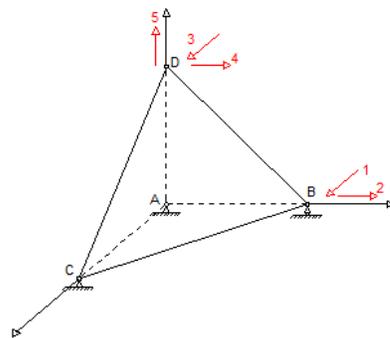


Figura 5.3.64: Sistema de coordenadas R-r. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

El caso de la cercha es un caso muy particular donde todas las cargas se deben aplicar directamente en las uniones o nodos, y no en los miembros, por ello que cada cercha es un elemento sometidos a fuerzas axiales directas (tracción o compresión). La sollicitación asociada a las coordenadas rotacionales es muy pequeña respecto a las axiales por lo que se pueden

obviar, por esta razón no se definen en el sistema R-r. Debido a que no existen restricciones internas el sistema R-r es igual al sistema Q-D

b. Sistema de coordenadas Q-D

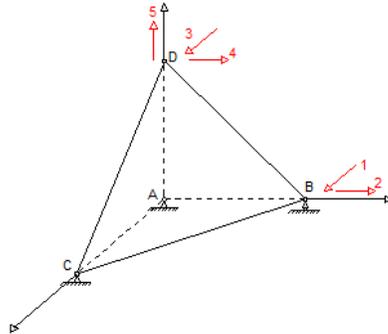


Figura 5.3.65: Sistema de coordenadas Q-D. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

c. Sistema de Coordenadas q-d

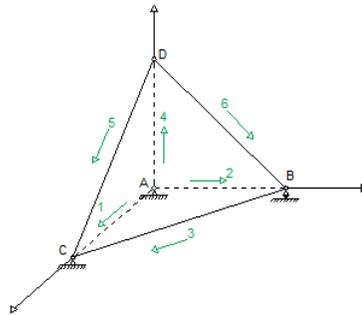


Figura 5.3.66: Sistema de coordenadas q-d. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

2. Determinación de la matriz de transformación [A]

Usando los cosenos directores como herramienta para la solución de una armadura plana se tiene lo siguiente:

Tabla 5.3.3: Resumen de C_x , C_y y C_z . (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

Elemento	L	Δx	Δy	Δz	C_x	C_y	C_z
AC	3	3	0	0	1	0	0
AB	4	0	4	0	0	1	0
BC	5	3	4	0	0,6	0,8	0
AD	4	0	0	4	0	0	1
DC	5	3	0	4	0,60	0	0,8
DB	5,66	0	4	4	0	0,71	0,71

f) $D=e_1$

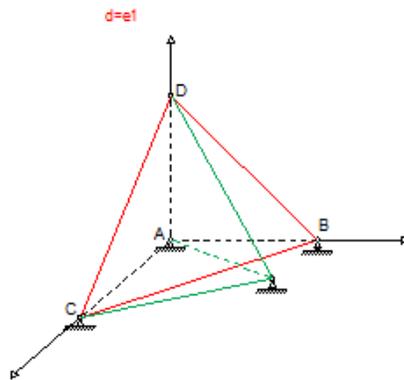


Figura 5.3.67: Elastica del primer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_1]^t = [0 \quad 0 \quad 0,6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

g) $D=e_2$

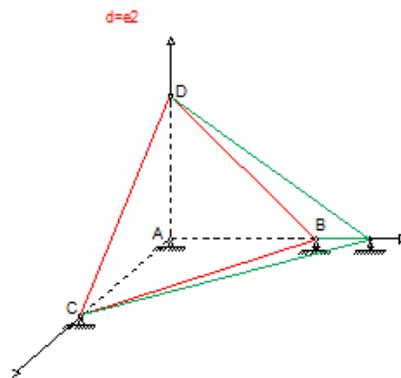


Figura 5.3.68: Elastica del segundo desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_2]^t = [0 \quad 1 \quad 0,8 \quad 0 \quad 0 \quad 0,71]$$

h) $D=e_3$

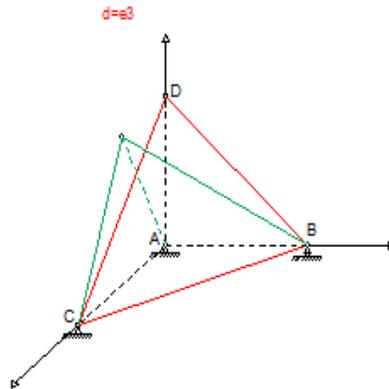


Figura 5.3.69: Elastica del tercer desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_3]^t = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -0,6 \quad 0]$$

i) $D=e_4$

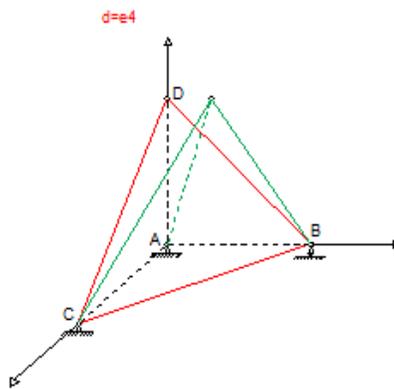


Figura 5.3.70: Elastica del cuarto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_4]^t = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -0,71]$$

j) $D=e_5$

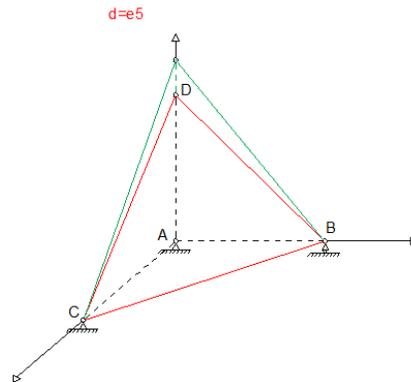


Figura 5.3.71: Elastica del quinto desplazamiento elemental. (Ejemplo Ilustrativo 5.3.6)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

$$[d_5]^t = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0,8 \quad 0,71]$$

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0,71 & 0 & -0,71 & 0,71 \end{pmatrix}$$

3. Determinación de la matriz de rigidez

$$[K] = [A]^t [k] [A]$$

$$[A]^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,8 & 0 & 0 & 0,71 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,71 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,8 & 0,71 \end{pmatrix}$$

Para el calculo de la inercia tomando en cuenta la seccion transversal tenemos:

$$I = \frac{b * h^3}{12} = \frac{30 * 40^3}{12} = 1,6x10^5 cm^4 = 1,6x10^{-3} m^4$$

Para el calculo del modulo de elasticidad tenemos:

$$E = 15100\sqrt{F_y} = 15100\sqrt{250} = 2,4x10^5 Kg/cm^2 = 2,4x10^9 Kg/m^2$$

Se procede al calculo de [k]

$$[k]= \begin{pmatrix} AE/Lac & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & AE/Lab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AE/Lcb & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & AE/Ldb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & AE/Ldc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L \end{pmatrix}$$

$$[k]= \begin{pmatrix} 9,60E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7,20E+07 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,76E+07 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7,20E+07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,76E+07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,09E+07 \end{pmatrix}$$

$$[K]= \begin{pmatrix} 2,07E+07 & 2,76E+07 & 0 & 0 & 0 \\ 2,76E+07 & 1,35E+08 & 0 & -2,57E+07 & 2,57E+07 \\ 0 & 0 & 2,07E+07 & 0 & -2,76E+07 \\ 0 & -2,57E+07 & 0 & 2,57E+07 & -2,57E+07 \\ 0 & 2,57E+07 & -2,76E+07 & -2,57E+07 & 1,35E+08 \end{pmatrix}$$



5.4 DINAMICA DE ESTRUCTURAS

Nociones Básicas de Dinámica Estructural

- Generalidades

Los códigos sísmicos proporcionan la información para el diseño de estructuras sismorresistente, presentando métodos de cálculo e información que determine la respuesta estructural de acuerdo a las condiciones geotécnicas y sísmicas presentadas en la zona donde se proyecte la edificación. En este tópico se explica brevemente los conceptos y fundamentos básicos para el análisis dinámico de edificios, en los que se fundan los métodos dinámicos de diseño sísmico estipulados en la mayoría de los códigos modernos de construcción. Estos fundamentos de análisis dinámico son aplicados a modelos matemáticos que proporcionen una solución al problema de ingeniería que se desee resolver, sin embargo no siempre es posible obtener esa solución ya que en algunos casos se debe tomar en cuenta las complejas propiedades de los materiales, cargas y condiciones de borde, por lo que la ingeniería introduce simplificaciones e idealizaciones no necesariamente correctas que hacen el problema matemático más manejable, sin embargo capaces de proveer suficiente aproximación a la solución real y resultados satisfactorios desde el punto de vista de seguridad y economía.

- Dinámica de estructuras

En la dinámica de estructuras, el número de coordenadas independientes necesarias para conocer la configuración de un sistema en todo tiempo es lo que se conoce como el número de grados de libertad. En general, en estructuras continuas se pueden definir infinitos grados de libertad, sin embargo el proceso de idealización o selección de un apropiado modelo matemático, permite la reducción de los grados de libertad a un número más discreto.

Desde el punto de vista dinámico, importan los grados de libertad en los que se generan fuerzas iguales a la masa por la aceleración o momento de inercia por aceleración angular. Como se muestra en la Fig. 5.4.1, se tiene un pórtico que posee infinitos grados de libertad independientes (coordenadas independientes).

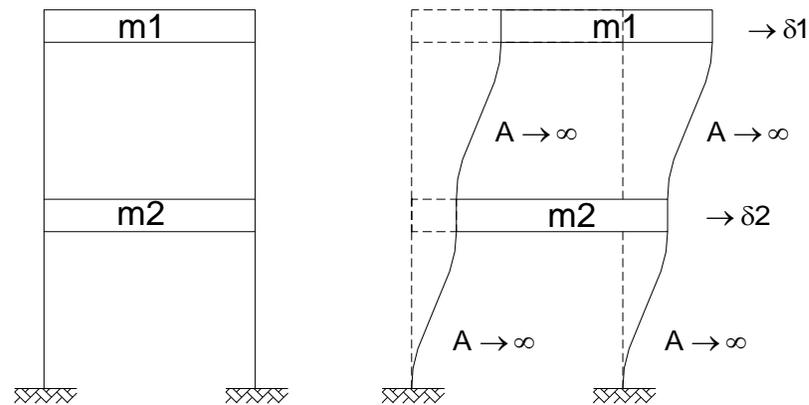


Figura 5.4.1: Grados de Libertad Dinámicos
Fuente: Freddy Lanza

Sin embargo si las fuerzas de inercia importantes son solamente las que generan las masas m_1 y m_2 al moverse lateralmente y las deformaciones de los pisos en su plano son despreciables, se tiene un sistema de dos grados de libertad dinámicos, que son los desplazamientos 1 y 2 de la Fig. 5.4.1

Para la discretización de los grados de libertad se debe asumir la hipótesis que transforma el problema de una estructura con infinitos grados de libertad concentrados en las masas de los pisos y que se restringen los grados de libertad de los pórticos estructurales a sólo un grado de libertad de movimiento horizontal.

La figura 5.4.1 presenta modelos estructurales que pueden ser representados como sistemas de un grado de libertad dinámico, los cuales muestran gran semejanza con el modelo matemático clásico de dinámica de partículas de la figura 5.4.2 con los elementos característicos:

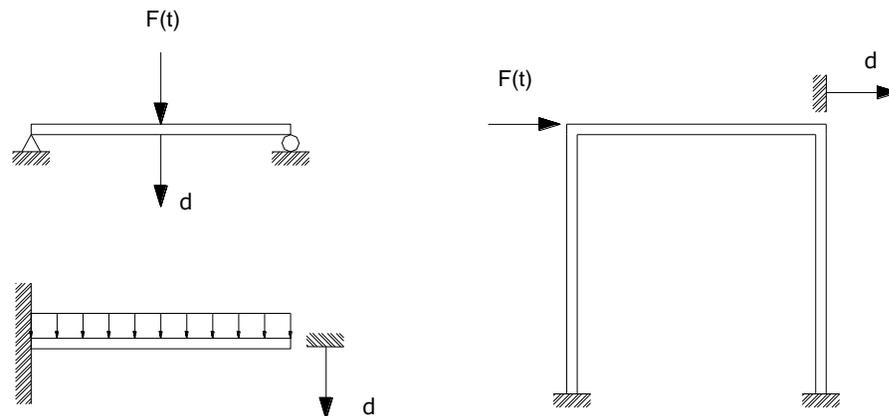


Figura 5.4.2: Modelos estructurales como Sistemas de un grado de libertad
Fuente: Freddy Lanza

- Un elemento de masa m , representando la masa e inercia característica de la estructura.
- Un elemento resorte K , representado por las fuerzas elásticas de restitución y la energía potencial en la estructura.
- Un elemento amortiguador C , representado por las características friccionantes internas y pérdida de energía de la estructura.
- Una fuerza de excitación $F(t)$ representando la fuerza externa variable en el tiempo actuando en la estructura.

Este sistema no existe en la realidad y este modelo matemático solo es una idealización conceptual de la estructura real, que puede proveer un completo y adecuado conocimiento del comportamiento del sistema real o estructura.

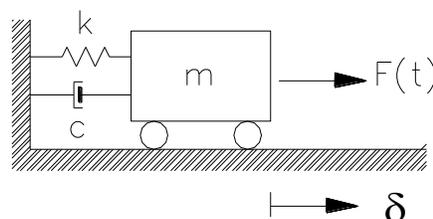


Figura 5.4.3: Modelo matemático de Sistemas con un grado de libertad
Fuente: Freddy Lanza

- Leyes de movimiento de newton

Continuando con el mismo ejemplo del oscilador simple de la figura 5.4.3, el objetivo es describir el movimiento, esto es, predecir el desplazamiento o velocidad de la masa “m” en todo instante de tiempo.

La relación entre el desplazamiento δ y el tiempo t es dada por el segundo postulado de NEWTON, el cual expresa:

$$F = m \cdot a$$

Donde F es la resultante de las fuerzas actuantes en la partícula de masa “m” y “a” es la resultante de la aceleración. Esta ley de Newton, es solo directamente aplicable a cuerpos que poseen masa pero no volumen, es decir mecanismos elementales con dimensiones finitas en movimiento trasnacional. Para movimientos en el plano de cuerpos rígidos, el cual es simétrico con respecto al plano de movimiento (X – Y), las leyes de movimiento de Newton pueden describirse:

$$\begin{aligned}\sum F_X &= m \cdot (a_g)_x \\ \sum F_Y &= m \cdot (a_g)_y \\ \sum F_Z &= I_z \cdot \alpha\end{aligned}$$

Los términos $(a_g)_x$ y $(a_g)_y$ son los componentes de aceleración de los ejes X y Y en el centro de masas del cuerpo, α es la aceleración angular e I_z es el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje perpendicular al plano X – Y, y referido a su centro de masas.

La aceleración es definida como la segunda derivada del vector posición con respecto al tiempo $(d^2\delta / dt^2)$, esto hace que las ecuaciones anteriores sean ecuaciones diferenciales.

- Diagramas del cuerpo libre

Este tópico conduce a un método que organiza y sistematiza el análisis y solución al problema dinámico. Lo primero es dibujar el diagrama de cuerpo libre y después escribir una ecuación matemática.

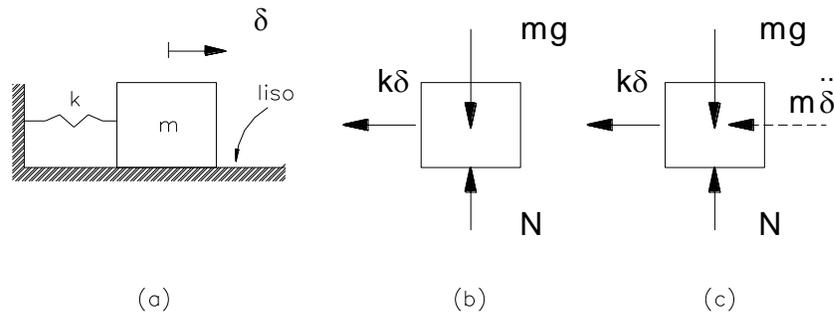


Figura 5.4.4: Representación del diagrama de cuerpo libre. (a) Modelo del sistema con un grado de libertad (b) Se muestran solo las fuerzas externas y (c) Se muestran las fuerzas externas y fuerzas de inercia

Fuente: Freddy Lanza

El diagrama de cuerpo libre (DCL) es una representación en donde se evidencian todas las fuerzas que actúan en el sistema. En la figura 5.4.4, se representa el DCL del mecanismo de un grado de libertad.

En el sistema mostrado (Fig. 5.4.4) se impone un desplazamiento en dirección positiva referida a la coordenada δ , actuando la fuerza de restitución del resorte $F_S = K \cdot \delta$, el peso del cuerpo (mg) y la reacción normal N de soporte de superficie de apoyo. Se puede ahora aplicar las ecuaciones de las leyes de Newton:

$$\sum F_x \therefore -K \cdot \delta = m \cdot \ddot{\delta} \quad (\text{EC. 1.1})$$

Debido a que no existe rotación en el eje perpendicular al plano $X - Y$, la fuerza del resorte actúa solo en el eje X , en dirección negativa con signo negativo y la aceleración es indicada como la segunda derivada $d^2 \delta / dt^2$ desplazamiento.

- Principio de D'Alembert

Otra alternativa para obtener la ecuación 1.1 es usando el principio de D'Alembert, que establece el equilibrio dinámico del sistema, añadiendo a las fuerzas externas una fuerza ficticia que se conoce comúnmente como fuerzas de inercia.

La figura 5.4.4 (c) muestra en el diagrama de cuerpo libre la fuerza de inercia $m\ddot{\delta}$, siendo esta fuerza igual a la masa por la aceleración del sistema y siempre se opone a la dirección del movimiento. Al aplicar el principio de D'Alembert, haciendo sumatoria de fuerzas en la dirección de la coordenada impuesta es:

$$m \cdot \ddot{\delta} + k \cdot \delta = 0, \text{ que es idéntica a la ecuación 1.1.}$$

El uso del principio de D'Alembert es de fácil aplicación, sin embargo puede ser usado en casos mas complejos conjuntamente con el principio de trabajo virtual, constituyendo esto una herramienta poderosa de análisis.

- Solución de la ecuación diferencial de movimiento

La solución de la ecuación diferencial se inicia con su clasificación.

Esta ecuación depende de la variable δ y $\ddot{\delta}$ es la segunda derivada, lo cual la clasifica como una ecuación lineal de segundo orden y debido a que los coeficientes k y m son constantes y la ecuación está igualada a cero, la clasifica como homogénea de coeficientes constantes. Recordando la teoría de las ecuaciones diferenciales, existe un proceso general para determinar la solución de las ecuaciones diferenciales lineales (homogéneas o no) de cualquier orden. Esta simple ecuación diferencial de segundo orden puede ser resuelta por un procedimiento directo, asumiendo lo siguiente:

$$\delta = A \cdot \cos(\omega t) \quad (1) \quad \text{ó} \quad \delta = B \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (2)$$

Donde A y B son constantes que dependen de las condiciones iniciales del movimiento y lo denotado como ω es la frecuencia, la cual es una importante característica física del sistema:

$$m \cdot \ddot{\delta} + k \cdot \delta = 0$$

Se tiene:

Sustituyendo la ecuación de desplazamiento (1) en la ecuación diferencial, derivando dos veces la ecuación (1) y de igual forma sustituyéndola en la ecuación diferencial se tiene:

$$(-m \cdot \omega^2 + K) \cdot A \cdot \cos(\omega t) = 0$$

Para que esta ecuación tenga solución en cualquier instante de tiempo, el término entre paréntesis debe ser igual a cero, lo que implica:

$$\omega^2 = \frac{K}{m}$$

La raíz positiva de esta ecuación se conoce como frecuencia natural del sistema:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Si las ecuaciones anteriores (1) y (2) son soluciones de la ecuación diferencial lineal, la superposición de estas dos soluciones, también son una solución, obteniendo dos constantes de integración A y B, que son la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\delta = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \text{sen}(\omega t)$$

Para obtener la ecuación de velocidad se deriva la ecuación anterior una vez respecto del tiempo:

$$\dot{\delta} = -A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t) + B \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

Para determinar las constantes A y B estas ecuaciones son evaluadas para las condiciones iniciales del sistema, es decir, para $t = 0$. Al sustituir

para $t = 0$, $\delta = \delta_0$ y $\dot{\delta} = v_0$ se obtiene:

$$\delta_0 = A$$

$$v_0 = B\omega$$

Finalmente se sustituye A y B en la ecuación solución y se obtiene:

$$\delta = \delta_0 \cdot \cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (3)$$

Con esto se obtiene la solución del desplazamiento δ como función de la variable tiempo, que describe el movimiento de un modelo estructural de oscilador simple sin amortiguamiento, para un grado de libertad.

- Frecuencia y periodo

Un análisis de la respuesta de la estructura mostrada en la ecuación (3) describe un movimiento armónico y periódico, el cual es expresado por la función seno o coseno con la misma frecuencia ω . El periodo puede ser

fácilmente obtenido desde la función seno o coseno, las cuales tienen un periodo de 2π . El periodo T del movimiento es determinado por:

$$\omega T = 2\pi \quad \text{ó} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

El periodo es expresado normalmente en segundos por ciclo o simplemente en segundos, siendo sobre entendido el “por ciclo”. El valor recíproco del periodo es la frecuencia natural “ f ”.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

La frecuencia natural es expresada usualmente en Hertz o ciclos por segundo. Debido a que la variable ω difiere de la frecuencia natural f solo por el factor constante, 2π , ω , es también denotada como frecuencia natural o angular. Otra diferencia son las unidades, la frecuencia f es indicada como cps (Hertz) en tanto que la frecuencia circular ω viene expresada en radianes por segundo (rad/seg).

- Amplitud de movimiento

Examinando con más detalle la ecuación de la respuesta estructural (3), al realizar una simple transformación trigonométrica se puede describir esta ecuación de una forma equivalente:

$$\delta = C \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha) \quad \text{ó} \quad \delta = C \cdot \text{cos}(\omega t - \beta)$$

Donde:

$$C = \sqrt{\delta_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}, \text{ siendo la solución de la ecuación diferencial. } \quad \text{tg}(\alpha) = \frac{\delta_o}{\left(\frac{v_o}{\omega}\right)} \quad \text{y} \quad \text{tg}(\beta) = \frac{\left(\frac{v_o}{\omega}\right)}{\delta}$$

$$\delta = C \cdot \left(\frac{\delta_o}{C} \text{cos}(\omega t) + \frac{\left(\frac{v_o}{\omega}\right)}{C} \text{sen}(\omega t) \right)$$

El valor de C en la ecuación diferencial es referido a la amplitud de movimiento y el ángulo α ó β como el ángulo de fase. Gráficamente se puede

representar la respuesta de un oscilador simple como se muestra en la figura 5.4.5.

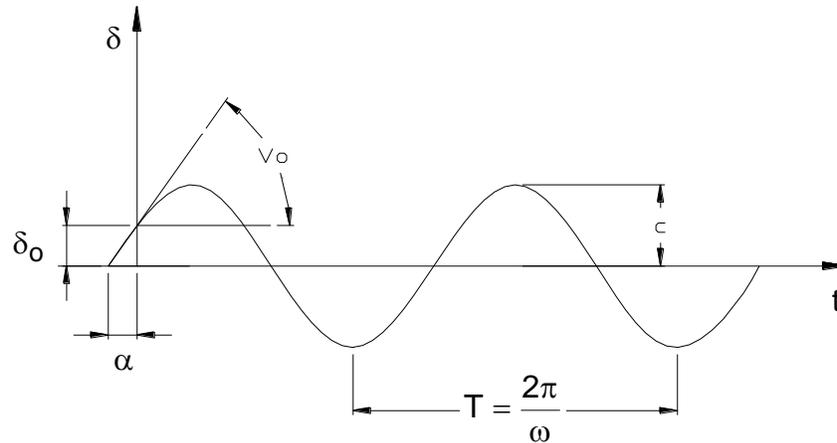


Figura 5.4.5: Respuesta del Sistema libre No Amortiguado
Fuente: Freddy Lanza

- Sistemas de un grado de libertad amortiguados

Las fuerzas designadas como de fricción o fuerzas de amortiguamientos están siempre presentes en sistemas en movimientos, estas fuerzas disipan la energía o más preciso, la transforman. Los mecanismos de transformación o disipación de energía son bastante complejos y no son completamente comprendidos hasta ahora.

- Amortiguador viscoso

En el análisis dinámico de estructuras son últimamente asumidas estas fuerzas de amortiguamiento como proporcionales a la magnitud de la velocidad y se oponen a la dirección del movimiento. Este tipo de amortiguamiento es conocido como amortiguamiento viscoso. Esta situación

donde se asume un amortiguador viscoso es real y con un mecanismo de disipación de movimiento con un fluido viscoso. La razón principal de que se use este método para simular la amortiguación es lo simple del trabajo matemático.

- Ecuaciones de movimiento

Asumiendo que se tiene un sistema estructural como un oscilador simple con un amortiguador viscoso, como el mostrado en la figura 5.4.6 en donde m y K son respectivamente la masa y la constante del resorte equivalente del oscilador y C el coeficiente de amortiguamiento.

Se procede al igual que el caso anterior del oscilador simple sin amortiguamiento a dibujar el diagrama de cuerpo libre DCL y aplicar el principio de D'Alembert, para obtener la ecuación de movimiento, tal como se muestra en la figura 5.4.6.

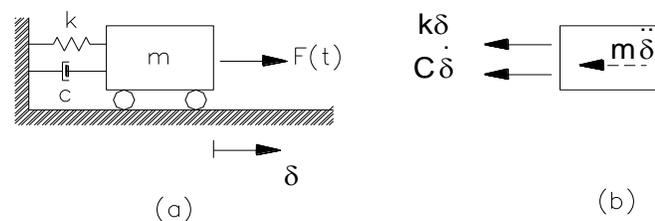


Figura 5.4.6: (a) Modelo de un oscilador simple amortiguado y (b) Diagrama de cuerpo libre del Sistema Amortiguado
Fuente: Freddy Lanza

Haciendo sumatoria de fuerzas horizontales se tiene:

$$m\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + k\delta = 0$$

La función exponencial $\delta = ce^{pt}$ satisface esta ecuación, la cual derivando sucesivamente y sustituyendo resulta:

$$m \cdot c \cdot p^2 e^{pt} + C \cdot c \cdot p \cdot e^{pt} + k \cdot c \cdot e^{pt} = 0$$

Cancelando los factores resulta:

$$mp^2 + Cp + k = 0$$

Donde las raíces de esta ecuación cuadrática son:

$$\frac{p_1}{p_2} = -\frac{C}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (4)$$

La solución general viene dada por la superposición de las dos posibles soluciones

$$\delta(t) = c_1 \cdot e^{p_1 t} + c_2 \cdot e^{p_2 t} \quad (5)$$

Donde c_1 y c_2 son constantes de integración que deben ser determinadas con las condiciones iniciales del sistema. La solución final depende del signo de la raíz cuadrada de la ecuación (4). Tres distintos casos pueden ocurrir: la cantidad sub-radical puede ser cero, donde el amortiguamiento es llamado crítico.

- Sistemas con amortiguamiento crítico

Para un sistema oscilatorio con amortiguamiento crítico, la cantidad subradical de la ecuación (4) debe ser cero:

$$\left(\frac{C_{cr}}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right) = 0 \quad \text{ó} \quad C_{cr} = 2\sqrt{mk}$$

Donde C_{cr} denota el valor del amortiguamiento crítico. La frecuencia natural de sistemas no amortiguados fue designado por $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ para sistemas críticamente amortiguados el coeficiente puede ser expresado alternativamente como:

$$C_{cr} = 2 \cdot m\omega = \frac{2k}{\omega}$$

Las raíces características de la ecuación son iguales para sistemas críticamente amortiguados:

$$p_1 = p_2 = -\frac{C_{cr}}{2m}$$

Para las dos raíces iguales, la solución general proporciona una sola constante de integración y en consecuencia una sola solución independiente:

$$\delta_1(t) = c_1 \cdot e^{-(C_{cr}/2m)t} \quad \text{ó} \quad \delta_2(t) = c_2 \cdot t \cdot e^{-(C_{cr}/2m)t}$$

La solución general para sistemas críticamente amortiguados es la superposición de estas dos soluciones:

$$\delta(t) = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{-(C_{cr}/2m)t}$$

- Sistemas Sobre-amortiguados

Para los sistemas sobre-amortiguados el coeficiente de amortiguamiento es en valor más grande que para sistemas críticamente amortiguados, esto es:

$$C > C_{cr}$$

Esto hace que la cantidad subradical (ecuación (4)) sea positiva, además se obtienen dos valores de la solución de la raíz cuadrática de la ecuación (p_1, p_2) y consecuentemente la solución sea la ecuación general escrita (5). Es de notar que los sistemas sobre-amortiguados no oscilan en su movimiento, ya que la magnitud de la oscilación decae exponencialmente con el tiempo hasta cero, como se muestra en la figura 5.4.7.

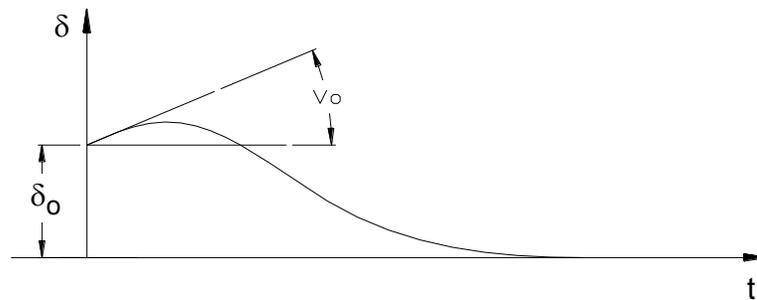


Figura 5.4.7: Respuesta de Sistemas en vibracion libre en Amortiguacion Crítica
Fuente: Freddy Lanza

- Sistemas Sub-Amortiguados

Cuando el valor del coeficiente de amortiguamiento es menor que el valor crítico ($C < C_{cr}$), ocurre que la cantidad subradical de la ecuación (4) es negativo, las raíces características son complejas o imaginarias;

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{C}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad \text{Donde } i = \sqrt{-1}$$

Para este caso se pueden utilizar las ecuaciones de Euler's

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \text{sen} x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \text{sen} x$$

Sustituyendo en las raíces cuadráticas p_1 y p_2 puede escribirse convenientemente la solución general para sistemas subamortiguados:

$$\delta(t) = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} (A \cdot \cos \omega_d t + B \cdot \text{sen} \omega_d t)$$

Donde A y B son nuevas constantes de integración y ω_d es la frecuencia amortiguada del sistema, definida como:

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Obtenido, haciendo simples sustituciones de $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\zeta = \frac{C}{C_{cr}}$

Donde el coeficiente ζ (psi) es el radio de amortiguamiento.

Para condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad (δ_0 y $\dot{\delta}_0$), se determinan las constantes de integración y se obtiene la solución general para sistemas sub-amortiguados como:

$$\delta(t) = e^{-\zeta \omega t} \left(\delta_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{\delta}_0 + \delta_0 \zeta \omega}{\omega_d} \text{sen}(\omega_d t) \right)$$

Alternativamente la ecuación anterior también puede ser escrita

$$\delta(t) = D \cdot e^{-\zeta \omega t} \cos(\omega_d t - \alpha) \quad (7)$$

Donde:

$$D = \sqrt{\delta_0^2 + \left(\frac{\dot{\delta}_0 + \delta_0 \zeta \omega}{\omega_d} \right)^2} \quad \text{Y} \quad \text{tg} \alpha = \frac{\dot{\delta}_0 + \delta_0 \zeta \omega}{\omega_d \cdot \delta_0}$$

La representación gráfica de la ecuación de movimiento para un desplazamiento inicial $\delta(t=0) = \delta_0$ y la velocidad cero ($\dot{\delta}_0 = 0$) se muestra en la figura 5.4.8.

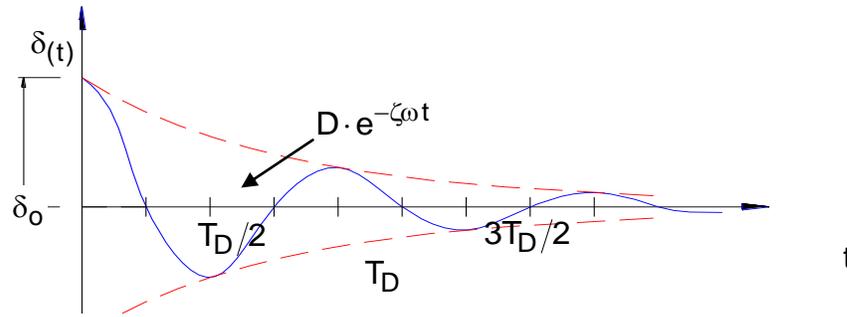


Figura 5.4.8: Respuesta de Sistemas en vibración libre sub-amortiguadas
Fuente: Freddy Lanza

En la figura 5.4.8 se puede observar que el movimiento es oscilatorio pero no periódico. La amplitud del movimiento decrecen los sucesos ciclos. La oscilación ocurre en iguales períodos de tiempo y se denomina periodo de vibración amortiguado y está definido por la siguiente ecuación:

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}}$$

El valor del coeficiente de amortiguamiento en estructuras reales es mucho mas bajo que el amortiguamiento crítico C_{cr} y usualmente está en un rango de 2 y 20% de ese valor crítico. Sustituyendo el valor máximo $\zeta = 0.20$, se obtiene $\omega_d = 0.98\omega$. De aquí se puede notar que para estructuras con un amortiguamiento del 20% del radio de amortiguamiento el valor de frecuencia amortiguada es casi igual a la frecuencia natural. En la práctica la frecuencia natural para estructuras amortiguadas puede tomarse igual a la frecuencia natural de sistemas no amortiguados.



Respuesta para sistemas con cargas armónicas.

Se pueden presentar estructuras excitadas armónicamente, que no es nada más que estructuras sujetas a fuerzas o desplazamientos que pueden ser reemplazadas por las funciones seno y coseno, este tipo de vibraciones tiene su aplicación en la dinámica de estructuras como lo es el estudio de vibraciones mecánicas producto de maquinas rotativas con masas excéntricas. Este tipo de respuesta no se profundizará debido a que el sismo es una carga no armónica, es decir no puede ser representado por funciones seno y coseno, por lo que el estudio de sistemas excitados armónicamente se sale del tema de estudio de este trabajo.

Respuesta para cargas dinámicas generales.

En estructuras reales pueden presentarse casos sometidos a cargas no armónicas, como lo es por ejemplo la acción de un sismo, lo cual será el tema de estudio en este tópico. La respuesta para este caso de carga se puede obtener en términos de una integral que evalúe analíticamente muchas funciones de cargas simples, que es un procedimiento general de integración numérica.

- Cargas impulsivas e integral de Duhamel.

Una carga impulsiva es aquella que es aplicada en un corto periodo de tiempo. El correspondiente impulso de este tipo de carga es definido como el producto del valor de la fuerza por el tiempo que este dura. Por ejemplo el producto del valor de la fuerza $F_{(T)}$ mostrada en la figura 5.4.9 en el tiempo t' durante el intervalo dt , es representado por la zona sombreada y es igual a $F_{(T)}.dt'$.

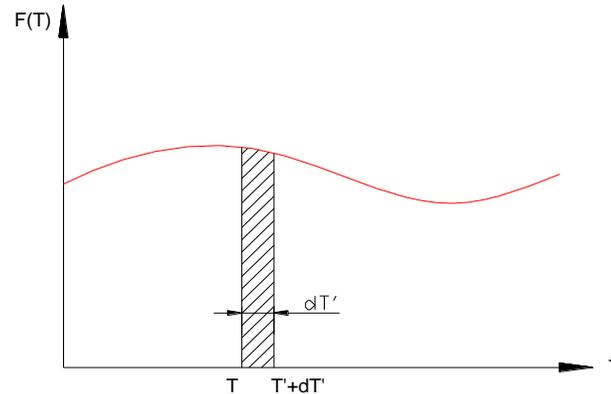


Figura 5.4.9: Representación de la carga general como una carga impulsiva
Fuente: Freddy Lanza

Este impulso actuando en un cuerpo de masa m , produce un cambio en la velocidad que puede ser determinado por la ley de movimiento de

Newton, como: $m \frac{dv}{dt'} = F_{(t)}$, despejando la derivada de la velocidad:

$$dv = \frac{F_{(T)} \cdot dt'}{m}$$

Donde $F_{(T)}.dt'$ es lo definido como impulso y dv es el incremento de la velocidad, que puede ser considerado como la velocidad inicial de la masa en el tiempo t . ahora considérese este impulso $F(T).dt'$ actuando en un oscilador sin amortiguamiento. En el tiempo t' , tomando como referencia, el oscilador que puede experimentar un cambio de velocidad dv el cual puede introducirse en la ecuación de respuesta del sistema, como la velocidad inicial ($\dot{\delta}_0 = dv$) y asumiendo un desplazamiento inicial igual a cero ($\delta_0 = 0$), para el tiempo t se producirán desplazamientos posteriores representados por:

$$d_{\delta(t)} = \frac{F_{(T)} \delta t'}{m \omega} \text{sen}(t-t') \quad (8)$$

La curva de carga mostrada en la figura 3.6, puede interpretarse como una serie de cortos impulsos que varían sucesivamente en el tiempo, originando cada una respuestas diferentes que pueden ser evaluadas con la ecuación (8). Se puede concluir entonces que la respuesta definitiva de desplazamientos, para una acción como la mostrada es la sumatoria o

integral de los diferentes desplazamientos $d\delta(t)$ en todo rango de tiempo, tal que:

$$\delta(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F_{(T)} \cdot \text{sen}(\omega(t-t')) dt$$

Esta integral es la ecuación conocida como integral de DUHAMEL y representa los desplazamientos totales producidos por una fuerza de excitación $F_{(T)}$ actuando en un oscilador simple. Esta respuesta representada por la integral, incluye componentes de respuesta determinante y transitoria del movimiento del sistema. Si la función $F_{(T)}$ no puede ser representada analíticamente pueden ser usados métodos numéricos para evaluaciones aproximadas de la integral.

Para sistemas no amortiguados con un grado de libertad y con una carga externa arbitraria la respuesta está dada por:

$$\delta(t) = \delta_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{\delta}_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{m\omega} \int F_{(T)} \text{sen}(\omega(t-t')) dt' \quad (9)$$

Respuesta espectral

En este punto se introduce el concepto de respuesta espectral que se utiliza para el estudio de la dinámica de estructuras, particularmente en el área de ingeniería sísmica. La respuesta espectral es el valor máximo de respuesta (máximo desplazamiento, velocidad, aceleración o cualquier cantidad de interés) obtenido para una función de carga especificada. Las curvas espectrales son representaciones gráficas donde la abcisa es la frecuencia natural (periodo) del sistema, y la ordenada es la respuesta máxima. En el análisis dinámico solo se requiere conocer el espectro o curvas espectrales para condiciones de carga conocida y el periodo de vibración del sistema, con lo cual se puede obtener la respuesta máxima de dicho sistema.

- Construcción del espectro de respuesta

La respuesta de una estructura frente a un sismo determinado dependerá de las características dinámicas de la misma. Estas son básicamente sus frecuencias propias de vibración y su amortiguamiento. Para comprender mejor esto puede analizarse con el sistema de un grado de libertad estudiado anteriormente, mostrado en la figura 2.11

La frecuencia propia del oscilador es: $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

Expresada en ciclos por unidad de tiempo. La inversa de la frecuencia es el periodo propio:

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}; \text{ expresado en unidades de tiempo.}$$

Si este oscilador se somete a un acelerograma (representación de la aceleración del terreno en un determinado periodo de tiempo) el valor máximo de aceleración (o de velocidad, o de desplazamiento) que sufrirá la masa depende de su frecuencia y de su amortiguamiento. Variando estas características del oscilador, varía la respuesta. Si se grafica el valor máximo de la respuesta obtenida, en función de la frecuencia del oscilador, se obtiene lo que se denomina espectro de respuestas. Las ordenadas del espectro de respuesta pueden ser aceleraciones, velocidades o desplazamientos de la masa. Las abscisas serán frecuencias, o bien su inversa: periodos, del oscilador.

La respuesta de una construcción, puede estimarse a partir de espectros simples. Para ello se considera que cada modo natural de vibración de la estructura se comporta como un oscilador simple, con su frecuencia propia. Combinando las respuestas de cada modo, puede estimarse la respuesta global.

Este es uno de los procedimientos que se utilizan para evaluar la respuesta sísmica estructural y se lo denomina análisis modal espectral. Otros tipos de análisis se basan en utilizar directamente el acelerograma en vez del espectro de respuestas. Con la historia de aceleraciones de la base (que representa el acelerograma), se calcula paso a paso la respuesta de la estructura. Este procedimiento denominado análisis paso a paso es más general que el anterior permitiendo el estudio de respuestas no lineales.

Igualmente existen procedimientos prácticos simplificados que se utilizan para el cálculo, según las normas antisísmicas, estos se basan en la aplicación de un estado de fuerzas sísmicas estáticas a una estructura originando deformaciones equivalentes a las del movimiento sísmico. Este

procedimiento, de fuerza estática equivalente, puede ser aplicado solamente a casos muy particulares que no obstante contemplan el caso de edificaciones comunes.

Para finalizar este punto es necesario profundizar un poco en una variable que afecta la respuesta estructural, tal como lo es el amortiguamiento viscoso, esta característica generalmente se expresa como fracción del amortiguamiento crítico (ζ), el tipo de amortiguamiento considerado toma en cuenta las fuentes de disipación de energía como fricciones internas, fricciones en los apoyos y en elementos no estructurales, etc.

A medida que una estructura posea características de ductilidad que permitan disipar mas energía la fracción de amortiguamiento critico será mayor y en consecuencia la respuesta espectral será menor, de aquí radica la importancia de esta variable.

Idealización dinámica de estructuras

Para la idealización de la masa de forma general se deben cumplir con dos objetivos fundamentales, el primero es la representación mas sencilla posible del complejo análisis de estructuras sometidas a cargas dinámicas, y el segundo pronosticar el comportamiento de la estructura, antes de su construcción, con el fin de garantizar que esta sea capaz de cumplir durante su vida útil, los criterios de desempeño preestablecidos, que incluyen: resistencia, rigidez para evitar deformaciones excesivas, durabilidad y funcionamiento entre otros.

A pesar de la aparente simplicidad, la complejidad para cumplir con estos requerimientos puede ser enorme, sin embargo para que esta tarea sea factible, deben realizarse numerosas simplificaciones, tanto en lo que se requiere de la estructura, expresado en terminas de cargas y deflexiones aceptables, como en la descripción del comportamiento, de la estructura a través del análisis.

- Idealización de la masa

Dentro de un estricto rigor, las masas concentradas solo pueden ser utilizadas en el análisis dinámico de cuerpos rígidos, sin embargo cuando la rigidez de algunos elementos es grande en comparación con otros, se realiza la aproximación de considerarlos infinitamente rígidos ya que esta simplificación en muchos casos puede simplificar enormemente el problema dinámico.

En un cuerpo rígido no existe posibilidad de deformación interna, lo que implica que las propiedades inerciales se pueden expresar en el centro de masas del cuerpo, supóngase una plancha que se comporta como cuerpo rígido de espesor despreciable como el que se muestra en la figura 5.4.10.

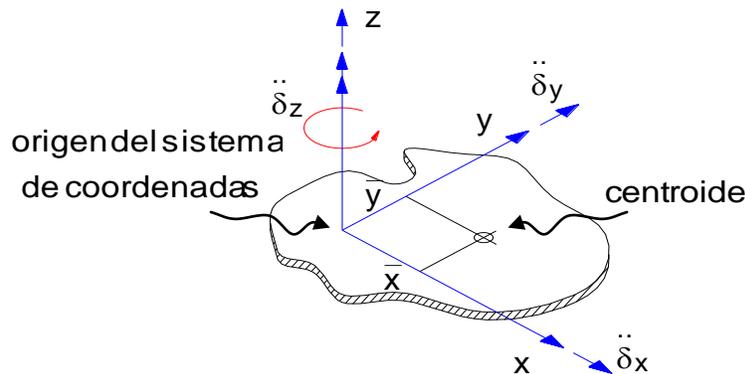


Figura 5.4.10: Representacion de Cuerpo Rígido de Espesor Despreciable y Aceleraciones Impuestas
Fuente: Freddy Lanza

Determinando Las fuerzas inerciales que se producirán en el cuerpo rígido si se somete a unas aceleraciones en la dirección de cada uno de los ejes en la planta del cuerpo y una aceleración rotacional con respecto al eje vertical perpendicular al mismo plano.

Integrando los efectos que estas aceleraciones producen en cada uno de los elementos diferenciales de masa que componen el cuerpo y que por tratarse de un cuerpo rígido éstas fuerzas inerciales no producen deformación alguna en el cuerpo, es posible encontrar las siguientes ecuaciones de equilibrio donde se presentan las fuerzas resultantes en el origen del sistema de referencia:

$$F_x = m \ddot{\delta}_x - m \cdot \bar{y} \cdot \ddot{\delta}_z$$

$$F_y = m \ddot{\delta}_y - m \cdot \bar{x} \cdot \ddot{\delta}_z$$

$$F_z = -m \bar{y} \ddot{\delta}_x + m \bar{x} \ddot{\delta}_y + \left[\frac{m}{A} J_0 + m (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \right] \ddot{\delta}_z$$

Donde m es la masa total del cuerpo, A es se área, \bar{x} y \bar{y} son las coordenadas del centroide respecto al origen de coordenadas, y J_0 es el

momento polar de inercia del cuerpo respecto al centroide, el cual a su vez es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a los dos ejes paralelos a X e Y que pasan por el centroide del cuerpo. Expresando las ecuaciones anteriores en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & -\bar{y}m \\ 0 & m & \bar{x}m \\ -\bar{y}m & \bar{x}m & \frac{m}{A}J_o + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_x \\ \ddot{\delta}_y \\ \ddot{\delta}_z \end{bmatrix} \quad \text{Lo cual es equivalente}$$

a:

$$[F] = [M] \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\delta} \end{bmatrix}; \quad \text{Donde } [M] \text{ es la matriz de masa.}$$

Además es evidente que cuando el origen del sistema coordenado se ubica en el centroide del cuerpo, esta matriz de masa toma la siguiente forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{A}J_o \end{bmatrix}$$

Esta matriz presenta valores en la diagonal principal ya que las aceleraciones solo inducen fuerzas inerciales en la dirección y sentido de la misma aceleración.

- Idealización de la rigidez de la estructura

Del mismo modo que en la idealización de la masa, en el caso de la rigidez la escogencia de la localización de los grados de libertad (Q-D) influye de manera significativa en la forma de las ecuaciones de equilibrio estático. El aspecto que se debe conocer con certeza es el hecho de que los grados de libertad en el análisis dinámico de la estructura deben ser comunes a las componentes estáticas, reflejadas en la matriz de rigidez, y las componentes dinámicas, reflejadas en la matriz de masa. Se debe tener claro que existen diferentes enfoques de cómo definir los grados de libertad de la estructura para realizar el análisis dinámico, fundamentalmente basados en las consideraciones de deformación en su plano de los sistemas de pisos, considerándolos infinitamente rígidos en su plano o no.

- Hipótesis de diafragma rígido

Una losa de entrepiso de una edificación generalmente es más rígida en su propio plano que transversalmente, debido a esto se tiende a pensar que se trata de un cuerpo infinitamente rígido para desplazamientos en su propio plano. Si esta consideración se considera válida, siempre es posible describir la posición horizontal de cualquier punto dentro de la losa, o diafragma, a partir de los grados de libertad o desplazamientos horizontales ortogonales X e Y , además un giro alrededor de un eje normal al plano del diafragma Z como se muestra en la figura 5.4.11.

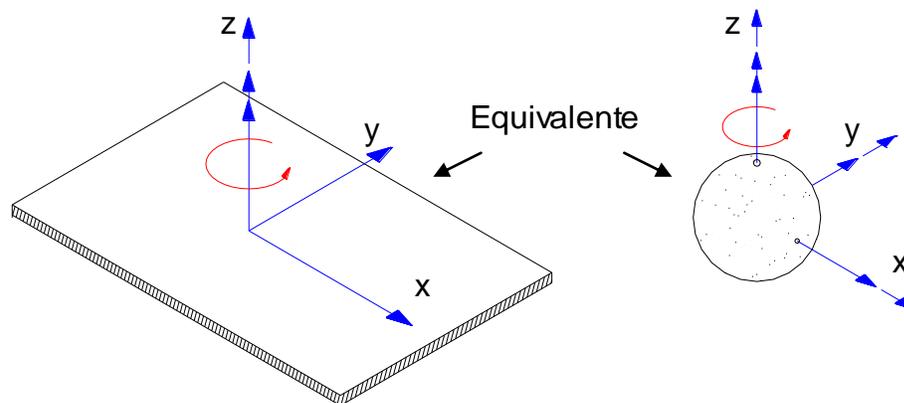


Figura 5.4.11: Diafragma como Cuerpo Infinitamente Rígido en su Plano
Fuente: Freddy Lanza

Es conveniente tomar el origen vertical rotacional en el centro de masa del diafragma, por razones ya expuestas, pero no es válido hacerlo en cualquier punto de la losa. Se observa también la usual equivalencia del diafragma infinitamente rígido en su plano con el cuerpo rígido (esfera), los cuales tiene traslaciones y giros en un plano horizontal.

La idealización del diafragma infinitamente rígido en su propio plano solo hace referencia a los tres grados de libertad mencionados, por lo tanto los desplazamientos verticales, dirección en la cual la losa es infinitamente flexible, son posibles. Al igual las rotaciones alrededor de los ejes horizontales no hacen parte de la consideración de diafragma rígido.

Para ilustrar esto, obsérvese la figura 5.4.12 donde se representa una estructura de un piso compuesta por cuatro pórticos localizado cada uno en

el borde de la losa. Si se realiza la traslación en el sentido X, se puede observar las deformaciones de los distintos elementos, siendo evidente que existen desplazamientos verticales en las vigas y en la losa, y giros alrededor de los ejes horizontales de los elementos y en las juntas entre ellos.

Así mismo se nota claramente que el extremo superior de las cuatro columnas tiene igual desplazamiento horizontal. De igual forma todas las juntas tienen un mismo giro que ocurren alrededor del eje paralelo al eje y. También la flexión ocurre en la losa alrededor de ejes horizontales que muestra compatibilidad con la hipótesis del diafragma rígido.

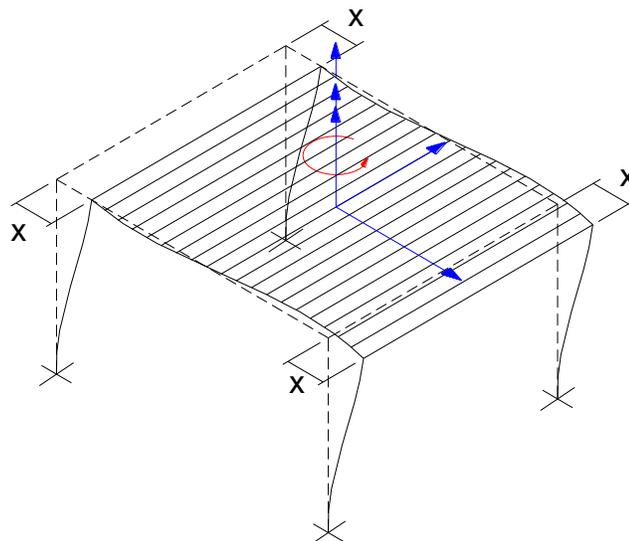


Figura 5.4.12: Deformación en los Elementos de una Estructura de piso, con Diafragma Rígido en su propio Plano, ante un Desplazamiento en la Dirección X
Fuente: Freddy Lanza

En resumen: “dos puntos cuales quiera, que hagan parte de la losa de entrepiso que se supuso como diafragma rígido, están inhabilitados para tener desplazamientos relativos que se puedan contener dentro del plano horizontal, sin embargo se puede tener desplazamientos relativos en la dirección vertical y giros con respecto a cualquier eje horizontal.

Esta idealización es extensible a edificios en altura, donde cada entrepiso es un diafragma independiente con tres grados de libertad dinámicos, debe considerarse que al expresar las propiedades de masa de la edificación en su losa como se muestra en la figura 5.4.13.

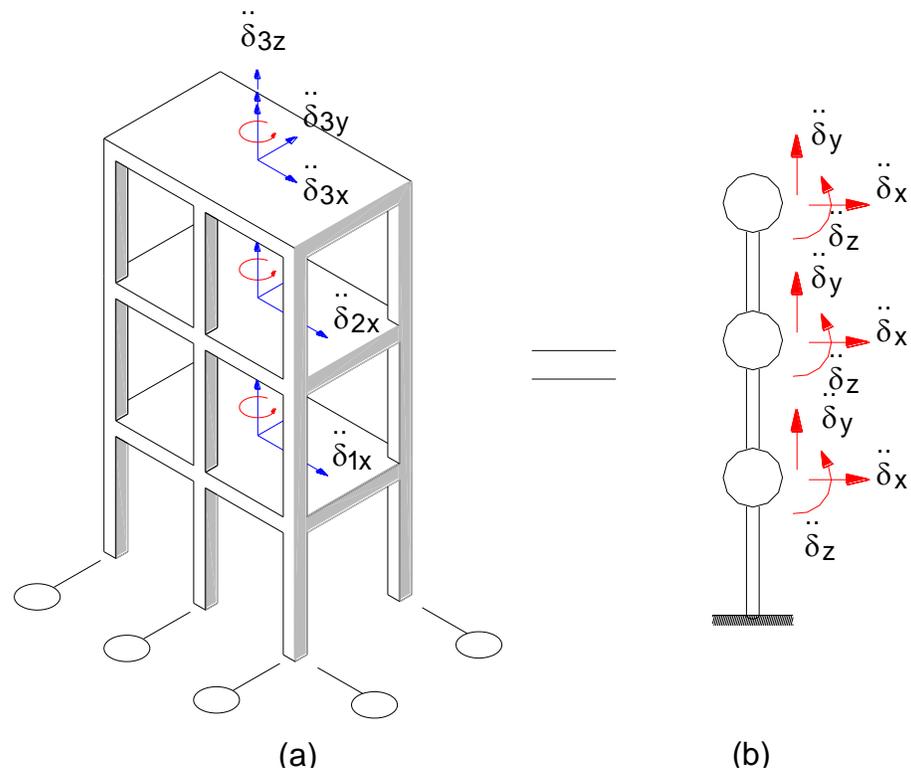


Figura 5.4.13: Edificio Aporticado con Hipotesis de Diafragma Flexible y tres Grados de Libertad por Nivel
Fuente: Freddy Lanza

Esta afirmación es razonable en estructuras aporticadas, donde la masa de las columnas es despreciable respecto al entrepiso. Sin embargo donde los muros estructurales sean un porcentaje apreciable de la masa de la estructura, pueden introducirse errores importantes al ser evaluados y deben ser usados otros tipos de idealizaciones. La principal problemática con respecto al diafragma rígido, consiste en definir si es válida con todo tipo de entrepisos. Cuando no hay suficiente rigidez dentro del diafragma, la compatibilidad de las deformaciones horizontales de los elementos verticales de la estructura deja de ser válida y por lo tanto al utilizarla se estaría cometiendo en el análisis un gran error de idealización. Se procede posteriormente a formular las relaciones de rigidez de una estructura, teniendo en cuenta la idealización del diafragma rígido.

- Modelos de estructuras como pórticos planos

Este tipo de modelos debe ser definido como estructuras en donde no existe rotación de los elementos horizontales a nivel de los sistemas de pisos, según se muestra en la figura 5.4.14. En este respecto, la deflexión de la estructura es muy parecida a la viga en cantiliver que está sometida a fuerzas normales a su eje.

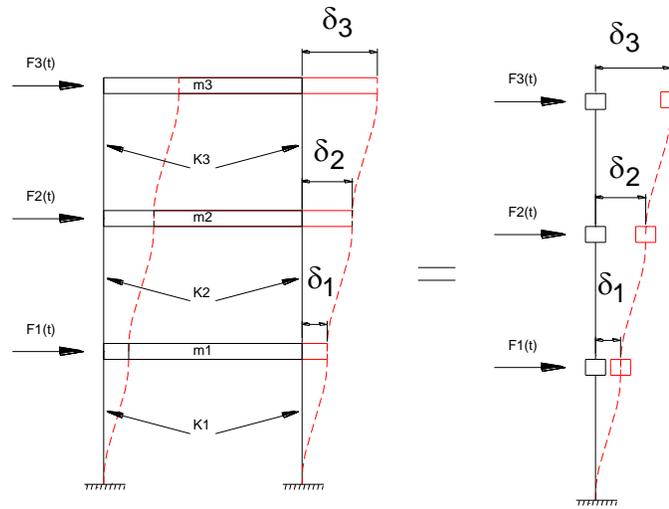


Figura 5.4.14: Representación de la Estructura Modelada como Portico Plano y como Columna Simple y Masas Concentradas.
Fuente: Freddy Lanza

Para poder obtener tal deflexión en una edificación, deben asumirse algunas hipótesis como:

- La masa de una estructura está concentrada en los sistemas de pisos de ésta, despreciando la masa en las columnas y otros elementos diferentes a las losas.
- Las vigas en los pisos son infinitamente rígidas en comparación con las columnas.
- La deformación en una estructura es independiente de la fuerza axial actuante en estas, es decir, se asume la hipótesis de rigidez axial infinita.

La primera hipótesis asumida transforma el problema de una estructura con infinitos grados de libertad concentrados en las masas de los pisos. La segunda y tercera hipótesis restringe los grados de libertad de los pórticos estructurales a sólo un grado de libertad de movimiento horizontal, según se muestra en la figura 5.4.15.

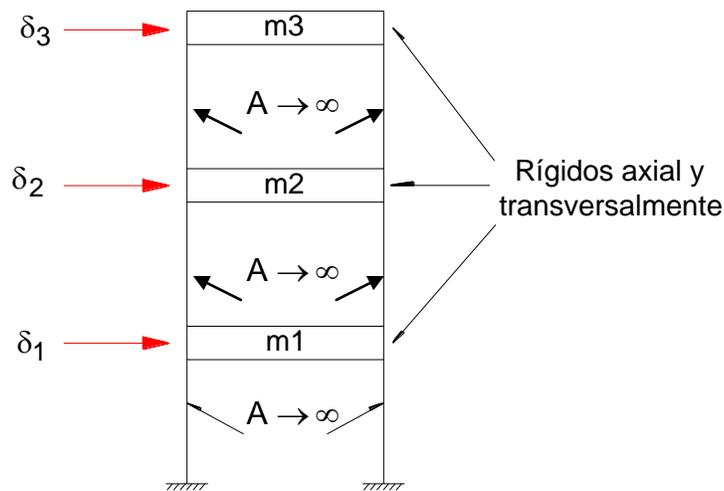


Figura 5.4.15: Modelo de Portico Plano con un Grado de Libertad por Nivel
Fuente: Freddy Lanza

Esta definición dada anteriormente se define como el modelo plano de pórticos para análisis dinámico o como se conoce en inglés shear building. El modelo anterior también se puede idealizar como una simple columna con masas concéntricas en los niveles de los pisos (ver figura 5.4.14). Otra alternativa generalmente usada es representar varias masas unidas por resortes como se muestra en la figura 5.4.16.

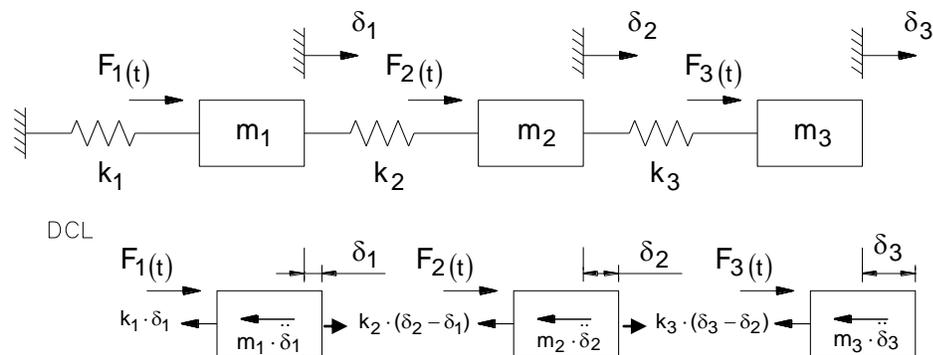


Figura 5.4.16: Modelos de Masas y Resortes Equivalente a Porticos Planos
Fuente: Freddy Lanza

- Estructuras modeladas como pórticos planos con varios grados de libertad dinámicos

Las estructuras no siempre pueden ser descritas como sistemas con un grado de libertad dinámico, por lo cual deben ser representados con modelos con múltiples grados de libertad. El modelo a usar para estudiar estructuras con múltiples grados de libertad, es el de pórticos planos (shear building). En este tópico se describirán métodos analíticos que representan el comportamiento dinámico de estructuras continuas y geométricas regulares.

Estos métodos de análisis permiten la discretización del modelo estructural y la solución. Esto requiere análisis matemáticos considerables, incluida la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. En este aparte solo se considerará un reducido grupo, pero ilustrativo tipo de estructuras, como lo son los pórticos planos con varios grados de libertad dinámicos.

- Ecuaciones de rigidez para pórticos planos

En resumen las hipótesis asumidas para estructuras analizadas como pórticos planos, la masa se concentra únicamente en sistemas de piso y se asume rigidez total para las vigas y rigidez axial para las columnas, generando esto solo un grado de libertad por piso en el plano en estudio. Es decir se obtendrán tantos grados de libertad como niveles o pisos tenga el pórtico, tal como se muestra en la figura 5.4.15.

Recordando lo explicado anteriormente este modelo se podría representar de forma equivalente como una columna simple con masas unidas por resortes. En cualquiera de los tres casos las ecuaciones de movimiento que corresponden al equilibrio dinámico de los cuerpos, representados por los diagramas de cuerpo libre de la figura 5.4.16, quedando:

$$m_1 \ddot{\delta}_1 + k_1 \delta_1 - k_2 (\delta_2 - \delta_1) = F_1(t)$$

$$m_2 \ddot{\delta}_2 + k_2 (\delta_2 - \delta_1) - k_3 (\delta_3 - \delta_2) = F_2(t)$$

$$m_3 \ddot{\delta}_3 + k_3 (\delta_3 - \delta_2) = F_3(t)$$

Este sistema de ecuaciones constituyen las ecuaciones de movimiento de un pórtico plano de tres pisos con un grado de libertad por nivel, siendo conveniente escribirla de forma matricial de la siguiente manera:

$$[M] \begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \delta \end{bmatrix} + [K] \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \end{bmatrix} = [F], \text{ donde } [M] \text{ y } [K] \text{ son respectivamente la matriz de}$$

masa y de rigiezes generalizadas, donde ellas son:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$
$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

Y $[\delta]$, $\begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \delta \end{bmatrix}$ y $[F]$ son respectivamente los desplazamientos, aceleraciones

y vector fuerzas dados por:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \end{bmatrix}; \quad [F] = \begin{bmatrix} F_{1(t)} \\ F_{2(t)} \\ F_{3(t)} \end{bmatrix}$$

o Ecuaciones de flexibilidad para pórticos planos

Una alternativa apropiada en el desarrollo de las ecuaciones de movimiento de la estructura bajo fuerzas dinámicas, es mediante la formulación del método de las fuerzas o coeficiente de flexibilidad. Se debe recordar que las propiedades elásticas de la estructura son descritas por los coeficientes de flexibilidad, que no son más que deflexiones producidas por cargas unitarias aplicadas en una de las coordenadas del sistema. Los coeficientes de flexibilidad f_{ij} se definen como el desplazamiento producido y medido en la coordenada i generado por la fuerza unitaria aplicada en la coordenada j .

Usando estos coeficientes y aplicando el principio de superposición, se puede establecer que el desplazamiento en cualquier coordenada es igual a la suma de los productos de los coeficientes de flexibilidad de cada coordenada multiplicada por la fuerza correspondiente. Estas ecuaciones para un pórtico plano de tres niveles (incluyendo las fuerzas de inercia), son expresados en términos de los coeficientes de flexibilidad como:

$$\delta_1 = \left(F_1(t) - m_1 \ddot{\delta}_1 \right) \cdot f_{11} + \left(F_2(t) - m_2 \ddot{\delta}_2 \right) \cdot f_{12} + \left(F_3(t) - m_3 \ddot{\delta}_3 \right) \cdot f_{13}$$

$$\delta_2 = \left(F_1(t) - m_1 \ddot{\delta}_1 \right) \cdot f_{21} + \left(F_2(t) - m_2 \ddot{\delta}_2 \right) \cdot f_{22} + \left(F_3(t) - m_3 \ddot{\delta}_3 \right) \cdot f_{23}$$

$$\delta_3 = \left(F_1(t) - m_1 \ddot{\delta}_1 \right) \cdot f_{31} + \left(F_2(t) - m_2 \ddot{\delta}_2 \right) \cdot f_{32} + \left(F_3(t) - m_3 \ddot{\delta}_3 \right) \cdot f_{33}$$

En notación matricial se obtiene:

$$[\delta] = [f][F] - [f][M] \begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \delta \end{bmatrix}$$

Donde $[F]$ es la matriz de flexibilidad definida por:

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

Las relaciones conocidas entre la matriz de flexibilidad y rigidez son aplicables en este análisis, donde se sabe que la inversa de la matriz de rigidez es la matriz de flexibilidad y viceversa.

- Vibraciones libres en pórticos planos

En el estudio de vibraciones libres, la estructura no está sujeta a excitaciones externas y el movimiento es gobernado sólo por las condiciones iniciales. El análisis de la estructura en movimiento libre proporciona las propiedades dinámicas principales de la estructura como lo son la frecuencia natural y los correspondientes modos de vibración.

- Frecuencias naturales y modos de vibración

En la vibración simple el vector fuerza $[F]$ tiene que ser igual a cero para poder formular las ecuaciones de movimiento, teniendo:

$$[M] \begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \delta \end{bmatrix} + [K][\delta] = 0$$

Cuya solución toma la forma: $\delta_i = a_i \cdot \text{sen}(\omega t - \alpha)$; $\forall i \in \mathbb{N}$ o en notación vectorial: $[\delta] = [a] \cdot \text{sen}(\omega t - \alpha)$

Donde a_i es la amplitud de movimiento de la coordenada “i” y “n” es igual al grado de libertad de la estructura. La sustitución de la solución en la ecuación diferencial arroja:

$$-\omega^2[M][a] \cdot \text{sen}(\omega t - \alpha) + [K][a] \cdot \text{sen}(\omega t - \alpha) = 0$$

Reagrupando los términos: $\{[K] - \omega^2[M]\}[a] = [0]$

En general esta ecuación representa un sistema de ecuaciones lineales y homogéneas con “n” desplazamientos conocidos (a_i) en ω^2 , y es usualmente conocida como “ecuación característica” del sistema. La solución de la ecuación característica antes planteada es importante problema matemático como problema de autovalores y autovectores. La solución no trivial, que tienen que obtenerse para $a_i \neq 0$, requiere que el determinante de la matriz cuyo factor común $[a]$ sea igual a cero, es decir:

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0$$

La solución de este determinante resulta en una ecuación polinómica de grado “n” en ω^2 y es usualmente conocida como “ecuación característica” del sistema. La solución de la ecuación característica arroja “n” valores de ω^2 , pudiendo obtenerse con estos los valores de a_1, a_2, \dots, a_n en términos de una constante arbitraria.

Ejemplo Ilustrativo 5.4.1

Sea un edificio con las especificaciones mostradas en la figura 5.4.17.

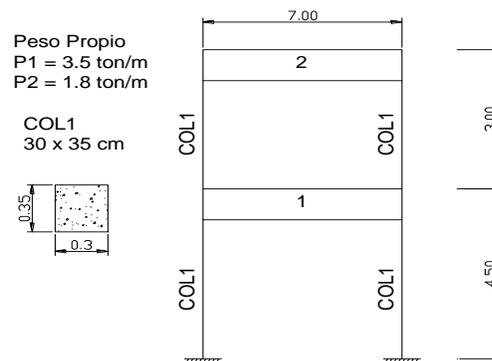


Figura 5.4.17: Representación Estructural en una Dirección de Estudio para un Edificio de 2 Pisos Modelado como Portico Plano. (Ejemplo Ilustrativo 5.4.1)

Fuente: Freddy Lanza

Se representa el modelo como varias masas concéntricas unidas por resortes tal como se muestra en la figura 5.4.18.

Calculando el peso en cada piso y transformándolo en masa:

$$\omega_1 = 3.500 \cdot 7 = 24.500 \text{ Kg}$$

$$m_1 = 2500 \text{ Kg} \cdot \text{seg}^2/\text{m}$$

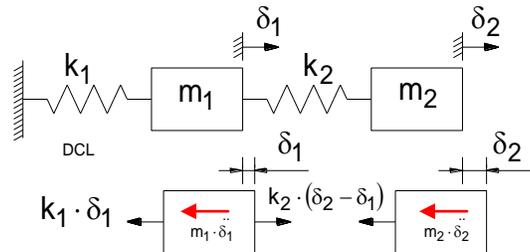


Figura 5.4.18: Modelos de Masas y Resortes Equivalentes. (Ejemplo Ilustrativo 5.4.1)
Fuente: Freddy Lanza

$$\omega_2 = 1.800 \cdot 7 = 12.600 \text{ kg}$$

$$m_2 = 1.285,71 \text{ Kg} \cdot \text{seg}^2/\text{m}$$

Calculando la rigidez equivalente del resorte (columnas inferiores= k_1)

$$M_{ij} = M_{ji} = -\frac{6EI}{L} \therefore \varphi = \frac{6EI}{L^2} \therefore R_{ij} = -R_{ji} = \frac{12EI}{L^3}$$

Para el concreto armado el módulo de elasticidad será:

$$E = 15100 \sqrt{f'c} = 237.170,80 \text{ Kg/cm}^2$$

$$k_1 = \frac{24EI}{L^2} = \frac{24 \times 2.371.708.245 \times 1.072 \times 10^{-3}}{4.5^3} = \therefore k_1 = 669.622.05 \text{ kg/m}$$

$$k_2 = \frac{24EI}{L^2} = \frac{24 \times 2.371.708.245 \times 1.072 \times 10^{-3}}{3.0^3} = \therefore k_2 = 2.259.974.43 \text{ kg/m}$$

Las ecuaciones de movimiento del sistema se obtienen del equilibrio dinámico de los diagramas de cuerpo libre de la figura 2.26, como:

$$m_1 \cdot \ddot{\delta}_1 + k_1 \delta_2 - k_2 \cdot (\delta_2 - \delta_1) = 0$$

$$m_2 \cdot \ddot{\delta}_2 + k_2 \cdot (\delta_2 - \delta_1) = 0$$

Cuyas soluciones pueden ser de la forma.,

$$\delta_1 = a_1 \text{sen}(\omega t - \alpha)$$

$$\delta_2 = a_2 \text{sen}(\omega t - \alpha)$$

Para los desplazamientos, y para las aceleraciones

$$\ddot{\delta}_1 = -a_1 \cdot \omega^2 \text{sen}(\omega t - \alpha)$$

$$\ddot{\delta}_2 = -a_2 \cdot \omega^2 \text{sen}(\omega t - \alpha)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de equilibrio y expresando esto en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \cdot \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \cdot \omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Para una solución no trivial, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser igual a cero:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \cdot \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \cdot \omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La resolución de este determinante arroja una ecuación cuadrática en ω^2 , quedando:

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^4 - [(k_1 + k_2) \cdot m_2 + m_1 \cdot k_2] \cdot \omega^2 + k_1 \cdot k_2 = 0$$

Sustituyendo por los valores del ejemplo:

$$3.214.275 \cdot \omega^2 - 9.416.547 \times 10^{-3} \cdot \omega^2 + 1,5133 \times 10^{12} = 0$$

Siendo las raíces cuadradas,

$$\omega_1^2 = 2.758,95 \quad \wedge \quad \omega_2^2 = 170.65$$

Obteniendo entonces las frecuencias naturales de la estructura:

$$\omega_1 = 52.52 \text{ rad/seg} \quad \text{y} \quad \omega_2 = 13.06 \text{ rad/seg}$$

Y los correspondientes períodos naturales de vibración:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 0.48110 \text{seg} \\ T_2 = 0.119634 \text{seg} \end{cases}$$

La solución de la ecuación (9) permite obtener las amplitudes a_1 y a_2 .

$$\begin{bmatrix} 2.929.596,48 - 2.500 \cdot \omega^2 & -2.259.974,43 \\ -2.259.974,43 & 2.259.974,43 - 1.285,71 \cdot \omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\omega = 13.06$ en la primera ecuación,
 $2.503.187,48 a_{11} - 2.259.974,43 a_{21} = 0$

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = 1.1076$$

Sustituyendo por un valor arbitrario igual a la unidad en el nivel 1 se obtiene:

$$a_{11} = 1.00$$

$$a_{21} = 1.1076$$

De manera similar se procede con la segunda frecuencia natural, $\omega_2=52.52$, obteniendo la relación de los desplazamientos y valores arbitrarios a estos:

$$-3.966.279,52 a_{12} - 2.259.974,43 a_{22} = 0$$

$$\frac{a_{22}}{a_{12}} = -1.7550$$

$$a_{12} = 1.00$$

$$a_{22} = -1.7550$$

Se puede observar que este sistema presenta dos formas armónicas de vibrar, con dos frecuencias y dos períodos naturales de vibración, ω_1 y ω_2 . Las formas (en este ejemplo a_{21}/a_{11} y a_{22}/a_{12}) son lo que se conoce generalmente como las formas modales de vibración.

El período de vibración de mayor duración (T_1) es normalmente llamado modo de vibración natural o fundamental y está caracterizado por que todos los desplazamientos se dirigen hacia el mismo lado (valores todos positivos o negativos) o por su valor de frecuencia mas bajo.

Ejercicios Propuestos

Determinar los periodos de vibración de las siguientes figuras, cuya sección transversal se muestra a continuación.

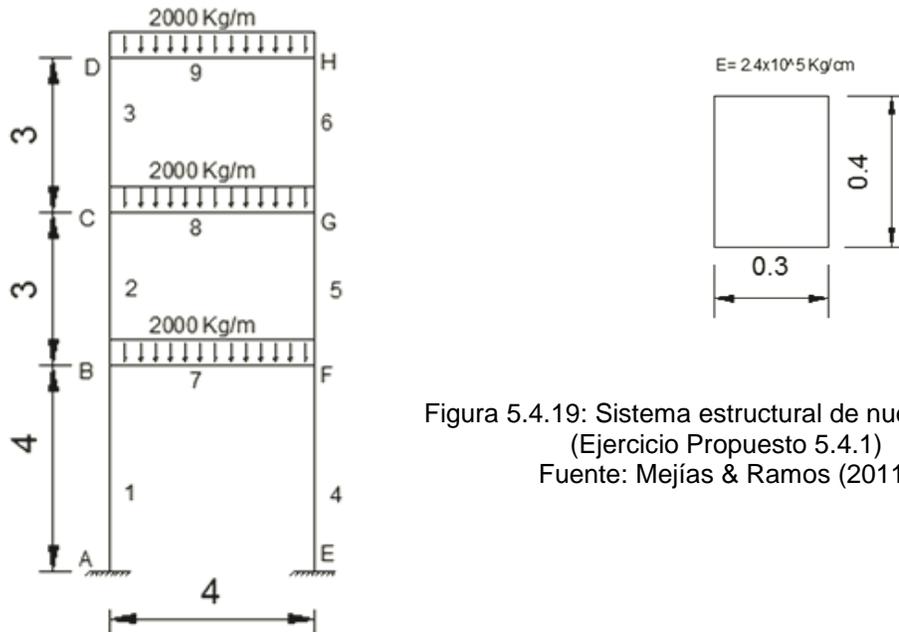


Figura 5.4.19: Sistema estructural de nueve barras.
(Ejercicio Propuesto 5.4.1)
Fuente: Mejías & Ramos (2011)

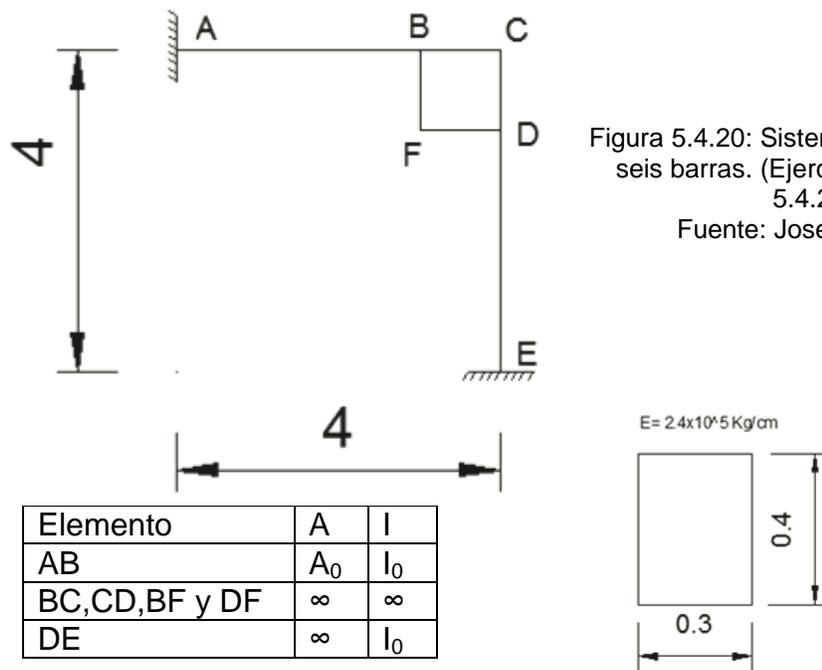
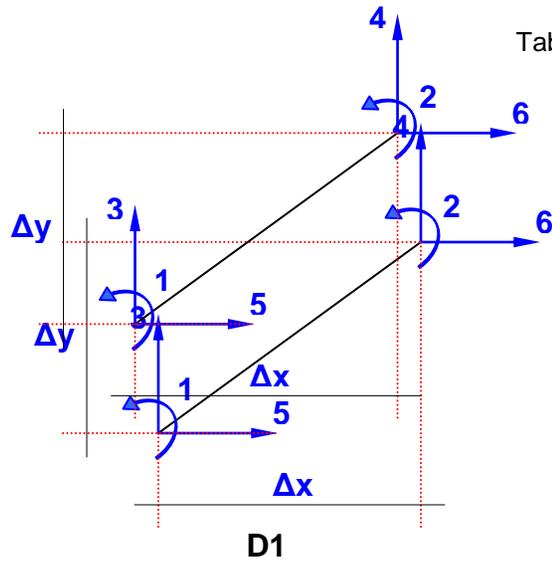


Figura 5.4.20: Sistema estructural de seis barras. (Ejercicio Propuesto 5.4.2)
Fuente: Jose P. Olival

Tabla 5.2.1: Matriz de rigidez para un elemento rotado doblemente empotrado
Fuente: Freddy Lanza



$$L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$C = \frac{\Delta x}{L}$$

$$S = \frac{\Delta y}{L}$$

	D1	D2	D3	D4	D5	D6
Q1	$\left(\frac{4EI}{L}\right)$	$\left(\frac{2EI}{L}\right)$	$\left(\frac{6EI}{L^2} \cdot C\right)$	$\left(-\frac{6EI}{L^2} \cdot C\right)$	$\left(-\frac{6EI}{L^2} \cdot S\right)$	$\left(\frac{6EI}{L^2} \cdot S\right)$
Q2	$\left(\frac{2EI}{L}\right)$	$\left(\frac{4EI}{L}\right)$	$\left(\frac{6EI}{L^2} \cdot C\right)$	$\left(-\frac{6EI}{L^2} \cdot C\right)$	$\left(-\frac{6EI}{L^2} \cdot S\right)$	$\left(\frac{6EI}{L^2} \cdot S\right)$
Q3	$\left(\frac{6EI}{L^2} \cdot C\right)$	$\left(\frac{6EI}{L^2} \cdot C\right)$	$\left(\frac{12EI}{L^3} \cdot C^2 + \frac{AE}{L} \cdot S^2\right)$	$\left(-\frac{12EI}{L^3} \cdot C^2 - \frac{AE}{L} \cdot S^2\right)$	$\left(-\frac{12EI}{L^3} \cdot C \cdot S + \frac{AE}{L} \cdot S \cdot C\right)$	$\left(\frac{12EI}{L^3} \cdot S \cdot C - \frac{AE}{L} \cdot S \cdot C\right)$
Q4	$\left(-\frac{6EI}{L^2} \cdot C\right)$	$\left(-\frac{6EI}{L^2} \cdot C\right)$	$\left(-\frac{12EI}{L^3} \cdot C^2 - \frac{AE}{L} \cdot S^2\right)$	$\left(\frac{12EI}{L^3} \cdot C^2 + \frac{AE}{L} \cdot S^2\right)$	$\left(\frac{12EI}{L^3} \cdot S \cdot C - \frac{AE}{L} \cdot S \cdot C\right)$	$\left(-\frac{12EI}{L^3} \cdot S \cdot C + \frac{AE}{L} \cdot S \cdot C\right)$
Q5	$\left(-\frac{6EI}{L^2} \cdot S\right)$	$\left(-\frac{6EI}{L^2} \cdot S\right)$	$\left(-\frac{12EI}{L^3} \cdot C \cdot S + \frac{AE}{L} \cdot S \cdot C\right)$	$\left(\frac{12EI}{L^3} \cdot S \cdot C - \frac{AE}{L} \cdot S \cdot C\right)$	$\left(\frac{12EI}{L^3} \cdot S^2 + \frac{AE}{L} \cdot C^2\right)$	$\left(-\frac{12EI}{L^3} \cdot S^2 - \frac{AE}{L} \cdot C^2\right)$
Q6	$\left(\frac{6EI}{L^2} \cdot S\right)$	$\left(\frac{6EI}{L^2} \cdot S\right)$	$\left(\frac{12EI}{L^3} \cdot S \cdot C - \frac{AE}{L} \cdot S \cdot C\right)$	$\left(-\frac{12EI}{L^3} \cdot S \cdot C + \frac{AE}{L} \cdot S \cdot C\right)$	$\left(-\frac{12EI}{L^3} \cdot S^2 - \frac{AE}{L} \cdot C^2\right)$	$\left(\frac{12EI}{L^3} \cdot S^2 + \frac{AE}{L} \cdot C^2\right)$



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

1.- Se desarrollo una metodología basada en una revisión bibliográfica, en la cual se buscó unificar los conceptos y términos acerca del análisis matricial de las estructuras, para beneficiar a estudiantes y profesional a fines a la carrera de Ingeniería Civil, que deseen optimizar sus conocimientos en el análisis estructural.

2.- Los temas tratados en el manual buscan motivar al lector con la finalidad de acrecentar el estudio de los métodos matriciales en las estructuras; mediante un lenguaje más amigable y diferente que el presentado en un texto tradicional.

3.- El manual agiliza los procedimientos de cálculos a la hora de emplear métodos matriciales, ya que no posee problemas ilustrativos y propuestos de cálculos largos o complicados, los cuales se pueden resolver mediante el uso de calculadoras científicas con los que el estudiante mejorara los conocimientos obtenidos en clases, para así sellar los conceptos teóricos a través del ejercicio práctico.

4.- El método de análisis matricial de las estructuras es un tema que se han mantenido intacto desde su nacimiento, sin embargo no es ampliamente impartido en Venezuela. Aparte de la Universidad de Carabobo, solo en tres universidades nacionales, como La Universidad Central de Venezuela (UCV), la Universidad Católica Andrés Bello (UCAB) y La Universidad Centro-Occidental Lisandro Alvarado (UCLA), imparten asignaturas relacionadas con el análisis matricial, sobretodo en el aérea de



postgrado, creando que el profesional recién graduado que busca ampliar sus conocimientos en el ámbito matricial-estructural no posea muchas alternativas como apoyo bibliográfico, por lo tanto el manual se adapta de una buena manera al contenido programático que poseen los programas de las universidades, permitiendo al alumno egresado de la Universidad de Carabobo, una ventaja textual.

5.- En la facultad de ingeniería de la Universidad de Carabobo, existe solo un profesor que dicta la asignatura de estructuras avanzadas, por ello el manual también cumple con la idea de ser una herramienta, base y apoyo para nuevas profesores del departamento estructural que deseen impartir la asignatura.

6.- Los profesores de la cátedra de estructura que deseen dar clases de estructuras avanzadas, podrán dinamizar las clases mediante apoyo visual, como por ejemplo prototipos a escalas donde se visualicen con mayor facilidad el comportamiento tanto de los miembros como de las juntas de los sistemas estructurales y de la estructura en general. De esta manera el estudiante podrá comprender con mayor facilidad los estados de cargas, desplazamientos, deformaciones y otros, lo cual es indispensable para entender cómo se comporta estructuralmente las edificaciones.

7.- La desactualización es un tema que no se debe presentar en ningún profesional, mas si este está encargado de impartir teorías y conocimientos al profesional próximo a nacer, es por ello que se busca con el manual poner al día al alumno en cómo se enfoca en la actualidad el análisis matricial de las estructuras, debido a que ahora si se poseen a la mano las herramientas para desarrollar el análisis matricial las estructuras con mayor rapidez y facilidad.

8.- El estudio dinámico de las estructuras es muy extenso, es por ello que debe buscarse la manera de implementar una nueva asignatura que



trate específicamente este tema, resultaría ampliamente provechoso e útil, además de preparar al alumno o profesional de la Ingeniería Civil que busca pulir y aumentar sus conocimientos en niveles de especialización y post-grado.

9.- El manual busca facilitar el estudio de los estudiantes afines a la ingeniería estructural y que quieran profundizar sus estudios en el campo matricial, sin embargo en un tema que resulta extenso, por lo cual abrimos la posibilidad de que se puedan realizar nuevas modificaciones y mejoras al mismo, en busca de que este represente la herramienta más útil, practica y completa para el estudiante de ingeniería civil.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cabero J, Duarte A, Romero R. (2002). Los Libros de Texto y sus Potencialidades para el Aprendizaje. [serie en Internet] [Consultado:10/03/ 2011]. Disponible en: <http://tecnologiaedu.us.es>

- Mora J.(2004). La memoria textual en la Cultura Pedagógica. Caso: La Grita, cantón de la antigua Provincia de Mérida de Maracaibo Venezuela. De la Escuela Conventual a la Escuela Republicana. Acción Pedagógica. [serie en Internet]. Universidad de Los Andes-Táchira [Consultado: 06/06/2011] Disponible en: <http://ecotropicos.saber.ula.ve/>

- Lamar S, Celso P. Análisis Estático de Estructuras. Formulación Matricial. (2007) Ediciones CITECI.

- Kassimali A. Análisis Estructural. Segunda Edición. (2001)Editorial Thomson Learning.

- McCormac , Nelson. Análisis de Estructuras Métodos Clásico y Matricial. Tercera Edición. (2006)Editorial Alfaomega.

- Ibáñez F. Un Enfoque Matricial de las Estructuras. (1991). Publicación de la Universidad de Carabobo.

- Grisolia D. Introducción a la ingeniería sísmica. (1999). Publicación de la Universidad de los Andes.



- Bazan E, y Meli R. Diseño Sísmico de Edificios. (2004). Editorial Limusa.
- Lanza S, Freddy J y Scarlet H. Puentes M. (2003) “Estudio Comparativo de La Norma Sismorresistente Venezolana Actual Con Códigos Sísmicos De Otros Países”. Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de Carabobo.
- Barros F. y Parra D. (2005). “Estudio y aplicación de una metodología para la planificación, análisis y diseño de estructuras aporticadas de concreto armado de acuerdo a las nuevas normativas COVENIN”. Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de Carabobo.
- Castillo y Tovar (2005) “Manual Práctico para el Laboratorio de Topografía”. Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de Carabobo.
- Magallanes y Suzzarini (2000) “Introducción al Proyecto de Estructuras de Concreto y Acero Mediante Recursos Multimedia”. Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad Católica Andrés Bello