



Universidad de Carabobo  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Mecánica



Departamento de Diseño Mecánico y Automatización

Diseño de un regulador para el control de la posición, velocidad y fuerza de un actuador mediante la Técnica de Loopshaping.

Integrantes:

Hernán E. Cortez T.

María de los A. Mujica. S.

Bárbula, Mayo de 2009



Universidad de Carabobo  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Mecánica



Departamento de Diseño Mecánico y Automatización

DISEÑO DE UN REGULADOR PARA EL CONTROL DE LA POSICIÓN,  
VELOCIDAD Y FUERZA DE UN ACTUADOR MEDIANTE LA TÉCNICA DE  
LOOPSHAPING.

*Trabajo Especial de Grado presentado ante la Ilustre Universidad de Carabobo para optar al  
Título de Ingeniero Mecánico.*

Tutor:

Prof. María de Lourdes Ochoa A.

Integrantes:

Hernán E. Cortez T.

María de los A. Mujica. S.

Bárbula, Mayo de 2009



UNIVERSIDAD DE CARABOBO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA



### CERTIFICADO DE APROBACIÓN

Quienes suscriben, Miembros del Jurado designado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica para examinar la Tesis de Pregrado titulada ***“Diseño de un regulador para el control de la posición, velocidad y fuerza de un actuador mediante la técnica de loopshaping”***, presentada por los bachilleres: **Hernán E. Cortez T** y **María A. Mujica S.**, portadores de la Cédula de Identidad N°: **17.074.903** y **16.894.909**, respectivamente, hacemos constar que hemos revisado y aprobado el mencionado trabajo.

---

Prof. María de Lourdes Ochoa Á.  
Presidente del Jurado

---

Prof. Napoleón González  
Miembro del Jurado

---

Prof. José Gutiérrez  
Miembro del Jurado

En Naguanagua, mes de Mayo de 2009

# RESUMEN

---

El presente trabajo de investigación estudia la robustez de los controladores ante perturbaciones e incertidumbres presentes en una planta neumática, a través de la aplicación de la Técnica de Control Loopshaping y la Teoría de Control Clásica PI, PD. Para ello, se plantearon los objetivos de: recabar y analizar la bibliografía correspondiente a la técnica de control loopshaping así como los diferentes modelos de servomecanismos; desarrollar esquemáticamente la planta propósito de estudio; desarrollar el modelo matemático lineal de la planta; diseñar el esquema de control mediante la Teoría de Loopshaping; implementar a través de una herramienta de computación el esquema de control diseñado y ensayar el controlador; analizar y evaluar el comportamiento de las variables del servomecanismo (posición, velocidad y fuerza); comparar los resultados obtenidos en el esquema de control diseñado con la técnica de control lineal PI, PD. Debido a los objetivos anteriormente descritos se hizo necesario llevar a cabo una metodología, la cual indica el procedimiento a seguir para cumplir con los objetivos. A partir de esto, se realizó la modelación matemática, se linealizó la planta de estudio, posteriormente se diseñaron los reguladores mediante Loopshaping y mediante la Teoría Clásica de Control que permiten el estudio del comportamiento del servomecanismo sometido a incertidumbres y perturbaciones. Luego se realizó la comparación de los reguladores y se estableció los beneficios obtenidos. Finalmente, se concluyó que los controladores mediante la Técnica de Control Loopshaping poseen una estabilidad robusta y un nivel de persistencia más elevado que los controladores diseñados mediante la Teoría de Control Clásica.

# NOMENCLATURA

---

$\alpha$  : Factor de atenuación.

$\alpha_G$  : Ángulo de fase marginal.

$\gamma$  : Relación de calores específicos.

$\phi$  : Ángulo de fase.

$\phi_m$  : Ángulo de adelanto máximo de fase.

$\xi$  : Factor de amortiguamiento relativo.

$\tau$  : Constante de tiempo.

$\tau_v$  : Constante de tiempo de primer orden de la válvula.

$\omega$  : Frecuencia.

$\omega_n$  : Frecuencia natural no amortiguada.

$1/s$  : Factor integral.

$A$  : Área anular del émbolo.

$A_v(t)$ ,  $A_v(s)$  : Área variable del orificio de la válvula.

$b$  : Coeficiente de fricción viscosa.

$C$  : Controlador del sistema.

$c(t)$ ,  $y(t)$  : Señal de salida del sistema.

$C_p$  : Calor específico a presión constante.

$d(t)$  : Señal de entrada exógena. Perturbación.

$e_{ss}$  : Error en estado estacionario.

$F(s)$  : Función de transferencia del sistema.

$F_x$  : Fuerzas en dirección del eje x.

$K$  : Ganancia del sistema.

$K_c$  : Ganancia del compensador.

$K_p$  : Constante de error de posición estática.

$K_v$  : Constante de error de velocidad estática.

$L(s)$  : Función de transferencia a lazo abierto.

$M$  : Masa combinada del vástago y pistón del actuador.

$M_g$  : Margen de ganancia.

$\dot{m}_e(t)$ ,  $\dot{M}_e(s)$  : Caudal másico de entrada.

$M_M$  : Magnitud máxima.

$M_m$  : Margen de estabilidad.

$M_p$  : Sobrelongación.

$\dot{m}_s(t)$ ,  $\dot{M}_s(s)$  : Caudal másico de salida.

$\mathcal{P}$  : Conjunto de familias de plantas con características similares.

$\tilde{P}$  : Perturbación relativa.

$P(s)$  : Función de transferencia de la planta.

$P_1(t)$  : Presión en la cámara 1 del actuador.

$P_2(t)$  : Presión en la cámara 2 del actuador.

$P_a$  : Presión atmosférica.

$P^*$  : Presión crítica.

$P_n(s)$  : Función de transferencia de la planta nominal.

$P_o$  : Presión de suministro del compresor.

$P_s(t)$  : Presión de entrada al actuador.

$R$  : Constante del gas.

$r(t)$  : Señal de entrada del sistema.

$S$  : Sensibilidad.

$s$  : Factor derivativo.

$T_1$ : Temperatura de la cámara 1 del actuador.

$T_2$ : Temperatura de la cámara 2 del actuador.

$T_s$ : Temperatura de suministro al actuador.

$t$ : Tiempo.

$t_d$ : Tiempo de retardo.

$T_o$ : Temperatura de suministro del compresor.

$t_p$ : Tiempo pico.

$t_r$ : Tiempo de subida.

$t_s$ : Tiempo de asentamiento.

$u(t)$ ,  $U(s)$ : Señal de salida del controlador o señal de entrada a la planta.

$v(t)$ : Señal de salida del sensor.

$V_1$ : Volumen de la cámara 1 del actuador.

$V_2$ : Volumen de la cámara 2 del actuador.

$W_1$ ,  $W_2$ : Funciones de peso de incertidumbres e insensibilidad.

$X(t)$ : Posición del émbolo del actuador.

$\dot{X}(t)$ : Velocidad del émbolo del actuador.

$\ddot{X}(t)$ : Aceleración del émbolo del actuador.

$X_v(t)$ : Posición del spool de la válvula.

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

<b>Figura 2.1.</b> Actuador neumático de simple efecto.	14
<b>Figura 2.2.</b> Actuador neumático de doble efecto.	15
<b>Figura 2.3.</b> Sistema de retroalimentación unitaria.	18
<b>Figura 2.4.</b> Sistema de retroalimentación unitaria (Nyquist).	22
<b>Figura 2.5.</b> Interpretación gráfica de la estabilidad robusta.	24
<b>Figura 2.6.</b> Lazo clásico de control.	25
<b>Figura 2.7.</b> Sistemas con pesos (filtros) en entradas y salidas	26
<b>Figura 2.8.</b> Los diagramas de Bode $ L $ de (línea continua), $ W_1 /(1- W_2 )$ (línea de trazos), y $(1- W_1 )/ W_2 $ (línea punteada).	30
<b>Figura 4.1.</b> Diagrama de conexión neumática de la planta a estudiar	46
<b>Figura 4.2.</b> Lazo clásico de control.	52
<b>Figura 4.3.</b> Error normalizado de la posición y velocidad (conjunto de curvas sobrepuestas) y cota del error ( $W_2$ ).	56
<b>Figura 4.4.</b> Error normalizado de la fuerza del embolo del actuador (conjunto de curvas sobrepuestas) y cota del error ( $W_2$ ).	60
<b>Figura 4.5.</b> Cotas superior e inferior para el diseño del controlador por Loopshaping para la posición (línea roja) y velocidad (línea azul).	63

<b>Figura 4.6.</b> Cotas superior (línea roja) e inferior (línea azul) para el diseño del controlador por Loopshaping para la fuerza.	64
<b>Figura 4.7.</b> Cotas superior e inferior para el diseño del controlador por Loopshaping para la posición y velocidad del émbolo.	68
<b>Figura 4.8.</b> Cotas superior e inferior para el diseño del controlador por Loopshaping para la fuerza del émbolo.	70
<b>Figura 4.9.</b> Curva de $ W_1S + W_2T $ con el controlador $C$ seleccionado para posición y velocidad (línea continua) y fuerza (línea discontinua).	71
<b>Figura 4.10.</b> Diagramas de Bode de la ecuación 4.25.	73
<b>Figura 4.11.</b> Diagramas de Bode de la ecuación 4.25 más integrador (sistema 4.33).	74
<b>Figura 4.12.</b> Diagramas de Bode del sistema ajustado por ganancia (ecuación 4.35).	76
<b>Figura 4.13.</b> Diagramas de Bode de la ecuación 4.35 (línea azul) y la ecuación 4.35 compensado en fase (línea verde).	79
<b>Figura 4.14.</b> Respuesta (posición) ante escalón unitario. Sistemas compensado y no compensado.	81
<b>Figura 4.15.</b> Respuesta (posición) ante rampa unitaria. Sistemas compensados y no compensados.	82
<b>Figura 4.16.</b> Diagramas de Bode de la ecuación 4.26 más integrador (ecuación 4.40).	83
<b>Figura 4.17.</b> Diagramas de Bode de la ecuación 4.40 ajustado en ganancia (ecuación 4.41).	85
<b>Figura 4.18.</b> Respuesta (posición) ante escalón unitario. Sistemas compensados y no compensados.	88

<b>Figura 4.19.</b> Respuesta (posición) ante escalón unitario. Sistemas compensados y no compensados.	88
<b>Figura 4.20.</b> Diagrama de Bode de magnitud y fase. Ecuación 4.27.	90
<b>Figura 4.21.</b> Respuesta (fuerza) ante un escalón unitario. Ecuación 4.27.	90
<b>Figura 4.22.</b> Respuesta (fuerza) ante una rampa unitaria. Ecuación 4.27.	91
<b>Figura 4.23.</b> Diagrama de Bode de la ecuación 4.27 con el controlador PD.	94
<b>Figura 4.24.</b> Respuesta (posición) ante un escalón unitario. Sistema no compensado y el compensado.	94
<b>Figura 4.25.</b> Respuesta (posición) ante una rampa unitaria. Sistema no compensado y el compensado.	95
<b>Figura 5.1.</b> Respuesta (posición) ante un escalón unitario. Ecuación 4.27, controlada por el controlador diseñado por Loopshaping (línea azul) y por el de orden reducido (línea verde).	100
<b>Figura 5.2.</b> Respuesta (posición) ante una rampa unitaria. Ecuación 4.27, controlada por el controlador diseñado por Loopshaping (línea azul) y por el loopshaping reducido en orden (línea verde).	101
<b>Figura 5.3.</b> Diagramas de Bode de la ecuación 5.3	102
<b>Figura 5.4.</b> Diagramas de Bode de la ecuación 5.3 (línea azul) y el de la ecuación 4.35 compensado en ganancia y fase (línea verde).	104

<b>Figura 5.5.</b> Respuesta (posición) ante un escalón unitario de la planta (4.27) controlado por Loopshaping (línea azul), por loopshaping de orden reducido (línea verde) y por PD (línea roja)	105
<b>Figura 5.6.</b> Respuesta (fuerza) ante un escalón unitario de la planta (4.31), controlado por Loopshaping	114

# ÍNDICE DE TABLAS

---

<b>Tabla 2.1.</b> Lista de modelos de perturbación más comunes.	21
<b>Tabla 2.2.</b> Equivalencias entre medidas de incertidumbre.	25
<b>Tabla 2.3.</b> Ecuaciones fundamentales de la Técnica de Control Loopshaping.	28
<b>Tabla 4.1.</b> Parámetros de la planta de estudio.	54
<b>Tabla 4.2.</b> Variación de los parámetros de la planta de estudio.	54
<b>Tabla 5.1.</b> Polos a lazo cerrado y factor de amortiguamiento relativo de los sistemas (4.39), (4.46) y (5.6).	105
<b>Tabla 5.2.</b> Características transitorias de los sistemas (4.39), (4.46) y (5.6)	107
<b>Tabla 5.3.</b> Índices de desempeño de los sistemas (4.39), (4.46) y (5.6)	109
<b>Tabla 5.4.</b> Polos a lazo cerrado y factor de amortiguamiento relativo del sistema (4.44).	113
<b>Tabla 5.5.</b> Características transitorias del sistema (4.44).	115
<b>Tabla 5.6.</b> Índices de desempeño de los sistemas (4.44).	117

# ÍNDICE

---

Introducción	1
<b>1. Capítulo I: El Problema</b>	<b>3</b>
1.1 Planteamiento del Problema	4
1.2 Objetivos	5
1.2.1 Objetivo General	5
1.2.2 Objetivos Específicos	5
1.3 Limitación	6
1.4 Delimitación	6
1.5 Justificación	7
<b>2. Capítulo II: Marco Teórico</b>	<b>9</b>
2.1 Antecedentes.	10
2.2 Bases Teóricas.	11
2.2.1 Sistema de Control Automático.	11
2.2.2 Sistemas Neumáticos.	12
2.2.3 Análisis de Sistemas usando Gráficas Semilogarítmicas (Bode).	16
2.2.4 Generalidades de la Técnica Loopshaping	17
2.2.4.1 Incertidumbre de la planta	19
2.2.4.2 Estabilidad robusta	21
2.2.4.3 Desempeño nominal	25
2.2.5 Técnica de Control Loopshaping.	27
2.2.6 Índices de Desempeño de los Controladores.	31

2.2.7	Acciones de Control Tradicional	35
2.3	Definición de Términos Básicos.	37
<b>3</b>	<b>Capítulo III: Marco Metodológico</b>	<b>41</b>
3.1	Nivel de la Investigación.	42
3.2	Procedimientos Metodológicos.	42
<b>4</b>	<b>Capítulo IV: Modelación matemática y diseño de controladores</b>	<b>45</b>
4.1	Modelación Matemática de la Planta	46
4.2	Diseño del Controlador por Loopshaping.	51
4.2.1	Determinación de $W_1(s)$	52
4.2.2	Determinación de $W_2(s)$	53
4.2.3	Determinación de las Cotas para la Condición de Robustez	61
4.2.4	Determinación de la función de transferencia $L(s)$ y controlador $C(s)$	64
4.2.5	Ajustes de los controladores	71
4.3	Diseño de Controladores mediante las Acciones PI, PD	89
4.3.1	Posición	89
4.3.2	Velocidad	95
4.3.3	Fuerza	96
<b>5</b>	<b>Capítulo V: Análisis de Resultados y Conclusiones</b>	<b>97</b>
5.1	Análisis de desempeño de los controladores	98
5.1.1	Posición	98
5.1.2	Velocidad	111
5.1.3	Fuerza	112
5.2	Conclusiones	119
5.3	Recomendaciones	122

Bibliografía	123
Anexos	125



# INTRODUCCIÓN

---

El control retroalimentado es una disciplina de la ingeniería; con el tiempo, la teoría de control iba encontrando su lugar en la organización del conocimiento humano. El concepto de sistema como aquella entidad dinámica con entradas y salidas definidas que interacciona con el medio y con otros sistemas, fue un requisito clave para el posterior desarrollo de la teoría de sistema. En este contexto, la evolución de la teoría de control podía proceder.

El análisis matemático de los sistemas de control se llevaba a cabo mediante el empleo de ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo. El problema de diseño consistía en introducir un cambio de fase en el sistema a las frecuencias pertinentes. En 1938, H.W. Bode realizó estudios sobre la respuesta en frecuencia de los sistemas e investigó la estabilidad en lazo cerrado empleando los conceptos de ganancia y margen de fase.

Un problema militar importante en este periodo fue el control y la navegación de los barcos, que cada vez presentaban diseños más avanzados. Entre los primeros avances a este respecto destacó el diseño de sensores que posibilitaran el control en lazo cerrado. En 1947, N.B. Nichols desarrolló lo que se denominó “la gráfica de Nichols” para el diseño de sistemas realimentados.

Sin embargo, la teoría de control clásica presentaba ciertas carencias en algunos aspectos, pues no proporcionaba una noción práctica de las suposiciones realizadas al sistema. Por otro lado, los sistemas de control clásicos carecían de dinámica de compensación podían perder robustez frente a distorsiones y ruidos.

Estos estudios tuvieron su aplicación en numerosos procesos de control de sistemas propensos a distorsiones e incertidumbres propias.

Debido a esto, fueron desarrolladas las teorías de control robusto, como la de Loopshaping, la cual combina la técnica de control clásica con las técnicas de optimización para lograr controladores para la estabilidad y rendimiento altos, introduciéndoles al sistema perturbaciones e incertidumbres.

Esta investigación se basa en controlar la posición, velocidad y fuerza de un actuador neumático. Como bien es conocido los sistemas neumáticos debido a las propiedades del aire no son precisos (posición y fuerza), sin embargo estos sistemas son de mucha utilidad en la industria debido a que es una fuente de energía segura en lugares de riesgo de explosión, producción de chispa, calor, entre otros. Este es el motivo principal de nuestra investigación, diseñar controladores robustos que permitan la precisión en sistemas neumáticos.

El trabajo se encuentra estructurada de la siguiente manera: Capítulo I muestra la situación problemática que llevó a la iniciativa de realizar la presente investigación, además de su respectiva justificación y alcance. En el capítulo II se encuentran las definiciones básicas, las bases teóricas y técnicas que permitirán el estudio del tema a desarrollar. Capítulo III se describe la metodología a aplicar para alcanzar los objetivos planteados en el primer capítulo. El capítulo IV se modela matemáticamente el sistema neumático a controlar, se diseñan los controladores respectivos para cada una de las variables (posición velocidad y fuerza) mediante la Técnica de Control Loopshaping y la Teoría de Control Clásica (PI, PD) a fin de compararlos y finalmente mostrar los resultados en el capítulo V.

# CAPÍTULO I: El Problema

---

*En este capítulo se describe de manera amplia el contexto que permita comprender el origen y las relaciones de la investigación. Se muestran aspectos como los objetivos a cumplir, la razón y los obstáculos que pueden presentarse durante la investigación.*

## 1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

La neumática es una fuente de energía de fácil obtención y tratamiento para el control de máquinas y otros elementos sometidos a movimiento. La generación, almacenaje y utilización del aire comprimido resultan relativamente económicos y además plantea un índice de peligrosidad bajo en relación a otras energías como la electricidad y los combustibles gaseosos o líquidos. Proporciona una alternativa altamente segura en lugares de riesgo de explosión por deflagración, donde otras energías suponen un riesgo importante por la producción de calor, chispas, etc., por estas ventajas las instalaciones de aire comprimido son ampliamente usadas en todo tipo de industrias, incluso en el transporte, aéreo, terrestre y marítimo, por su baja inflamabilidad respecto a los sistemas oleohidráulicos y el bajo costo en cuanto a la aplicación y mantenimiento del mismo.

Los mandos neumáticos están constituidos por elementos de señalización, elementos de mando y un aporte de trabajo. Los actuadores neumáticos son elementos de aporte de trabajo y su función es la de transformar la energía acumulada en el aire comprimido en energía mecánica mediante un movimiento rectilíneo, rotatorio o giratorio.

Debido a que el fluido energético o medio de transmisión de señal usado es el aire comprimido, éste presenta propiedades (elasticidad, viscosidad, compresibilidad, etc.) que ocasionan que los actuadores no puedan operar con altas cargas, además de no poder aplicarse en sistemas donde se requiere precisión, como posicionamiento de las torretas de las máquinas de herramientas sobre el material, montaje de componentes electrónicos sobre circuitos impresos a través de soldadura superficial o SMD (procedimiento que hasta estos momentos aún se realiza manualmente), entre otros.

Es por esto, que esta investigación permitirá controlar el comportamiento de un sistema dado ante un ambiente incierto mediante la técnica de Loopshaping.

## **1.2 OBJETIVOS:**

### **1.2.1 OBJETIVO GENERAL.**

Diseñar un regulador basado en la teoría de Loopshaping para el control de la posición, velocidad y fuerza de un actuador neumático.

### **1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.**

1. Recabar y analizar la bibliografía correspondiente a la técnica de control Loopshaping así como los diferentes servomecanismos.
2. Desarrollar esquemáticamente la planta propósito de estudio.
3. Desarrollar el modelo matemático lineal de la planta.
4. Diseñar el esquema de control mediante la teoría de Loopshaping.
5. Implementar a través de una herramienta de computación el esquema de control diseñado y ensayar el controlador.
6. Analizar y evaluar el comportamiento de las variables del servomecanismo.

7. Comparar los resultados obtenidos del esquema de control diseñado con las técnicas de control lineal (PI, PD).

### **1.3 LIMITACIÓN.**

La duración del Trabajo Especial de Grado es de dos (2) semestres, un (1) año.

### **1.4 DELIMITACIÓN.**

El estudio del sistema neumático se realizará mediante la modelación matemática lineal, considerando las inercias involucradas en el sistema, la temperatura de operación generada, y las propiedades del aire. Sin embargo no se considerarán las pérdidas de carga por tuberías, el tiempo muerto e histéresis del sistema. El objetivo es mostrar la efectividad y robustez del controlador.

Los parámetros involucrados (frecuencia amortiguada, constante de tiempo, etc.) de la planta se tomarán a partir de investigaciones científicas de otros autores.

Las simulaciones se llevarán a cabo mediante el software Matlab, en el cual se implementaran los diferentes esquemas de control.

## 1.5 JUSTIFICACIÓN.

El presente trabajo permitirá conocer el control de las variables (posición, velocidad y fuerza) de un actuador neumático ante las incertidumbres y perturbaciones que puedan existir en la planta.

La Técnica de Control Loopshaping debido a su característica de estabilidad robusta, permite que sistemas neumáticos reales (considerando viscosidad, elasticidad, compresibilidad del aire) toleren las incertidumbres causadas por idealizaciones realizadas a las plantas y perturbaciones provenientes de los elementos que componen dicha planta y las condiciones de trabajo a las que están sometidas, obteniendo una mejor respuesta a las especificaciones dadas.

El desarrollo de esta técnica de control servirá de fundamento a futuras investigaciones para diversas aplicaciones que se quieran llevar con la Técnica de Loopshaping.



# CAPÍTULO II: Marco Teórico

---

*En este capítulo se presenta la información teórica de la investigación. Se muestran los antecedentes y las bases teóricas, la cual está estructurada de la siguiente manera: La Sección 2.2.1 se define el sistema de control y los tipos de energía que utilizan los componentes de estos sistemas, en la presente investigación se utilizará los sistemas de control neumáticos, los cuales se definen en la Sección 2.2.2. Posteriormente en la Sección 2.2.3 presenta el análisis de sistemas utilizando los diagramas de Bode, la Sección 2.2.4 describe las generalidades de la técnica de control Loopshaping.*

## 2.1 Antecedentes de la Investigación.

Njabeleke et al, (2000). Diseñaron un controlador basado en la técnica de control - Loopshaping para sistemas de energía de fluido, los sistemas de energía son altamente no lineales, haciendo que la aplicación de las técnicas tradicionales de control de retroalimentación se dificulte, debido a esto aplicaron la Técnica Loopshaping. En éste trabajo concluyeron que la técnica además de ser sencilla, permite que los sistemas de fluidos cumplan con especificaciones de rendimiento en presencia de incertidumbres y perturbaciones del sistema, obteniendo de esta manera un controlador con estabilidad robusta.

Farret et al (2000). Redujeron orden de la Técnica de Control Loopshaping en la configuración de un lanzamiento de misiles en una amplia dotación de vuelo. Una reducción de orden en esta técnica permite diseñar controladores de rápida respuesta (de tiempos discretos) para diferentes puntos de vuelo. En éste trabajo dedujeron que la reducción de la técnica de control Loopshaping es favorable para el diseño de sistemas no lineales debido a que se obtiene una mejor respuesta comparado con un control clásico.

Rahim et al (2002). Diseñaron un controlador de amortiguación para un sistema eléctrico utilizando la técnica de Loopshaping. Seleccionaron la planta de manera tal que cumplió las funciones de estabilidad robusta y criterio de desempeño. Las variaciones de las condiciones de funcionamiento (incertidumbres) de los valores nominales son del tipo multiplicativo. El diseño robusto, con generador de variación de velocidad como el controlador de entrada, lo colocaron a prueba para una serie de puntos de funcionamiento teniendo en cuenta diversas perturbaciones. Concluyeron

que al fijar el parámetro del controlador ofrece muy buena amortiguación para una amplia gama de condiciones de funcionamiento.

Yamaguchi (2001). Modeló y controló el sistema de posicionamiento del cabezal en la unidad de información; más conocido como disco duro. En la unidad de disco duro (HDD) de sistemas de computación, el cabezal debe estar posicionado en la pista deseada con rapidez y precisión, para la lectura y escritura de datos de manera eficiente, debido a esto es necesario que el rendimiento del controlador sea óptimo. Uno de los métodos más efectivos para la determinación precisa de la posición en relación con diversos disturbios es aumentar el ancho de banda y esto se pudo realizar mediante la técnica de control Loopshaping. En esta investigación concluyeron que estos métodos son muy utilizados debido al aumento de la densidad de la grabación, es decir aumenta la velocidad de almacenamiento y procesamiento de datos.

## **2.2 Bases Teóricas.**

### **2.2.1 Sistema de Control Automático [8].**

Un sistema automático de control es un conjunto de componentes físicos conectados o relacionados entre sí, de manera que regulen o dirijan su actuación por sí mismos, es decir sin intervención de agentes exteriores (incluido el factor humano), corrigiendo además los posibles errores que se presenten en su funcionamiento.

Estos emplean frecuentemente componentes de diferentes tipos de energía:

- Neumáticos
- Eléctricos
- Hidráulicos
- Mecánicos
- Y sus combinaciones.

La presente investigación se enfoca en los sistemas neumáticos.

### **2.2.2 Sistemas Neumáticos [8].**

La neumática es una de las tecnologías con la que se puede automatizar procesos. El fluido que suele encontrarse en este tipo de sistema es el aire.

Los sistemas neumáticos poseen las siguientes características:

- La presión de operación normal (aproximadamente 6 bar) de estos sistemas es baja comparada con los sistemas hidráulicos.
- La potencia de salida de los sistemas neumáticos son considerablemente menores que la potencia de los sistemas oleohidráulicos.
- La precisión de los actuadores neumáticos es deficiente a bajas velocidades (3 m/s).

- Se permite cierto grado de fuga externa, pero debe evitarse la fuga interna debido a que la diferencia de presión efectiva es pequeña.
- Son insensibles a los cambios de temperatura de operación.
- Estos sistemas no corren el riesgo de incendiarse o explotar.

Los mandos neumáticos están constituidos por elementos de entrada, elementos de procesamiento, elementos de maniobra y elementos de trabajo [14].

- Elementos de trabajo.

Los actuadores neumáticos: son elementos de aporte de trabajo y su función es la de transformar la energía acumulada en el aire comprimido en energía mecánica mediante un movimiento rectilíneo, rotatorio o giratorio.

Se clasifican de la siguiente manera:

a) Actuadores de simple efecto [14]

Estos actuadores tienen la estructura mostrada en la figura 2.1, en ellos se presenta solo una conexión de aire comprimido que se requiere para el movimiento de traslación. El vástago retorna por el efecto de un muelle incorporado, el cual se diseña de modo que haga regresar el émbolo a su posición inicial a una velocidad suficientemente grande, o de una fuerza externa. No pueden realizar trabajos más que en un sentido, ya que el trabajo lo debe realizar el aire comprimido y nunca el muelle.

Los actuadores de simple efecto se utilizan para sujetar, marcar, expulsar, etc. Tienen un consumo de aire más bajo que un cilindro de doble efecto de igual tamaño. Sin embargo, hay una reducción de impulso debido a la fuerza contraria del muelle, así que puede ser necesario un diámetro interno algo más grande para conseguir una misma fuerza. También la adecuación del resorte tiene como consecuencia una longitud global más larga y una longitud de carrera limitada, debido a un espacio muerto.

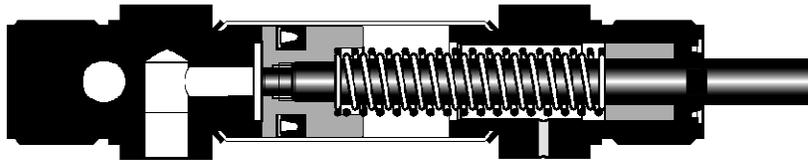


Figura 2.1. Actuador neumático de simple efecto [14].

#### b) Actuadores de doble efecto [14]

Los actuadores de doble efecto presentan la estructura en la figura 2.2. Estos actuadores son aquellos que realizan tanto su carrera de avance como la de retroceso por acción del aire comprimido. Su denominación se debe a que emplean las dos caras del émbolo (aire en ambas cámaras), por lo que estos componentes sí que pueden realizar trabajo en ambos sentidos. Sus componentes internos son prácticamente iguales a los de simple efecto, con pequeñas variaciones en su construcción. Algunas de las más notables las encontramos en la culata anterior, que ahora ha de tener un orificio roscado para poder realizar la inyección de aire comprimido (en la disposición de simple efecto este orificio no suele prestarse a ser conexionado, siendo su función la comunicación con la atmósfera con el fin de que no se produzcan contrapresiones en el interior de la cámara).

El campo de aplicación de los actuadores de doble efecto es mucho más extenso que el de los de simple efecto, incluso cuando no es necesaria la realización de esfuerzo en ambos sentidos. En principio, la carrera de los cilindros no está limitada, pero hay que tener en cuenta el pandeo y doblado que puede sufrir el vástago extendido.

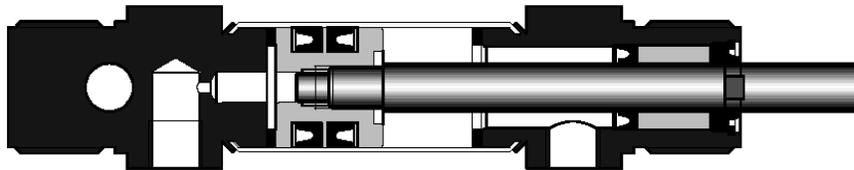


Figura 2.2. Actuador neumático de doble efecto [14].

- Elementos de maniobra [14].

Las válvulas: son elementos de maniobra y su función es regular la puesta en marcha, el paro y la dirección, así como la presión o el caudal del fluido enviado por una bomba hidráulica o almacenado en un depósito

Se clasifican de la siguiente manera:

a) Accionamiento permanente, señal continua [14]

La válvula es accionada manualmente o por medios mecánicos, neumáticos o eléctricos durante todo el tiempo hasta que tiene lugar el reposicionamiento. Este es manual o mecánico por medio de un muelle.

b) Accionamiento momentáneo, impulso [14]

La válvula es invertida por una señal breve (impulso) y permanece indefinidamente en esa posición, hasta que otra señal la coloca en su posición anterior.

**2.2.3 Análisis de Sistemas Usando Gráficas Semilogarítmicas (Bode) [8].**

Se basa en aproximaciones asintóticas, mediante asíntotas (líneas rectas), es suficiente si sólo se requiere información general sobre la característica de la respuesta en frecuencia. Si se desea obtener curvas exactas, es fácil corregir las curvas asintóticas.

Mediante el uso de diagramas de Bode a ciclo abierto se puede:

- Analizar la estabilidad del sistema, siempre que éste solo contenga elementos estables.
- Especificar y obtener el margen de ganancia ( $M_G$ ) y el ángulo de fase marginal ( $\alpha_G$ ) del sistema.
- Diseñar los sistemas en función de un margen de ganancia o fase predeterminado y magnitud máxima ( $M_m$ ).

El uso de diagramas de Bode del ciclo cerrado permite:

- Estimar el ancho de banda del sistema.
- Obteniendo la respuesta frecuencial experimentalmente, se puede obtener la función de transferencia del sistema.

- Obtener una estimación de la respuesta transitoria del sistema.
- Diseñar el sistema limitando su poder de amplificación (K).

Los factores básicos que suele representar la función de transferencia  $G(j\omega)H(j\omega)$  son:

- La ganancia K.
- Los factores integrales y derivativos  $(j\omega)^{\mp 1}$ .
- Los factores de primer orden  $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$ .
- Los factores cuadráticos  $(1 + 2\xi(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{\mp 1}$ .

#### 2.2.4 Generalidades de la Técnica Loopshaping. [2] y [3]

Para manejar la técnica de Loopshaping es necesario conocer algunos términos relacionados con la misma, en lo que respecta a incertidumbre de la planta, estabilidad robusta y desempeño nominal, los cuales son las bases iniciales para el desarrollo de dicha técnica, al igual que las funciones en el dominio de Laplace que intervienen en las mismas.

Sea un sistema como el mostrado en la figura 2.3:

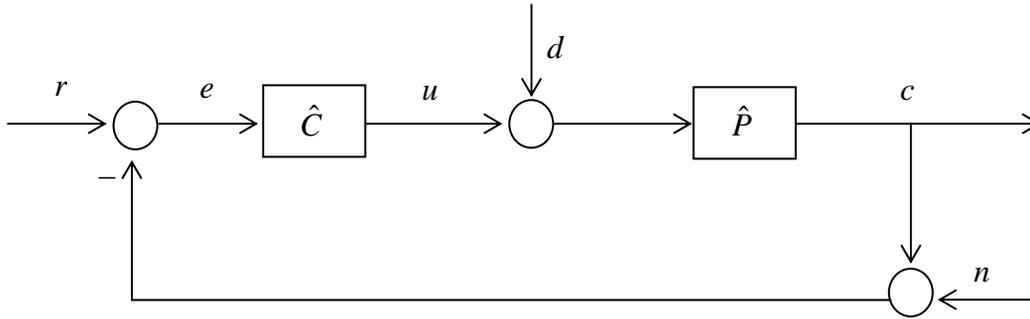


Figura 2.3. Sistema de retroalimentación unitaria. [3]

De la figura 2.3, se puede definir  $L(s) = P(s)C(s)$ , como la función de transferencia a lazo abierto del sistema. Además, se tiene que la función de transferencia de la señal de error ( $e$ ) respecto de la señal de entrada ( $r$ ) corresponde a:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (2.1)$$

A esta función se le denomina *función de sensibilidad*, su nombre proviene de lo siguiente. Sea  $T(s)$  la función de transferencia a lazo cerrado del sistema mostrado en la figura 2.3 de la señal de salida ( $c$ ) respecto a la señal de entrada ( $r$ ):

$$T(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \quad (2.2)$$

La función  $S(s)$  mide la sensibilidad de la función de transferencia a lazo cerrado  $T(s)$  ante una perturbación infinitesimal en  $P(s)$ . Esto se demuestra tomando un radio limitado de una perturbación relativa de  $T(s)$  (es decir,  $\Delta T/T$ ), para una perturbación relativa en la planta  $P(s)$  (es decir,  $\Delta P/P$ ). Definiendo a  $T(s)$  como función dependiente de  $P(s)$  y este último como variable independiente, tenemos:

$$S = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta T/T}{\Delta P/P} = \left( \frac{dT}{dP} \right) \left( \frac{P}{T} \right) = \left( \frac{C}{(1+PC)^2} \right) \left( \frac{(1+PC)}{PC} \right) P$$

Simplificando se tiene

$$S(s) = \frac{1}{1+P(s)C(s)} = \frac{1}{1+L(s)}$$

A partir de las definiciones de  $S(s)$  y  $P(s)$ , se puede obtener una relación entre ellas la cual es la que sigue:

$$S(s) + T(s) = \frac{1}{1+L(s)} + \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{1+L(s)}{1+L(s)} = 1$$

Por lo cual la función de transferencia a lazo cerrado  $T(s)$ , se le conoce como *función complementaria*.

#### 2.2.4.1 Incertidumbre de la planta

Suponga que la función de transferencia de una planta nominal es  $P$  y considere las funciones de transferencias de plantas perturbadas de la forma  $\tilde{P} = (1 + \Delta W_2)P$  (perturbación multiplicativa). Aquí  $W_2$  es una función de transferencia fija y estable, el  $\Delta$ , es una función de transferencia variable estable, que satisface  $\|\Delta\|_\infty < 1$  (véase a  $W_2$  como una función que engloba los factores no modelados de la planta (pérdidas por tubería, fugas, entre otros) y  $\Delta$ , como una función que permite la aleatoriedad de los eventos

posibles dentro de la perturbación). Además, se asume que ningunos polos inestables de  $P$  son cancelados en la formación de  $\tilde{P}$ . (Por lo que,  $P$  y  $\tilde{P}$  tienen los mismos polos inestables.) Tal perturbación  $\Delta$  se dice que es aceptable.

Del modelo de la planta perturbada se tiene:

$$\frac{\tilde{P}}{P} - 1 = \Delta W_2 \quad \rightarrow \quad \left| \frac{\tilde{P}}{P} - 1 \right| = |\Delta W_2|$$

Por desigualdad de Cauchy-Schwarz y tomando  $\|\Delta\|_\infty < 1$ ,

$$|\Delta W_2| \leq \|\Delta\|_2 \|W_2\|_2 \leq \|\Delta\|_\infty \|W_2\|_\infty \leq \|W_2\|_\infty$$

Recordando que  $\|W_2\|_\infty = \max_{\omega} |W_2(j\omega)|$ . Por tanto se tiene:

$$\left| \frac{\tilde{P}(j\omega)}{P(j\omega)} - 1 \right| \leq \max_{\omega} |W_2(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) permite obtener una función de transferencia aproximada de  $W_2$  para el modelo de perturbación de la planta propuesta, la cual será usada más adelante en el diseño del controlador apropiado.

Existen otros modelos de perturbación o incertidumbre de la planta y estos dependerán de la naturaleza del comportamiento de la misma y la forma que se ajuste más a la realidad. A continuación se presenta un sumario de los más usados:

**Tabla 2.1.** Modelos de perturbaciones más comunes. [3]

Nº	Planta Perturbada ( $\tilde{P}$ )
1	$(1 + \Delta W_2)P$
2	$P + \Delta W_2$
3	$\frac{P}{1 + \Delta W_2 P}$
4	$\frac{P}{1 + \Delta W_2}$

#### 2.2.4.2 Estabilidad robusta

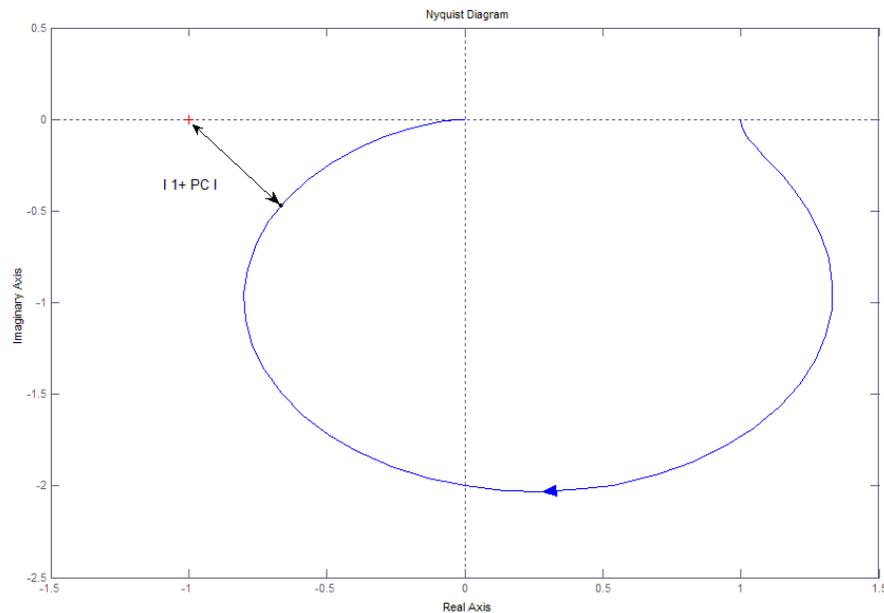
El concepto de robustez puede describirse como sigue. Supongamos que la planta de función de transferencia  $P$  pertenece a una familia de plantas del conjunto  $\mathcal{S}$ , al igual que en la Sección 2.2.4.1. Considere algunas características de la retroalimentación del sistema, por ejemplo, que es internamente estable, es decir, que cada una de las funciones de transferencias involucradas en el sistema es estable. Un controlador  $C$  genera robustez en el sistema, si este provee una estabilidad interna para cada planta de  $\mathcal{S}$  (familia de plantas generadas ante incertidumbres en el modelo), por lo que un controlador  $C$  es robusto con respecto a esta característica, si la misma lo es para cada planta en  $\mathcal{S}$ . A partir de esto se derivan dos importantes variaciones de este concepto, los cuales son, la estabilidad robusta, tratado en esta sección y el desempeño nominal del controlador, este último será desarrollado más adelante.

Se define el margen de estabilidad o margen de módulo ( $M_m$ ), como la distancia entre el punto  $(-1,0)$  y el punto más cercano de la gráfica de Nyquist

de  $L(j\omega)$  (véase Fig. 2.4), siendo este último, de importancia pues ante alguna variación de los valores nominales de la planta puede generar inestabilidad en el lazo:

$$\begin{aligned} M_m &= \min_{\omega} | -1 - L(j\omega) | \\ &= \min_{\omega} | 1 + L(j\omega) | \\ &= \left[ \max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| \right]^{-1} \\ M_m &= \|S\|_{\infty}^{-1} \end{aligned}$$

De esta última expresión note la relación entre el margen de estabilidad y la sensibilidad del sistema.



**Figura 2.4.** Sistema de retroalimentación unitaria (Nyquist). [Cortez, Mujica. 2009]

Para que un sistema sea robusto ante las variaciones de la familia de plantas  $\mathcal{S}$  respecto a la planta nominal  $P$  debe cumplir la siguiente inecuación:

$$\left| \tilde{P}(j\omega)C(j\omega) - P(j\omega)C(j\omega) \right| < \|S\|_{\infty}^{-1}, \quad \forall \omega$$

Ahora considerando las funciones de transferencias de plantas perturbadas de la forma  $\tilde{P} = (1 + \Delta W_2)P$  (del tipo multiplicativa) se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{P}C - PC \right| &= \left| P(1 + \Delta W_2)C - PC \right| = \left| \Delta W_2 L \right| \leq \|W_2 L\|_{\infty} < \|1 + L\|_{\infty} \\ \|W_2 T\|_{\infty} < 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{W_2(j\omega)L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| < 1, \quad \forall \omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

O bien,

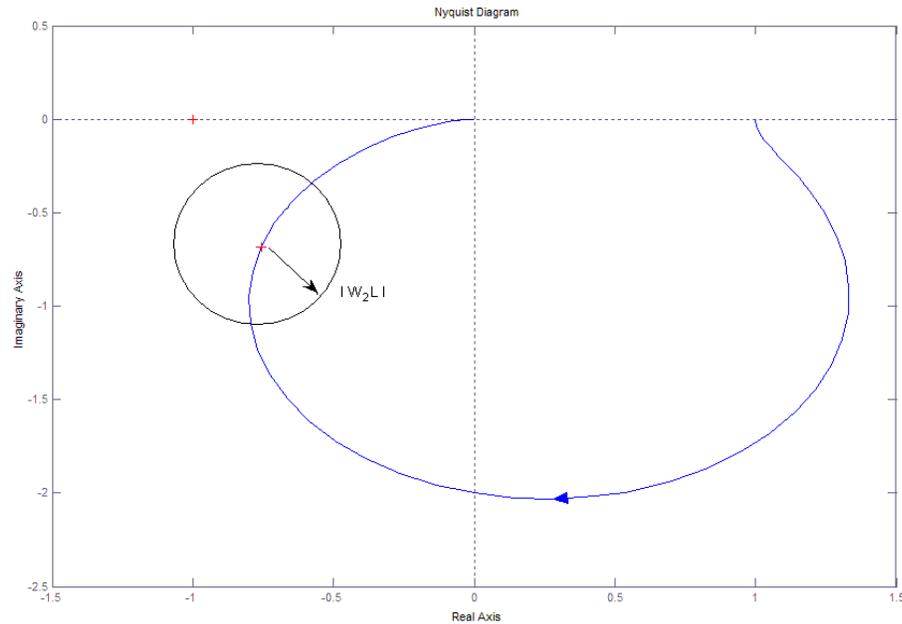
$$\left| W_2 L \right| < \left| 1 + L \right| \quad (2.5)$$

Una interpretación gráfica de la inecuación (2.3) corresponde a un círculo de radio  $\left| W_2(j\omega)L(j\omega) \right|$  y centro  $L(j\omega)$  no debe encerrar al punto crítico  $(-1,0)$  para cualquier frecuencia (véase en la figura 2.5).

A partir de lo visto hasta ahora se puede generar el siguiente teorema [2]:

*“Consideremos un sistema como el mostrado en la figura 2.5, descrita por una familia de plantas  $\mathcal{S}$  con el mismo número de polos en el semiplano derecho. Sea un controlador  $C(s)$  tal que estabiliza la planta nominal  $P_n(s)$ . Entonces toda la familia de modelos  $\mathcal{S}$  será estabilizado por el controlador  $C(s)$  si y solo si.”*

$$\|W_2(s)T(s)\|_{\infty} = \max_{\omega} |W_2(j\omega)T(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (2.6)$$



**Figura 2.5.** Interpretación gráfica de la estabilidad robusta. [Cortez, Mujica. 2009]

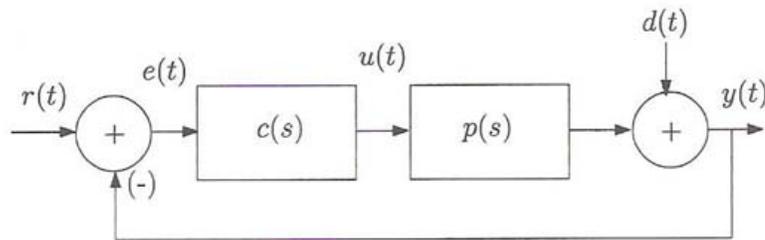
Es necesario recordar que para la formulación de este teorema, se usó la incertidumbre multiplicativa, debido a su simplicidad en la determinación de la función de peso  $W_2$ , por lo que hay que tener presente que la condición de estabilidad robusta viene determinada según el tipo de representación de incertidumbre usado. A continuación se recoge las equivalencias en la condición de robustez según el tipo de incertidumbre:

**Tabla 2.2.** Equivalencias entre medidas de incertidumbre. [2]

Nº	Planta Perturbada ( $\tilde{P}$ )	Condición
1	$(1 + \Delta W_2)P$	$\ W_2 T\ _\infty < 1$
2	$P + \Delta W_2$	$\ W_2 CS\ _\infty < 1$
3	$\frac{P}{1 + \Delta W_2 P}$	$\ W_2 PS\ _\infty < 1$
4	$\frac{P}{1 + \Delta W_2}$	$\ W_2 S\ _\infty < 1$

### 2.2.4.3 Desempeño nominal

Considérese el lazo de control de la figura 2.6. El desempeño de un sistema se mide, entre otros y en el ámbito del control clásico, como la capacidad de seguir una señal de referencia determinada  $r(t)$  o de rechazar una perturbación de forma conocida  $d(t)$  en la salida del sistema  $y(t)$ .



**Figura 2.6.** Lazo clásico de control [2].

En el primer caso el desempeño se puede medir a través de la señal del error de la siguiente forma:

$$e(s) = \frac{r(s)}{1 + P(s)C(s)} = S(s)r(s) \tag{2.7}$$

Y en el segundo caso a través de la salida:

$$y(s) = S(s)d(s) \quad (2.8)$$

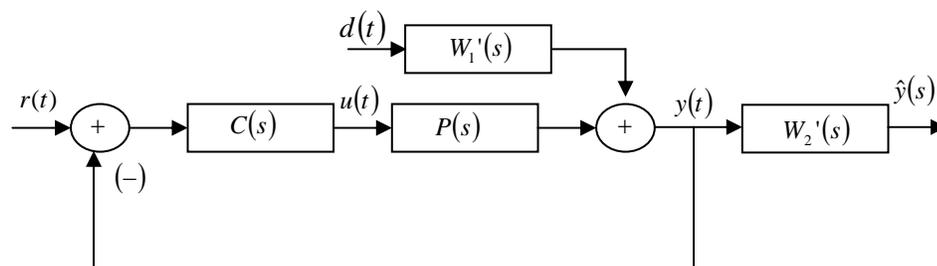
A partir de lo visto hasta ahora se puede generar el siguiente teorema [2]:

*“El sistema de control de la figura 2.8 satisface la condición de desempeño nominal si y solo si:”*

$$\|S(s)\|_{\infty} \leq 1 \quad (2.9)$$

Adicionalmente, si se tiene algún tipo de conocimiento del ancho de banda de las señales de perturbación o referencia y pudiese reflejarse como una función de peso en las entradas de esas señales, esquemáticamente dichos pesos se pueden representar como lo muestra la figura 2.7, lo que genera una extensión de la condición de desempeño nominal, la cual se representa de la siguiente manera:

$$\|W_1'(s)S(s)W_2'(s)\|_{\infty} \leq 1 \quad \text{ó} \quad \|W_1(s)S(s)\|_{\infty} \leq 1 \quad (2.10)$$



**Figura 2.7.** Sistema con pesos (filtros) en entradas y salidas [2].

Donde la función de peso  $W_1(s)$  recoge las *bandas de insensibilidad* del diseño ( $W_1'(s)$  y  $W_2'(s)$ ).

### 2.2.5 Técnica de Control Loopshaping [3].

La técnica de control de Loopshaping consiste, en obtener un controlador  $C$  aproximado, a partir del diseño una función de transferencia a lazo abierto  $L$  y de la relación  $C = L/P$ , tal que al controlar la planta  $P$ , cumpla las condiciones de estabilidad robusta y desempeño nominal simultáneamente. Dichas condiciones están contenidas en la desigualdad (2.11), la cual se muestra a continuación:

$$\|W_1S + W_2T\|_{\infty} < 1 \quad (2.11)$$

Para aplicar esta técnica de control, el sistema de retroalimentación debe cumplir que, la planta  $P$  sea internamente estable y que  $P$ ,  $W_1$ , y  $W_2$  sean datos del sistema.

A partir de la ecuación (2.11), se puede expresar la misma en términos de  $W_1$ ,  $W_2$  y  $L$ , quedando la desigualdad (2.12), la cual es la que sigue:

$$\Gamma(j\omega) = \left| \frac{W_1(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| + \left| \frac{W_2(j\omega)L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| < 1 \quad (2.12)$$

La idea en Loopshaping es de conseguir las condiciones de  $L$  tal que la desigualdad (2.12) se cumpla para cualquier valor de frecuencia (para un tratamiento más extensivo véase [8], capítulo 7).

Posteriormente al ser simplificada la condición de la inecuación (2.12) bajo ciertas consideraciones y en función de los parámetros  $W_1$  y  $W_2$ , se obtiene el rango, tal que acota y permite que la función de transferencia  $L$  cumpla las condiciones de robustez y desempeño nominal, las cuales se muestran en la tabla 2.3.

**Tabla 2.3.** Ecuaciones fundamentales de la Técnica de Control Loopshaping [3]

$ W_1  \gg 1 >  W_2 $	$ L  > \frac{ W_1 }{1 -  W_2 }$
$ W_1  < 1 \ll  W_2 $	$ L  < \frac{1 -  W_1 }{ W_2 }$

Con las condiciones anteriores el diseño de Loopshaping se hace mediante los siguientes pasos:

a. Trazar dos curvas por la escala de log - log, la magnitud vs. la frecuencia

- Primero se grafica la curva de la ecuación (2.13) en los rangos de baja frecuencia donde  $|W_1| > 1 > |W_2|$

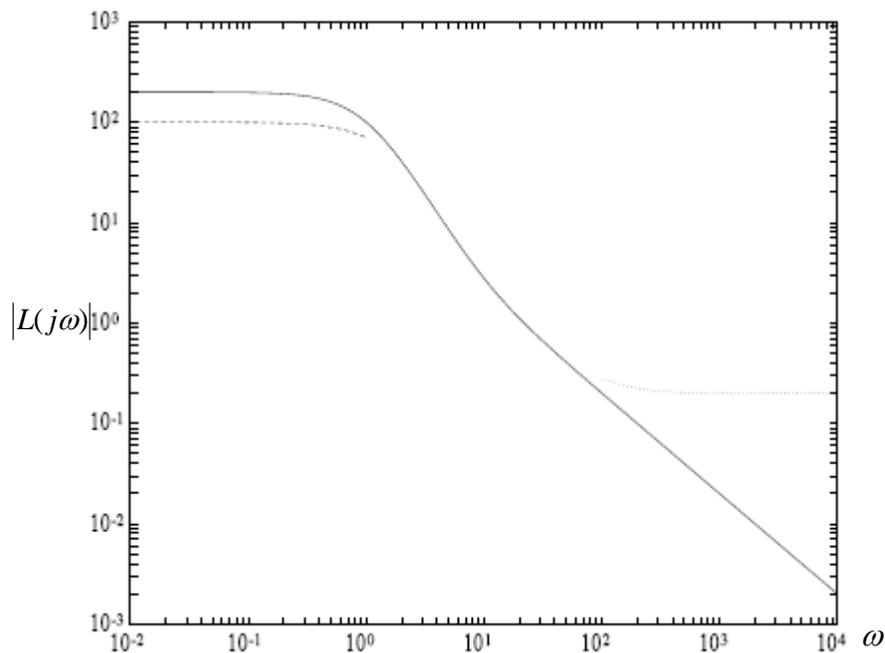
$$\frac{|W_1|}{1 - |W_2|} \quad (2.13)$$

- Posteriormente se gráfica la ecuación (2.14) en los rangos de alta frecuencia donde  $|W_1| < 1 < |W_2|$ .

$$|L| > \frac{1 - |W_1|}{|W_2|} \quad (2.14)$$

- b. Sobre las curvas anteriormente realizadas, se gráfica la curva de  $|L|$ . A frecuencias bajas ésta debe encontrarse por encima de la primera gráfica (2.13) la cual es mayor a la unidad ( $>1$ ), a altas frecuencias ésta debe encontrarse por debajo de la segunda gráfica (2.14) y que sea menor a la unidad ( $<1$ ); cuando las frecuencias son muy elevadas en magnitud la curva desciende al menos tan rápido como lo hace  $|P|$ , la cual experimenta una transición de baja a alta frecuencia manteniéndose constante, cerca de la frecuencia donde la magnitud se iguala a la unidad (1).
- c. Se debe diseñar una función de transferencia  $|L|$  de fase mínima que cumpla en el diagrama de Bode que  $L(0) > 0$  y debe a su vez satisfacer las inecuaciones (2.13) y (2.14).

Normalmente las gráficas de la función de transferencia diseñada y de las cotas de las expresiones (2.13) y (2.14) se comportan como la mostrada en la figura 2.8.



**Figura 2.8.** Los diagramas de Bode de  $|L|$  (línea continua),  $|W_1|/(1-|W_2|)$  (línea de trazos), y  $(1-|W_1|)/|W_2|$  (línea punteada). [3]

d. Después de haber realizado los pasos anteriores se valida el diseño verificando su estabilidad interna y la desigualdad (2.12) simultáneamente, de lo contrario debe repetirse los pasos anteriores.

e. Cumplido el paso (d) se procede a calcular el controlador a través de la definición  $C = L/P$ .

### 2.2.6 Índices de Desempeño de Controladores [6].

Los índices de desempeño tratan de comparar la calidad de la regulación del controlador y el esfuerzo de control necesario para alcanzarla.

A continuación se procederá a definir la manera de determinar las características:

#### Precisión

La precisión es un parámetro relacionado con el error que tiene el sistema controlado excitado por una rampa de pendiente  $\tau$ , al cabo de  $2\tau$ . Se realiza el estudio ante una rampa de éste tipo, debido a que la velocidad de respuesta del sistema no retroalimentado depende de dicha característica. El error cometido es el siguiente:

$$e = \lim_{t \rightarrow 2\tau} \frac{\tau * t - y(t)}{\tau * t} * 100$$

Donde:

$\tau$  Es la constante de tiempo del sistema en lazo abierto.

$\tau * t$  Es una entrada rampa.

Y la precisión será:

$$\text{Precisión} = 100 - e \quad (2.27)$$

La razón del porque comparar el sistema controlado con una rampa de pendiente  $\tau$ , es debido a que mientras menor sea este parámetro, mayor es la rapidez en la respuesta del sistema, por lo que es necesario incrementar la exigencia del mismo disminuyendo la pendiente de la señal en rampa que

debe seguir el sistema. Además se usa la constante de tiempo en lazo abierto, para que este atributo no dependa del controlador, sino que sea independiente de él.

### Sobrepico

El sobrepico máximo de la respuesta transitoria del sistema controlado que se calcula como:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} * 100 \quad (2.28)$$

Donde

$t_p$  es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobrepico.

Si la respuesta transitoria no presenta sobrepico, el  $M_p$  es 0%.

### Persistencia.

Este parámetro está relacionado con la capacidad del sistema controlado para rechazar las perturbaciones que lo puedan afectar, es decir, de mantener la salida dentro de un rango aceptable.

En el caso que la perturbación sea de tipo escalón de amplitud A, la manera de calcular este atributo es:

$$Persistencia = \left[ \left( 1 - \frac{IAE}{A * \tau} \right) * porcentaje\ perturbaciones \right] \quad (2.30)$$

Siendo:

$$IAE = \int_{t_1}^{t_2} |e(t)| dt$$

$\tau$  la constante de tiempo del sistema en lazo abierto.

Se ha elegido la constante de tiempo del sistema en lazo abierto, porque no varía. Si fuese la de lazo cerrado, quedaría determinada por el controlador, y este atributo no sería independiente de él.

En el caso que sea un pulso de área B, este atributo se calcula como:

$$Persistencia = \left[ \left( 1 - \frac{IAE}{B} \right) * porcentaje\ perturbaciones \right] \quad (2.31)$$

Siendo  $IAE$ , la misma función definida anteriormente:

Si  $\left( 1 - \frac{IAE}{B} \right) < 0$  entonces la persistencia vale 0%, es decir, el sistema es completamente afectado por las perturbaciones (no rechaza ninguna).

Hay que tener en cuenta que el rechazo a perturbaciones es una especificación de diseño del controlador; por lo que, su evaluación queda, en cierta medida, a criterio del ingeniero de control.

En caso de que exista más de un tipo de perturbaciones, este índice valdrá el máximo valor de todas ellas.

**Robustez.**

La robustez es un parámetro que se relaciona con la capacidad del sistema realimentado de mantener la salida dentro de los valores especificados, frente a variaciones de los parámetros del sistema en lazo abierto y a dinámicas no modeladas.

El margen de fase y el margen de ganancia proporcionan una medida de la estabilidad del sistema. Los márgenes de fase y magnitud proporcionan una medida del cambio máximo que pueden sufrir los parámetros del sistema (ganancia, retardos, dinámicas no modeladas, etc.) y que éste siga siendo estable.

Teniendo en cuenta estos márgenes, y sabiendo cual será la máxima variación de los parámetros que afectan a estas dos variables, se definirá el índice que aquí se denomina índice de robustez como:

$$\text{Indice Robustez} = \frac{\frac{MF}{MF_{nom}} + \frac{MG}{MG_{nom}}}{2} \quad (2.32)$$

Si se realiza el análisis de la robustez sobre un sistema en un rango de incertidumbre, se tomará el menor índice de robustez generado.

**Agresividad.**

La agresividad es un parámetro que representa la rapidez del sistema para responder a los cambios de consigna. Se definirá como la relación porcentual entre el tiempo de subida ( $t_r$ ) y el tiempo de establecimiento ( $t_s$ ).

$$\text{Agresividad} = 100 - \frac{t_r}{t_s} * 100 \quad (2.33)$$

### 2.2.7 Acciones de Control Tradicional [8].

Acción de control proporcional (P): la relación entre la salida del controlador  $u(t)$  y el error  $e(t)$  es, en cantidades transformadas de Laplace  $\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$ , donde  $K_p$  se define como la ganancia proporcional. Esta acción de control es directa pero produce desajustes.

Acción de control integral (I): la función de transferencia del control integral es  $\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{T_i s}$ , donde  $T_i$  es el tiempo integral. Con los controladores I, la eliminación del desajuste es completa, pero existe una tendencia a la sobre corrección lo que produce respuestas oscilatorias.

Acción de control derivativo (D): es aquella en que la acción de control es proporcional a la rata de cambio del error. Su función de transferencia es  $\frac{U(s)}{E(s)} = T_d s$ , donde  $T_d$  es el tiempo derivativo. Si el error varia rápidamente se obtiene grandes correcciones, pero si es constante es imposible corregirlo.

Acción de control proporcional - integral (PI): esta acción es proporcional al error y a la integral del error, la cual se define por la siguiente función de transferencia  $\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( \frac{1}{T_i s} + 1 \right)$ , esta combinación se utiliza en gran escala, pues reúne la simplicidad del control proporcional y elimina el desajuste a través del integrador, sin embargo el tiempo de respuesta es largo.

Acción de control proporcional – derivativo (PD): esta acción de control se define mediante la función de transferencia  $\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (T_d s + 1)$ . Esta combinación

posee las características deseables de ambas acciones, pero no elimina el desajuste.

Acción de control proporcional – integral - derivativo (PID): la acción de control es proporcional al error y a la rata de cambio, está definida por la función de transferencia  $\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$ . Esta combinación provee la simplicidad y estabilidad del control proporcional, la rapidez de respuesta de la acción derivativa y la eliminación del desajuste de la acción integral, pero a un costo y complejidad mayor

### 2.3 Definición de Términos Básicos. [8], [6]

**Ancho de banda:** Indica la frecuencia a la cual la ganancia empieza a rebasar su valor de baja frecuencia.

**Atenuación:** Es la magnitud que expresa la relación entre una señal de salida, con respecto a la señal de entrada, dando como resultado un valor negativo.

**Factor de amortiguamiento:** Es el cociente entre el amortiguamiento real y al amortiguamiento crítico.

**Frecuencia:** Es una medida para indicar el número de repeticiones de cualquier fenómeno o suceso periódico en una unidad de tiempo.

**Ganancia:** Es la magnitud que expresa la relación entre una señal de salida, con respecto a la señal de entrada, dando como resultado un valor positivo.

**Perturbaciones:** Señal que tiende a afectar negativamente el valor de salida de un sistema.

**Planta:** Es el sistema donde se pretender actuar.

**Robustez:** Es la capacidad que tiene el sistema de mantener dentro de un rango aceptable el valor de la salida del sistema controlado cuando existen perturbaciones internas (propias del sistema).

**Ruido:** Interferencia que afecta un proceso de comunicación.

**Señal de entrada:** Es un estímulo o excitación aplicada a un sistema de control proveniente de una fuente externa usualmente utilizada para producir una respuesta específica del sistema.

**Señal de salida:** es la respuesta obtenida de un sistema de control. Esta puede o no ser igual a la respuesta implicada por la señal de entrada.

**Servomecanismo:** Mecanismo que regula automáticamente su propia acción para corregir las deficiencias o variaciones que pudieran producirse en el funcionamiento de otro mecanismo controlado por él.

**Sistema:** Combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado.

**Sobrelongación:** Es el máximo valor pico de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad.

**Tiempo de asentamiento:** Es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado.

**Tiempo del primer pico:** Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el valor del primer pico de sobrelongación.

**Tiempo de retardo:** Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.

**Tiempo de subida:** Es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 a 90%, del 5 al 95% o del 0 al 100% de su valor final.

**Válvula proporcional:** Este tipo de válvulas regula la presión y el caudal a través de un conducto por medio de una señal eléctrica, que puede ser de corriente o voltaje. Su principal aplicación es el control de posición y de fuerza, ya que los movimientos son proporcionales y de precisión, lo que permite un manejo más exacto del paso de fluidos, en este caso del aire.



## CAPÍTULO III: Marco Metodológico

---

*En este capítulo se presenta la metodología que permite desarrollar el presente Trabajo Especial de Grado. Se muestran aspectos como: el tipo de investigación, las técnicas y procedimientos utilizados para llevar a cabo este proyecto.*

### 3.1 NIVEL DE LA INVESTIGACIÓN

Al ser esta investigación de tipo Proyecto Factible, como ya se indicó, lo es también de tipo Descriptiva y Explicativa. Una Investigación de tipo Descriptiva, según Sabino (1986) es aquella que:

*“Su preocupación primordial radica en describir algunas características fundamentales de conjuntos homogéneos de fenómenos, utilizando criterios sistemáticos que permitan poner de manifiesto su estructura o comportamiento. De esta forma se pueden obtener las notas que caracterizan a la realidad estudiada.”*

Esta investigación se caracteriza por describir e identificar el comportamiento a través de la técnica Loopshaping de un elemento (actuador) como análisis previo con el fin de establecer su comportamiento real, por este motivo es una investigación descriptiva.

### 3.2 PROCEDIMIENTOS METODOLÓGICOS

La investigación se llevará a cabo mediante los siguientes pasos:

- Recopilar información teórica sobre la Técnica Loopshaping, los elementos de control o servomecanismos a utilizar.
- Analizar la técnica de control Loopshaping con el propósito de implementarla para el diseño del esquema de control.
- Modelación matemática lineal de la planta, en función de los elementos que lo conforman: válvula proporcional y actuador de

doble efecto – doble vástago, tomando en consideración las simplificaciones a lugar.

- Diseño del sistema de control mediante la teoría de Loopshaping para controlar las variables de posición, velocidad y fuerza del actuador.
- Simular el esquema de control diseñado con el programa computarizado Matlab para, analizar su respuesta cuando es sometido a diferentes señales de entrada y de esta manera comprobar la estabilidad del sistema controlado.
- Diseño del sistema de control mediante la teoría de control clásica (PI, PD) para controlar las variables de posición, velocidad y fuerza del actuador.
- Simular el esquema de control diseñado por la teoría de control clásica con el programa computarizado Matlab para, analizar su respuesta cuando es sometido a diferentes señales de entrada y de esta manera comprobar la estabilidad del sistema controlado.
- Comparar de los resultados obtenidos de las diferentes técnicas de control y analizar la información a fin de presentar los resultados.



# CAPÍTULO IV: Modelación matemática y diseño de controladores

---

*Este capítulo se define la planta de estudio y se le realiza la modelación matemática a cada uno de sus componentes mediante las siguientes leyes: 2da Ley de Newton, Ley de la Conservación de la Energía, Ley de los gases. Para la obtención de la planta se realizó el proceso de linealización mediante las series de Taylor, posteriormente, se desarrollará los controladores mediante la técnica de control Loopshaping y las técnicas de control tradicionales (PI, PD). El diseño de los controladores se realizó mediante la herramienta de computación Matlab.*

#### 4.1 Modelación Matemática de la Planta [7].

El sistema que se muestra en la figura 4.1 es la planta en estudio.

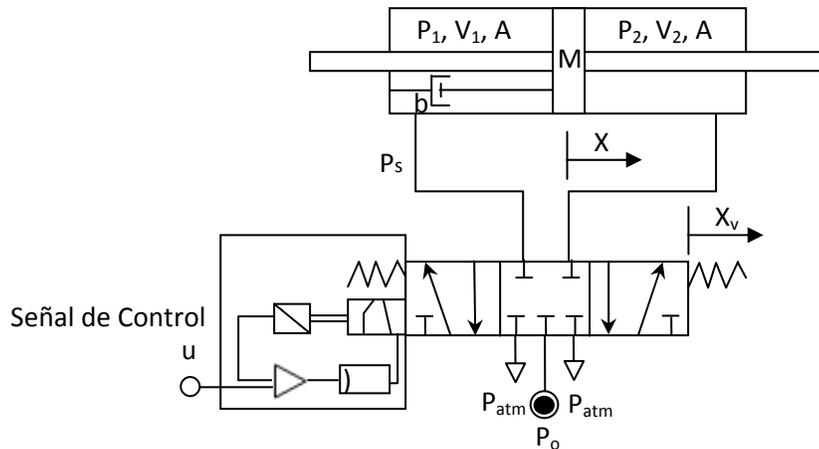


Figura 4.1. Diagrama de conexión neumática de la planta a estudiar [5].

##### a) En el actuador

La ecuación de movimiento (2da. Ley de Newton) para el actuador es:

$$\sum F_x = (P_1 - P_2)A - b\dot{X}(t) = M\ddot{X}(t) \quad (4.1)$$

Siendo  $X$  la posición del actuador respecto a su estado de reposo,  $M$  es la masa combinada del vástago y el émbolo del actuador.  $P_1$  y  $P_2$  son las presiones absolutas en cada una de las cámaras del actuador,  $b$  es el coeficiente de fricción viscosa y  $A$  es el área anular del pistón.

Suponiendo que el sistema es adiabático en cualquier movimiento (extensión y retracción), las ecuaciones diferenciales relacionadas a la cantidad de masa de aire que entra o sale de cada cámara del cilindro (las

cuales provienen de la ley de la conservación de la energía) son las siguientes:

$$\dot{m}_e(t) = \frac{P_1(t)\dot{V}_1(t)}{RT_0} + \frac{\dot{P}_1(t)V_1(t)}{CpT_0} \quad (4.2)$$

$$\dot{m}_s(t) = \frac{P_2(t)\dot{V}_2(t)}{RT_2} + \frac{\dot{P}_2(t)V_2(t)}{CpT_2} \quad (4.3)$$

Donde;

$\dot{m}_e$  = Masa de entrada al actuador (cámara 1).

$\dot{m}_s$  = Masa de salida del actuador (cámara 2).

$V_1, V_2$  = Son los volúmenes de cada cámara de actuador, que dependen de la posición del actuador.

$R$  = Constante del gas (aire).

$T_2$  = Temperatura a la cual se encuentra la cámara 2.

$T_0$  = Temperatura de estancamiento del aire de la fuente.

$C_p$  = Calor específico del aire a presión constante.

$P_1, P_2$  = Presión en cada una de las cámaras.

Se tiene que  $\dot{V}_1 = A\dot{X}$  y  $V_2 = A(L - X)$  sustituyendo en la ecuación anterior se tiene:

$$\dot{m}_e(t) = \frac{P_1(t)A\dot{X}(t)}{RT_0} + \frac{\dot{P}_1(t)AX(t)}{CpT_0} \quad (4.4)$$

$$\dot{m}_s(t) = -\frac{P_2(t)A\dot{X}(t)}{RT_2} + \frac{\dot{P}_2(t)A(L - X(t))}{CpT_2} \quad (4.5)$$

Debido a que las ecuaciones (4.4) y (4.5) son funciones multivariadas no lineales, no es posible aplicarle la transformada de Laplace, de manera directa por lo que requerirá linealizar estas ecuaciones, para su posterior transformación al plano complejo. Dicha linealización se desarrolló en el Anexo A de la presente investigación.

Linealizando la ecuación (4.4) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\dot{m}_e(t) = \frac{AP_0}{RT_0} \dot{X}(t) + \frac{AL}{C_p T_0} \dot{P}_1(t) \quad (4.6)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior se tiene:

$$\dot{M}_e(s) = \frac{AP_0}{RT_0} sX(s) + \frac{AL}{C_p T_0} sP_1(s) \quad (4.7)$$

Linealizando la ecuación (4.5) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\dot{m}_s(t) = -\frac{AP_a}{RT_2} \dot{X}(t) \quad (4.8)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior se tiene:

$$\dot{M}_s(s) = -\frac{AP_a}{RT_2} sX(s) \quad (4.9)$$

b) En la válvula de control (proporcional)

Considerando a la boquilla de conexión con el actuador como una tobera convergente, la ecuación no lineal que rige el flujo másico de aire a través de cada orificio de la válvula de control es la siguiente

$$\dot{m}_e = \begin{cases} A_v \left[ \frac{\gamma}{R} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right]^{1/2} \frac{P_0}{\sqrt{T_0}} & P \leq P^* \\ \frac{A_v P_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{P}{P_0} \right)^{2/\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]} & P > P^* \end{cases} \quad (4.10)$$

Donde  $A_v$  es el área del orificio de descarga de la válvula,  $\gamma$  es la relación de calores específicos,  $P_s$  y  $T_s$  es la presión y la temperatura de estancamiento de suministro de aire comprimido a la planta respectivamente y  $P^*$  es la presión crítica o presión donde ocurre el fenómeno de estrangulamiento del flujo (choque) la cual depende de las propiedades del fluido y la presión de estancamiento de suministro  $P_s$ ; que para el caso del aire corresponde a:

$$P^* = 0.528 P_s \quad (4.11)$$

Según Itchmann [5] cuando el pistón se encuentre en movimiento el valor de presión de la cámara a la cual se le inyecta flujo permanece en cercanías de la presión atmosférica, pero por debajo de la presión de suministro  $P_s$ , de lo contrario no entraría el flujo de aire a la cámara sino que saldría de ella. Dicha cámara solo alcanzará la presión de suministro cuando su volumen llegue al máximo y por consecuencia no entre flujo de aire hacia ella.

Puesto que la presión crítica generalmente está por encima la atmosférica, debido a que la presión de suministro oscila entre 6 a 10 bar, por lo que el flujo de aire según la ecuación (4.6) estará estrangulado ( $P \leq P^*$ ) durante su extensión por lo tanto la ecuación (4.6) queda de la siguiente manera, pasando a ser la ecuación (4.12):

$$\dot{m}_e(t) = A_v(t) \left[ \frac{\gamma}{R} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right]^{1/2} \frac{P_0}{\sqrt{T_0}} \quad (4.12)$$

Aplicando transformada de Laplace a la expresión anterior, se tiene:

$$M_e(s) = \left[ \frac{\gamma}{R} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right]^{1/2} \frac{P_0}{\sqrt{T_0}} A_v(s) \quad (4.13)$$

Donde  $A_v(s)$  es el área variable del orificio de la válvula por donde circula el flujo de aire, dado a que a medida que se mueve el spool de la válvula el área del orificio cambia. Puede modelarse como una función proporcional a la posición del spool de la válvula, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$A_v(s) = wX_v(s) \quad (4.14)$$

La constante de proporcionalidad  $w$  fue determinada experimentalmente a través el valor promedio de la variación del área respecto a la posición del spool de la válvula de control. Por corresponder a un gradiente de área.

La relación entre la tensión de entrada  $u(t)$ , y la posición del spool de la válvula  $X_v(t)$ , es a menudo el modelo como una simple ganancia. Sin

embargo, la válvula de control está descrita como una función de transferencia de primer orden.

$$X_v(s) = \frac{K_v}{\tau_v s + 1} U(s) \quad (4.15)$$

La función de transferencia del sistema, se obtiene de las ecuaciones (4.7), (4.9), (4.13), (4.14) y (4.15) es (el proceso se muestra en el anexo A):

$$\frac{X(s)}{U(s)} = P(s) = \frac{K}{s(\tau_v s + 1)(s^2 + K_1 s + K_2)} \quad (4.16)$$

Siendo las constantes:

$$K = \frac{w C_P P_0 K_v \sqrt{T_0}}{ML} \left[ \frac{\gamma \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}{R(\gamma + 1)} \right]^{1/2}$$

$$K_1 = \frac{b}{M} \quad K_2 = \frac{A C_P P_0}{RML}$$

## 4.2 Diseño del Controlador por Loopshaping.

El diseño del controlador se realizará a través del método gráfico mostrado en el capítulo II, sobre un sistema como el mostrado en la figura 4.2. Como el método a aplicar depende de las funciones de peso que engloban las incertidumbres del sistema ( $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$ ); por tanto es necesario determinar a las mismas.

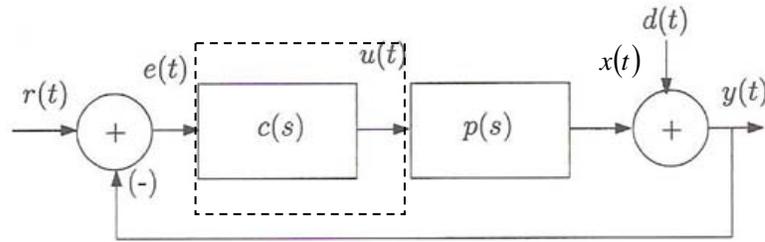


Figura 4.2. Lazo clásico de control [2].

#### 4.2.1 Determinación de $W_1(s)$ [3]

Como la función de peso  $W_1(s)$  tiene la propiedad de amplificar las perturbaciones internas tales como: aproximaciones de los parámetros, como constante de tiempo de la válvula, presión de suministro y ganancia de la válvula; y externas como: cambios en el ambiente, ruido y vibraciones, entre otros; se puede tomar para una  $W_1(s)$  para simplificar su determinación, como una función de magnitud constante en el rango de frecuencias de  $[0,1]$  y nulo, para el resto de las frecuencias, debido a que  $W_1(s)$  tiene que incrementar los efectos de dichas perturbaciones a bajas frecuencias, y reducir o eliminar éstas, a altas frecuencias; debido a que las perturbaciones externas e internas tienden a afectar con mayor significancia en el rango de bajas frecuencias, por lo que queda de la siguiente manera:

$$|W_1(j\omega)| = \begin{cases} K_o & \text{si } 0 \leq \omega \leq 1 \\ 0 & \text{si } \omega > 1 \end{cases} \quad (4.17)$$

Donde  $K_o$  es una constante arbitraria, ésta tomará un valor inicial mayor a la unidad (para cumplir la función amplificadora del error) y permitir el cálculo respectivo de las cotas (superior e inferior) de Loopshaping, y ajustar

la cota inferior a través de la gráfica  $L(s)$  seleccionada de manera de modo que sea lo más ajustada a dicha gráfica.

#### 4.2.2 Determinación de $W_2(s)$ [2]

La función de peso  $W_2(s)$  se determinará acotando la magnitud del error normalizado por la ecuación (2.3).

Los valores de los parámetros que componen las constantes que intervienen en la función de transferencia (4.16) se muestran en la tabla 4.1; con dichos valores, se determinará la planta nominal de posición y velocidad del émbolo del sistema quedando de la siguiente forma:

$$P_{n,pos}(s) = \frac{2081}{s(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)} \quad (4.18)$$

$$P_{n,vel}(s) = \frac{2081}{(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)} \quad (4.19)$$

Para generar la familia de plantas perturbadas y obtener la cota de la magnitud del error normalizado, se variaron los parámetros indicados en el sistema según los rangos de incertidumbres que se muestran en la tabla 4.2.

**Tabla 4.1.** Parámetros de la planta de estudio [7].

Parámetros	Unidades	Símbolo	Valor
Presión de Alimentación	bar	$P_s$	5,00
Presión Atmosférica	bar	$P_{atm}$	1,00
Masa del pistón	kg	$M$	1,91
Coefficiente Viscoso	N-s/m	$b$	70,0
Área Anular del pistón	cm <sup>2</sup>	$A$	10,6
Carrera del pistón	mm	$L$	500
Constante del gas ideal	J/kg-K	$R$	287
Temperatura del aire	K	$T$	300
Relación de calores específicos		$\gamma$	1,40
Factor de corrección de trabajo volumen – presión	-	$\alpha$	0,89
Coefficiente de descarga de la válvula	-	$C_d$	0,70
Gradiente de área del orificio de la válvula	mm <sup>2</sup> /mm	$w$	22,6
Volumen muerto de la válvula	cm <sup>3</sup>	$V$	0,60
Ganancia del spool de la válvula	mm/V	$K_v$	0,25
Constante de tiempo de 1 <sup>er</sup> orden	ms	$\tau_v$	4,20
Calor específico a presión constante	J/kg-K	$C_p$	1005
Calor específico a volumen constante	J/kg-K	$C_v$	718

**Tabla 4.2.** Rango de valores de la planta de estudio [7].

Parámetros	Unidades	min	Nominal	Máx.
$P_s$	bar	4	5	10
$M$	kg	1.81	1.91	2,01
$b$	N-s/m	60	70	80
$\tau_v$	ms	3.4	4.2	5,0

El proceso de acotado se realizará en función del diagrama de Bode de magnitud, de las familias de curvas del error normalizado a distintas frecuencias. Para este propósito, se diseñó el programa 4.1 en MATLAB®, el cual generará una amplia gama de curvas (en total 256 curvas) abarcando las combinaciones posibles entre todas las incertidumbres a estudiar sobre nuestro sistema, ver figura 4.3. Obtenido dicho diagrama, se buscará una función tal, que cumpla la condición mostrada en la relación (2.3).

**Programa 4.1.** Familia de curvas de error normalizado de la posición y velocidad del embolo del actuador.

```

n=4; % Numero de elementos a tomar por variable
cont=0 % Variable para contar n° de curvas generadas
Po=linspace(4e5, 10e5, n); % Genera vectores con "n" valores equidistantes
M=linspace(1.81, 2.01, n); % incluyendo los extremos indicados
b=linspace(60, 80, n);
tv=linspace(3e-3, 5e-3, n);
numGn=[0 0 0 2081]; % Numerador de la planta nominal
denGn=[4.2e-3 1 0]; % Denominador de la planta nominal
denGn=conv(denGn,[1 36.65 1943]); % Denominador de la planta nominal
sysGn=tf(numGn,denGn) % Muestra función de transferencia de la planta
nominal

for i=1:n, % Inicio de ciclos de variación de parámetros
    for j=1:n, % la planta
        for k=1:n,
            for l=1:n,
                K=7.95e-3*Po(i)/M(j);
                K1=b(k)/M(j);
                K2=7.424e-3*Po(i)/M(j);
                numG=[0 0 0 K];
                denG=[tv(l) 1 0];
                denG=conv(denG,[1 K1 K2]);
            end
        end
    end
end

```

```

sysG=tf(numG,denG)           % Muestra función de transferencia
                             % de la planta perturbada

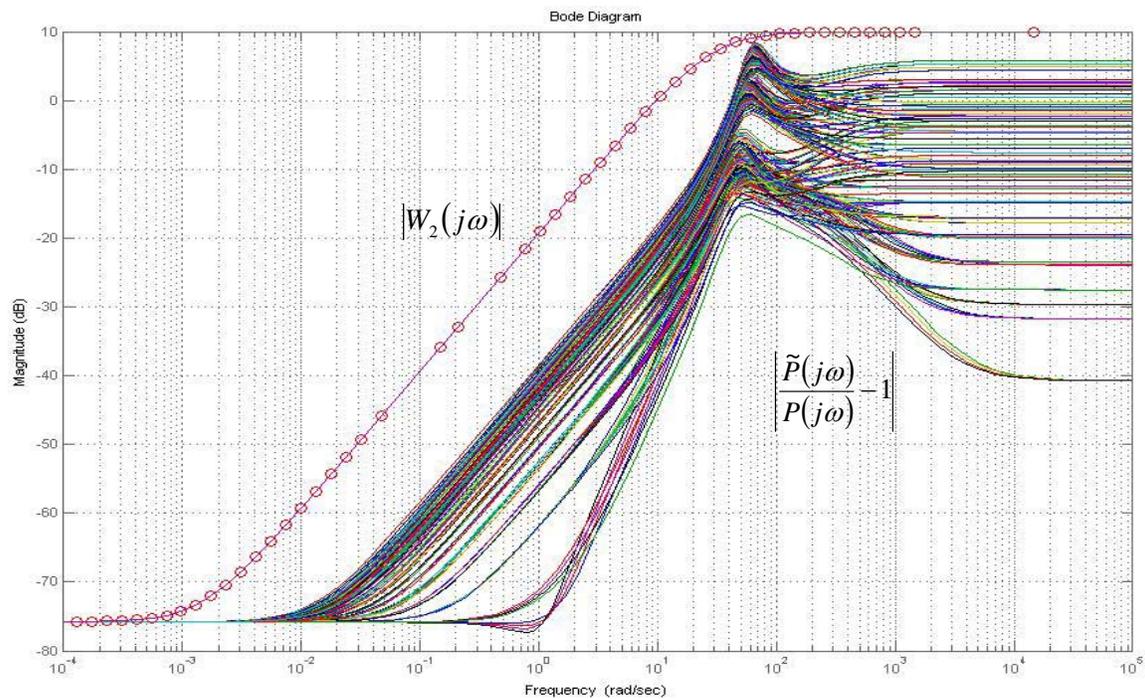
sysENor=(sysG-sysGn)/sysGn; % Calculo de error normalizado
bodemag(sysENor)           % Trazado de la curva de magnitud del error
                             % normalizado Bode de la planta perturbada

hold on                     % Mantiene la ultima gráfica

cont=cont+1

end
end
end
end                           % Final de ciclos de variación de parámetros
                             % de la planta

```



**Figura 4.3.** Error normalizado de la posición y velocidad (conjunto de curvas sobrepuestas) y cota del error ( $W_2$ ).

Según la figura 4.3 se observa que el comportamiento del error normalizado es creciente, por lo que se acotará la misma con una función tal que sea constante a bajas y altas frecuencias, y presente una inclinación de 20 dB/década en las frecuencias medias. Una función de ese tipo corresponde a una de la forma:

$$W_2(s) = \frac{K_w(s + \varphi)}{(s + \beta)}$$

Las constantes  $K_w$ ,  $\varphi$  y  $\beta$  se obtuvieron por tanteo, de tal manera que, la función de peso  $W_2(s)$  esté por encima y cercana a los valores máximos del error normalizado para cualquier frecuencia; pues de tomar una cota muy holgada, generaría un controlador sobrediseñado. La función de peso obtenida corresponde a la siguiente:

$$W_2(s) = \frac{3,16(s + 1,5 \times 10^{-3})}{(s + 29,2)} \quad (4.20)$$

La función  $W_2(s)$ , se usará para los casos de control de posición y velocidad del sistema en estudio; esto se debe, a que tanto la planta nominal como la perturbada, el factor derivativo para el caso de la velocidad se suprime al realizar la razón entre estas; es decir el error no depende si se está en un estudio de posición o de sus derivadas.

En el caso de la fuerza, no se puede realizar el mismo análisis debido a que la fuerza ejercida sobre un cuerpo, según la segunda ley de Newton, depende de la aceleración y la masa del móvil, siendo esta última, una de las variables dentro del rango de incertidumbre; por lo que, el error normalizado

cambiará y por ende su cota superior. La función de transferencia que relaciona, la fuerza del émbolo con el voltaje de entrada a la válvula, se muestra a continuación:

$$\frac{F(s)}{U(s)} = P_F(s) = \frac{MKs}{(\tau_v s + 1)(s^2 + K_1 s + K_2)} \quad (4.21)$$

Al igual que los casos de posición y velocidad, usando los valores de la tabla 4.1, se obtiene la planta nominal de la fuerza del embolo del actuador quedando de la siguiente forma:

$$P_{n, fuer}(s) = \frac{3974,71s}{(4,2 \times 10^{-3} s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)} \quad (4.22)$$

Usando el Programa 4.2 en MATLAB<sup>®</sup>, se generará la familia de curvas de incertidumbre de la planta de la ecuación (4.21), ver figura 4.4.

**Programa 4.2.** Familia de curvas de error normalizado de la fuerza del embolo del actuador.

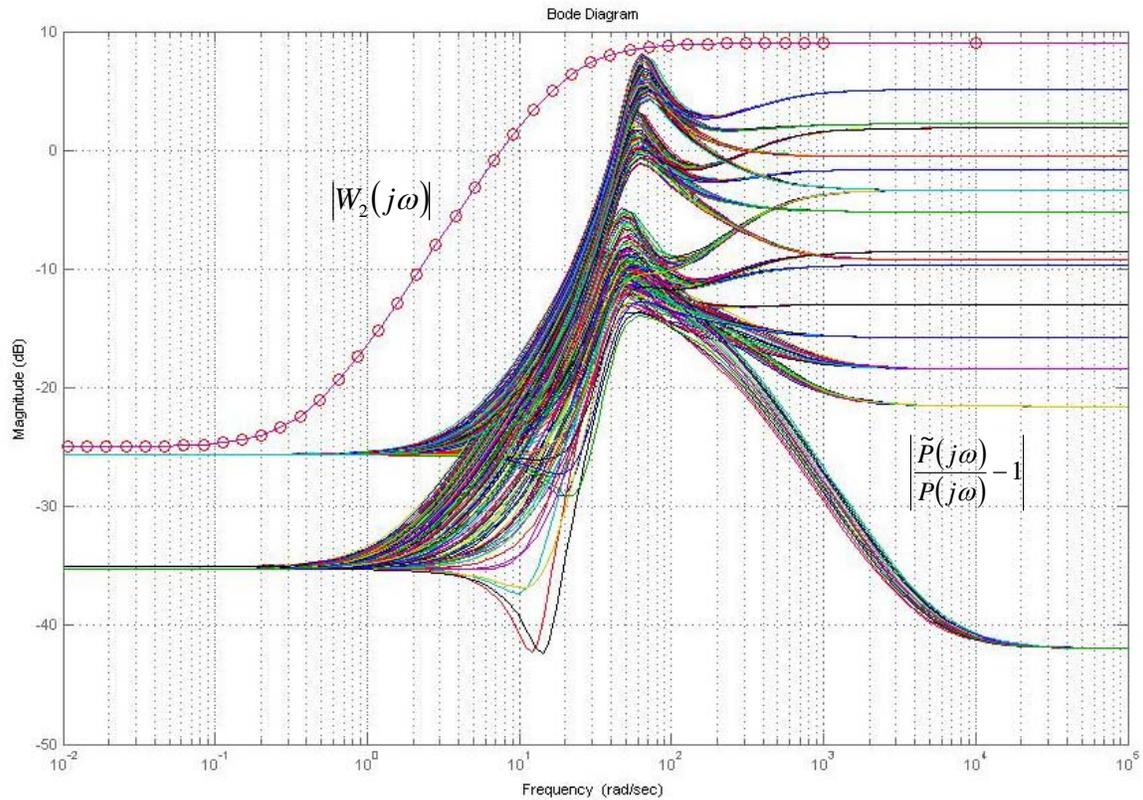
```
n=4; % Numero de elementos a tomar por variable
cont=0 % Variable para contar nº de curvas generadas
Po=linspace(4e5, 10e5, n); % Genera vectores con "n" valores equidistantes
M=linspace(1.81, 2.01, n); % incluyendo los extremos indicados
b=linspace(60, 80, n);
tv=linspace(3e-3, 5e-3, n);
numGn=[0 0 3975 0]; % Numerador de la planta nominal
denGn=[0 4.2e-3 1];
denGn=conv(denGn,[1 36.65 1943]); % Denominador de la planta nominal
sysGn=tf(numGn,denGn) % Muestra función de transferencia de la planta
nominal
for i=1:n, % Inicio de ciclos de variación de parámetros
```

```
for j=1:n,                                la planta
    for k=1:n,
        for l=1:n,
            K=7.95e-3*Po(i);
            K1=b(k)/M(j);
            K2=7.424e-3*Po(i)/M(j);
            numG=[0 0 K 0];
            denG=[tv(l) 1];
            denG=conv(denG,[1 K1 K2]);
            sysG=tf(numG,denG)              % Muestra función de transferencia
                                           de la planta perturbada

            sysENor=(sysG-sysGn)/sysGn;    % Calculo de error normalizado
            bodemag(sysENor)              % Trazado de la curva de magnitud del error
                                           normalizado Bode de la planta perturbada

            hold on                        % Mantiene la ultima gráfica
            cont=cont+1

        end
    end
end
end
end                                       % Final de ciclos de variación de parámetros
```



**Figura 4.4.** Error normalizado de la fuerza del émbolo del actuador (conjunto de curvas sobrepuestas) y cota del error ( $W_2$ ).

El error normalizado de la fuerza del émbolo del actuador presenta el mismo comportamiento del descrito para el caso de la posición y velocidad del mismo, y aplicando el procedimiento de manera similar para la determinación de  $W_2(s)$ , a partir de la figura 4.4 se obtuvo la siguiente expresión:

$$W_{2F}(s) = \frac{2,82(s + 0,4)}{(s + 20)} \quad (4.23)$$

### 4.2.3 Determinación de las Cotas para la Condición de Robustez

Obtenidas las funciones de peso  $W_1(s)$  y  $W_2(s)$  para cada caso (posición, velocidad y fuerza) se procede a determinar las cotas superior e inferior que permitirán el diseño de  $L(s)$  tal que cumpla la condición de robustez, según el procedimiento descrito en el capítulo II.

Para la realización de dichas cotas se uso el Programa 4.3 en MATLAB<sup>®</sup>, la cual se muestra a continuación:

**Programa 4.3.** Cotas superior e inferior de condición de robustez para posición y velocidad.

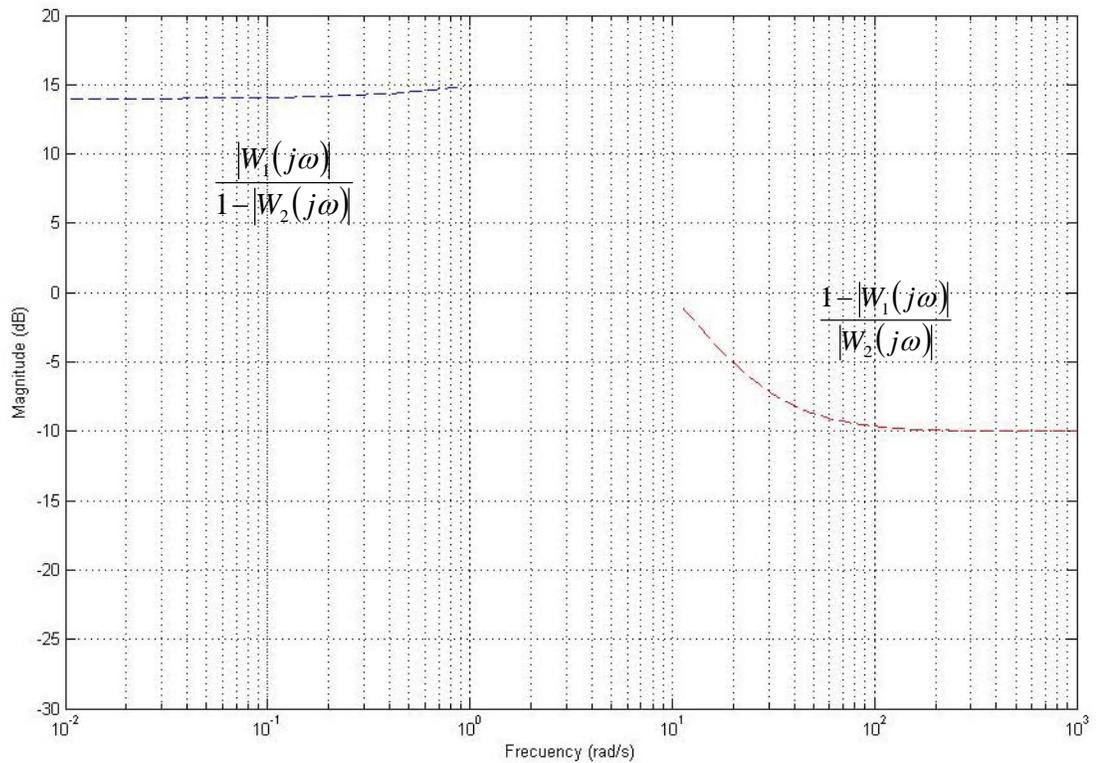
```

%% % Introduzca la constante de W1 "Ko"
Ko=5
%% % Introduzca numerador y denominador de W2
numW2=3.16*[1 1.5e-3];
denW2=[1 29.2];
sysW2=tf(numW2,denW2)
%% % Introduzca el rango de frecuencia a trabajar [wMin, wMax]
    y la cantidad de valores a tomar (n)
wMin=-2;
wMax=3;
n=100;
%% % Introduzca el rango de la magnitud para el sistema considerado [magMin, magMax]
magMin=-30;
magMax=20;
%% % Proceso de cálculo de cotas superior e inferior
w=logspace(wMin,wMax,n);
[magW2,faseW2,w]=bode(numW2,denW2,w);
for i=1:n
    if magW2(i) < 1 & w(i) < 1
        cota_inf(i)=Ko/(1-magW2(i));
    end
end

```

```
cota_infdB(i)=20*log10(cota_inf(i));
wcota_inf(i)=w(i);
elseif magW2(i) > 1 & w(i) > 1
    cota_sup(i)=1/magW2(i);
    cota_supdB(i)=20*log10(cota_sup(i));
    wcota_sup(i)=w(i);
end
end
dBmax=magMax*ones(1,n);
dBmin=magMin*ones(1,n);
% % % Graficas de cotas superior e inferior de incertidumbre
semilogx(wcota_inf, cota_infdB, '--b', w, dBmax, 'k', w, dBmin, 'k')
hold on
semilogx(wcota_sup, cota_supdB, '--r')
grid
xlabel('Frecuency (rad/s)')
ylabel('Magnitude (dB)')
```

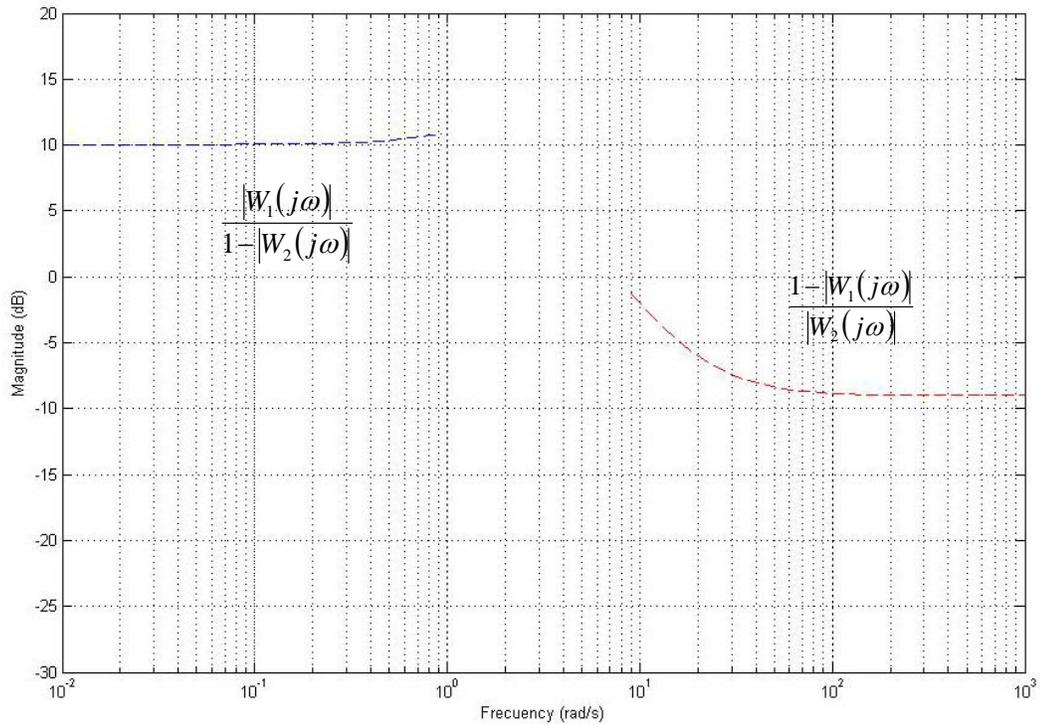
Las cotas correspondientes para el caso de la posición y velocidad se muestran en la figura 4.5.



**Figura 4.5.** Cotas superior e inferior para el diseño del controlador por Loopshaping para la posición (línea roja) y velocidad (línea azul).

Hay que notar que uno de los datos de entrada para el cálculo de las cotas es la constante arbitraria  $K_o$  de la relación (4.17), para lo cual, se introduce cualquier valor mayor a la unidad, esto es sólo para buscar una cota inferior inicial para comenzar el diseño de la función de transferencia  $L(s)$ .

De modo similar se procede para las cotas superior e inferior para el caso del control de la fuerza, por lo que en el código del programa 4.3 sólo se debe cambiar los valores de  $W_2(s)$  por los de la ecuación (4.23), obteniendo la siguiente gráfica:



**Figura N° 4.6.** Cotas superior (línea roja) e inferior (línea azul) para el diseño del controlador por Loopshaping para la fuerza.

#### 4.2.4 Determinación de la función de transferencia $L(s)$ y controlador $C(s)$

Para que las plantas  $P_{pos}(s)$ ,  $P_{vel}(s)$  y  $P_{fuer}(s)$  a controlar cumplan la condición de robustez, la magnitud de la función complementaria de sensibilidad  $L(s)$  debe estar por encima de la cota inferior y por debajo de la cota superior para cualquier frecuencia, esto según lo descrito en el capítulo II, por lo que se deberá tantear una función tal, que cumpla, con ese requerimiento sin estar alejados de las cotas para no sobrediseñar el controlador. El comportamiento de las cotas da un indicio de que la función  $L(s)$  es una función de retraso simple, pues la cota superior presenta una

inclinación aproximada de -20 dB/década, por lo que se probará con una función de la siguiente forma:

$$L(s) = \frac{a_L}{c_L s + 1} \quad (4.24)$$

Se tomará  $c_L = 1$ , como  $W_1(s)$  se definió que a cercanías de la frecuencia de 1 rad/s,  $L(s)$  debería de cambiar, a lo sumo, su comportamiento alrededor de esa frecuencia.

Para determinar a la constante  $a_L$  se procede a subir o bajar gráficamente a la función  $L(s)$  de tal manera que, el comportamiento asintótico de la misma a altas frecuencias, esté cercano a la cota superior, quedando la ecuación (4.24) de la siguiente manera:

- Posición y velocidad:

$$L_{pos,vel}(s) = \frac{8,91}{s + 1} \quad (4.25)$$

- Fuerza:

$$L_{fuer}(s) = \frac{5,62}{s + 1} \quad (4.26)$$

El controlador  $C(s)$  se determina aplicando la ecuación  $C = L/P$  lo que da como resultado lo siguiente:

- Control de posición:

$$P_{n,pos}(s) = \frac{2081}{s(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)} \quad (4.27)$$

$$C_{pos}(s) = \frac{4,28 \times 10^{-3}s(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)}{s + 1} \quad (4.28)$$

- Control de velocidad:

$$P_{n,vel}(s) = \frac{2081}{(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)} \quad (4.29)$$

$$C_{vel}(s) = \frac{4,28 \times 10^{-3}(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)}{s + 1} \quad (4.30)$$

Los controladores obtenidos son de tipo impropio, es decir, que el orden del numerador es mayor al orden del denominador; la razón de esto es por el tipo de función  $L(s)$  seleccionada. Un análisis más detallado de esto se realizará en el capítulo V.

Recordando que la condición de robustez en el rango de frecuencia  $[0,1]$  es de la forma:

$$|L(j\omega)| \geq \frac{|W_1(j\omega)|}{1 - |W_2(j\omega)|} = \frac{K_o}{1 - |W_2(j\omega)|}, \quad \omega \leq 1$$

Como se puede observar, la cota inferior es creciente, mientras que la función  $|L(j\omega)|$  es decreciente, a medida que se incrementa la frecuencia. La

constante  $K_o$  se determinará en la frecuencia más crítica que corresponde a  $\omega = 1$ , debido que a este punto es donde convergen tanto la cota inferior como la función  $|L(j\omega)|$ , quedando:

$$|L(j1)| = \frac{K_o}{1 - |W_2(j1)|} \rightarrow K_o = |L(j1)|(1 - |W_2(j1)|)$$

Usando el siguiente código de MATLAB<sup>®</sup> se determina cada uno de los valores para obtener a  $K_o$ , ver programa 4.4.

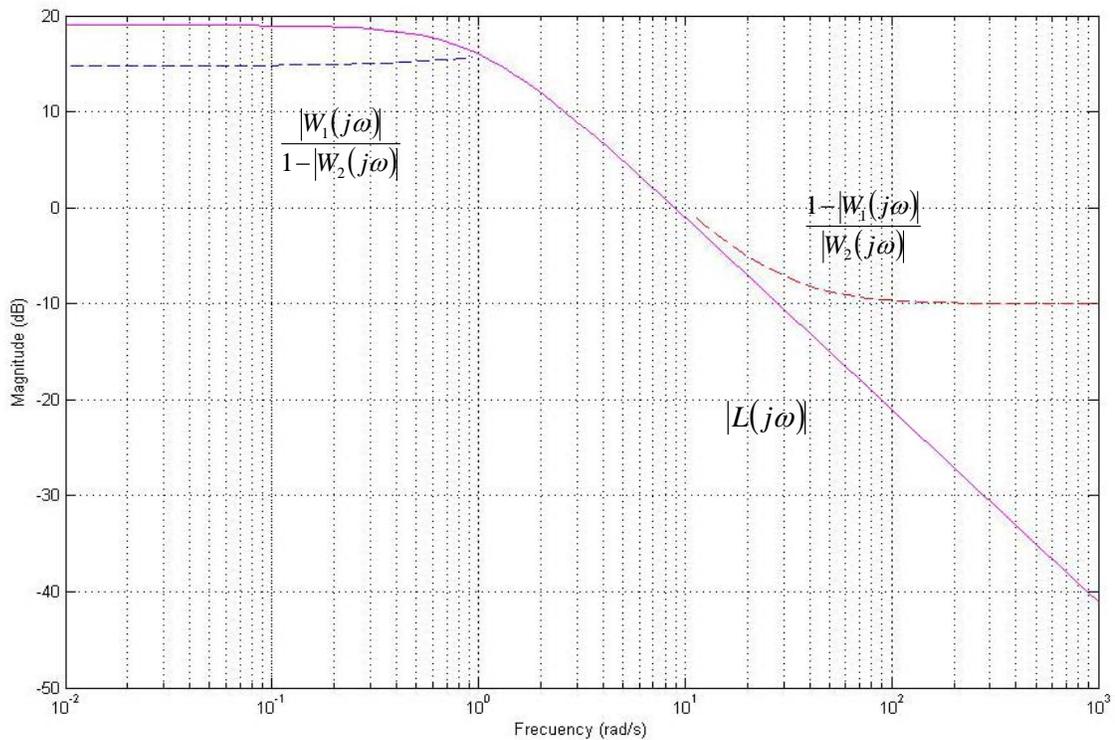
**Programa 4.4.** Determinación de la constante  $K_o$ . Cortez, 2009

```
m=1;
while w(m) < 1 % Condición para determinar
    m = m+1; % la frecuencia w=1
end
W2=magW2(m)
W2 =
    0.1133 % Valor de W2 a w=1
L=magL(m)
L =
    6.1521
Ko=L*(1-W2)
Ko =
    5.4551
```

Definidas las funciones de peso para los casos de posición y velocidad, a continuación se muestran las mismas:

$$|W_1(j\omega)| = \begin{cases} 5,4551 & \text{si } 0 \leq \omega \leq 1 \\ 0 & \text{si } \omega > 1 \end{cases} \quad W_2(s) = \frac{3,16(s + 1,5 \times 10^{-3})}{(s + 29,2)}$$

La figura 4.7 muestra la magnitud de la función de transferencia  $L(s)$  en el diagrama de Bode junto a sus cotas superior e inferior dadas por la condición de robustez (ver capítulo II).



**Figura 4.7.** Cotas superior e inferior para el diseño del controlador por Loopshaping para la posición y velocidad del émbolo.

Para el caso de la fuerza el controlador queda definido como sigue:

- Control de fuerza:

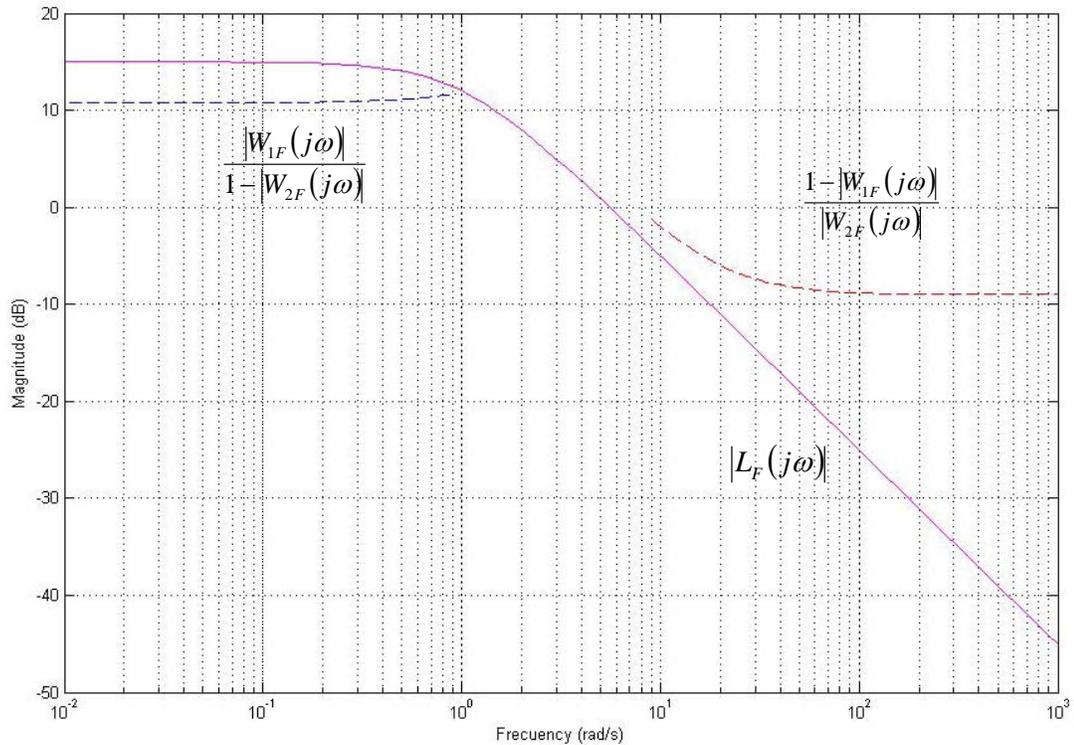
$$P_{n,fuer}(s) = \frac{3974,71s}{(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)} \quad (4.31)$$

$$C_{fuer}(s) = \frac{1,41 \times 10^{-3}(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)}{s(s + 1)} \quad (4.32)$$

Usando el programa 4.4 para el caso de la fuerza se tiene:

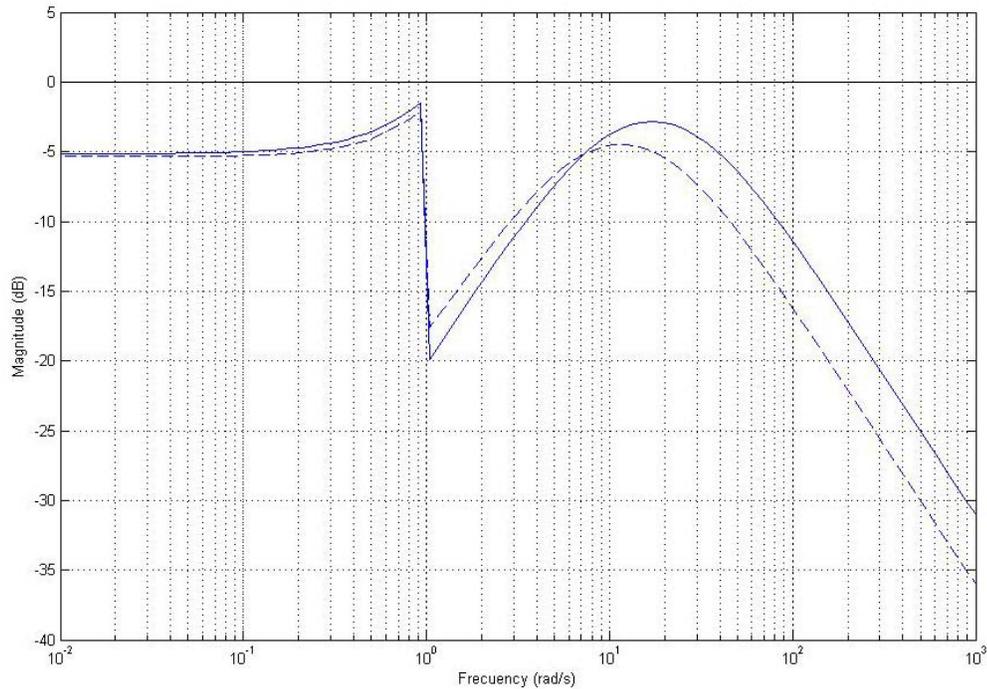
$$|W_{1F}(j\omega)| = \begin{cases} 3,2678 & \text{si } 0 \leq \omega \leq 1 \\ 0 & \text{si } \omega > 1 \end{cases} \quad W_{2F}(s) = \frac{2,82(s + 0,4)}{(s + 20)}$$

De igual forma, en la figura 4.8 se muestra la magnitud de la función de transferencia  $L(s)$  en el diagrama de Bode junto a sus cotas superior e inferior respectivas.



**Figura 4.8.** Cotas superior e inferior para el diseño del controlador por Loopshaping para la fuerza del émbolo.

En la figura 4.9 se muestra como la condición de robustez  $|W_1S| + |W_2T|$  es siempre menor a la unidad (por debajo de 0 dB) con las funciones de transferencia  $L(s)$  seleccionadas, tanto para la posición y la velocidad como para la fuerza, asegurando la estabilidad del sistema dentro del rango de incertidumbre tomado según la tabla 4.2.



**Figura 4.9.** Curva de  $|W_1S| + |W_2T|$  con el controlador  $C$  seleccionado para posición y velocidad (línea continua) y fuerza (línea discontinua).

#### 4.2.5 Ajustes de los controladores

Al determinar los controladores a través de la ecuación  $C = L/P$ , siendo  $L$  como una función arbitraria (loopshape), tal que cumpla con la condición de robustez y  $P$  como la planta nominal en estudio, asegura que el diseño del controlador sea solamente robusto y no está ajustado a los requerimientos dispuestos por el diseñador, como lo son el error en estado estacionario, margen de ganancia y margen de fase del sistema, entre otros.

Para el ajuste de los controladores obtenidos por Loopshaping se considerará las recomendaciones dadas por [8], el cual sugiere que para

obtener un rendimiento satisfactorio en el sistema, el margen de fase del mismo debe de estar entre  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , y el margen de ganancia debe ser mayor de 6 dB. El hecho de que el margen de fase esté entre  $30^\circ$  y  $60^\circ$  significa que, en los diagramas de Bode, la pendiente de la curva de magnitud logarítmica en la frecuencia de cruce de ganancia debe ser más gradual que  $-40$  dB/década, esto con el propósito de disminuir los efectos del ruido en el sistema.

En esta sección se ajustaran los controladores a través de compensadores de adelanto, retardo o retardo-adelanto, dependiendo del caso, a través del procedimiento descrito en [8], sobre nuestros sistemas a lazo abierto ya controlados  $L(s)$ , determinados en la sección 4.3.4.

- Posición y velocidad:

El sistema a lazo abierto para estas variables corresponde el siguiente:

$$L_{pos,vel}(s) = \frac{8,91}{s+1} \quad (4.25)$$

La función de transferencia anterior, es un sistema de fase mínima de tipo 0, donde las curvas de magnitud y fase de la misma, se muestran en la figura 4.10. A partir de estas gráficas, se puede observar a través de MATLAB<sup>®</sup>, que el sistema a lazo cerrado es estable, pero presenta un margen de fase de  $96,4^\circ$  por lo que el sistema deberá ser ajustado de manera que el margen de fase se encuentre dentro del rango indicado al inicio de esta sección, además de cumplir con otras especificaciones.

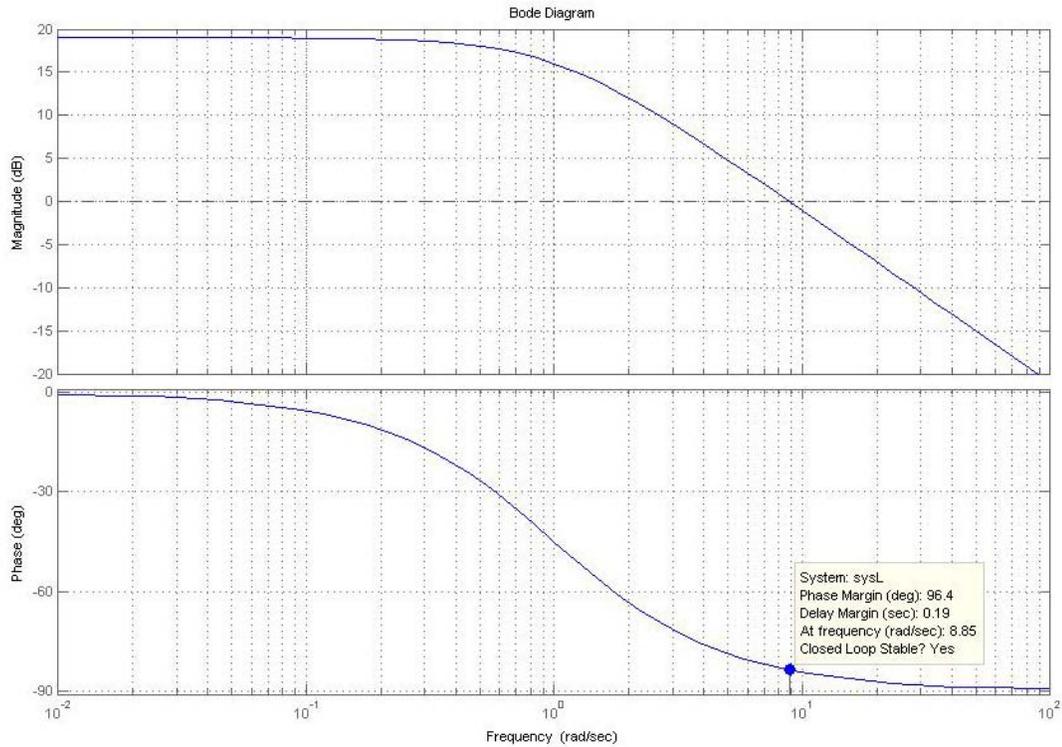


Figura 4.10. Diagramas de Bode de la ecuación 4.25.

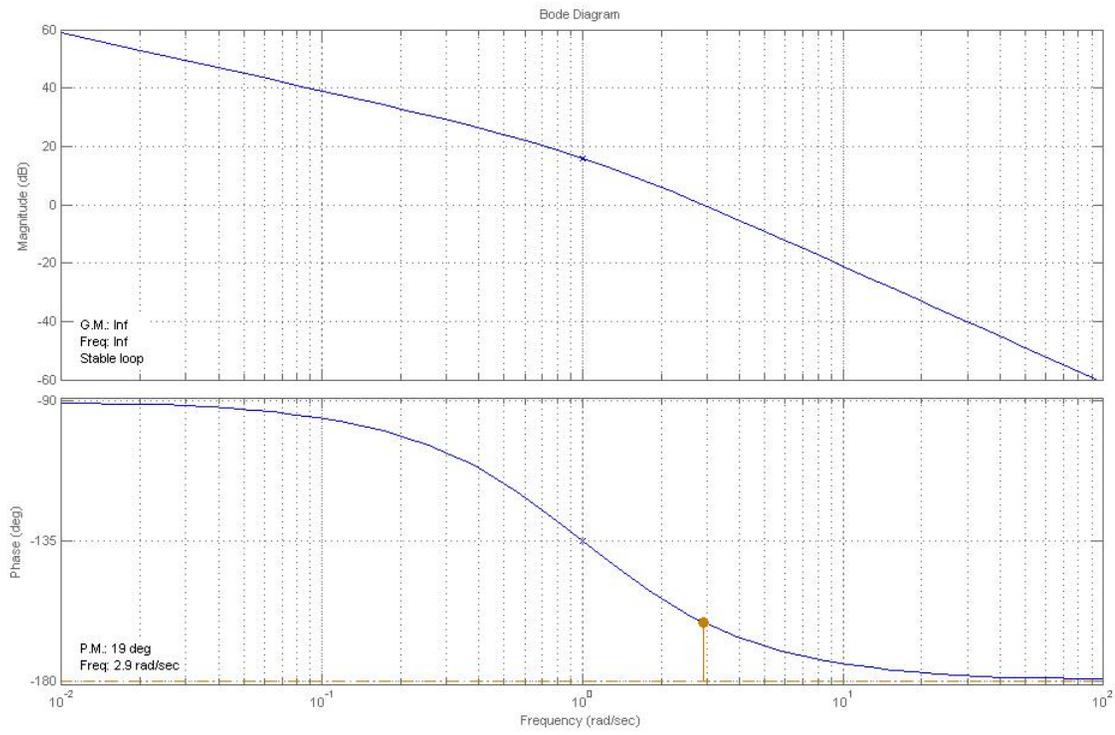
El error en estado estacionario de la ecuación 4.25 ante un escalón unitario es:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} L_{pos,vel}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{8,91}{s + 1} = 8,91$$

$$e_{ss} = 0,1 \quad (10\%)$$

Para eliminar este error en régimen permanente ante un escalón unitario, se adicionó al controlador un integrador, por lo que nuestro sistema queda de la siguiente manera:

$$L'_{pos,vel}(s) = \frac{8,91}{s(s+1)} \quad (4.33)$$



**Figura 4.11.** Diagramas de Bode de la ecuación 4.25 más integrador (sistema 4.33).

Con el integrador el margen de fase cambió a  $19^\circ$  por lo que se necesitará de un compensador de adelanto que proporcione un ángulo de adelanto suficiente para obtener un margen de fase dentro del rango de  $30^\circ$  a  $60^\circ$ .

El error en estado estacionario del nuevo sistema ante una rampa unitaria es:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL'_{pos,vel}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{8,91}{s(s+1)} = 8,91$$

$$e_{ss} = 0,11 \quad (11\%)$$

El controlador se ajustará a las siguientes especificaciones de diseño:

- a) Margen de fase aproximadamente de  $50^\circ$ .
- b) Margen de ganancia mayor a 6 dB.
- c) Error en estado estacionario ante una rampa unitaria aproximadamente de un 5%.

El procedimiento en el diseño del compensador de adelanto que se seguirá es de la siguiente manera [8]:

Sea el siguiente compensador de adelanto:

$$C_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (4.34)$$

Definiendo,

$$K_c \alpha = K$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es,

$$L^*(s) = C_c(s)L(s) = K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} L(s) = C_1(s) \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

$$C_1(s) = KL(s)$$

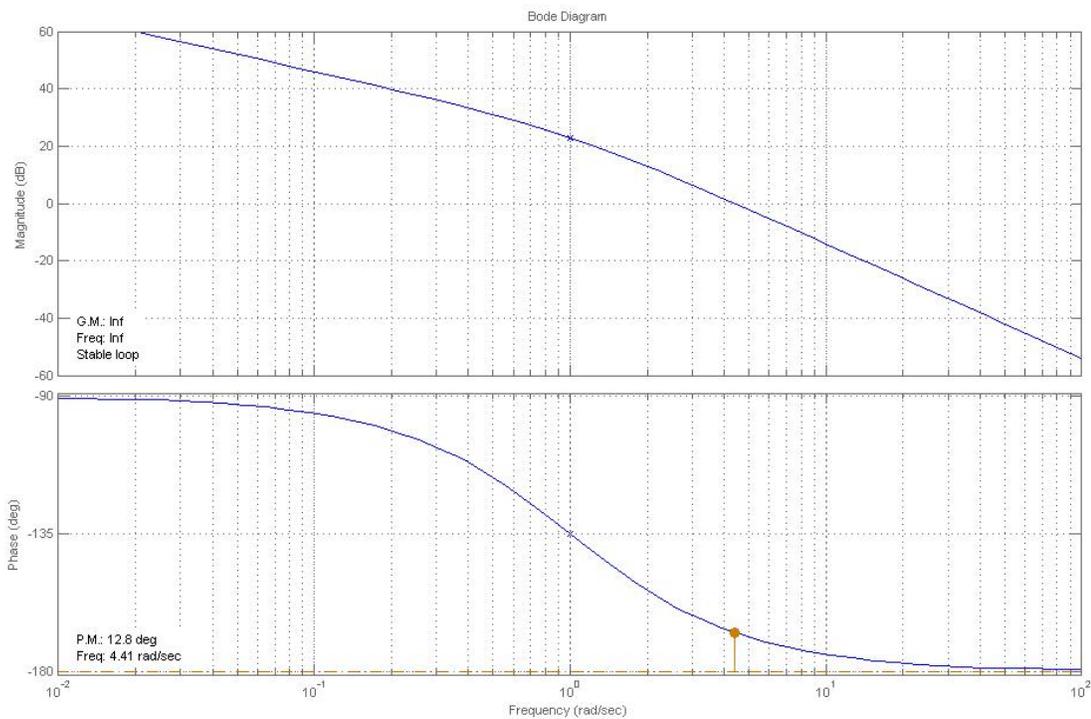
Determinando la ganancia  $K$  que satisfaga el requisito sobre el error en estado estacionario ante una rampa unitaria.

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s C_C(s) L'_{pos,vel}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1} \frac{8,91}{s(s+1)} = 8,91 K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{8,91 K} = 0,05 \text{ (5\%)} \quad \boxed{K = 2,24}$$

Usando la ganancia  $K$  determinada, se grafica el diagrama de Bode del sistema ajustada sólo por ganancia ( $C_1(j\omega)$ ).

$$C_1(j\omega) = \frac{19,958}{j\omega(j\omega+1)} \quad (4.35)$$



**Figura 4.12.** Diagramas de Bode del sistema ajustado por ganancia (ecuación 4.35).

De la figura 4.12 se tiene que el margen de ganancia y el margen de fase son respectivamente  $+\infty$  dB y  $12,8^\circ$  (dicho margen de fase implica que es un sistema bastante oscilatorio, op.cit., a pesar de cumplir la especificación en

estado estacionario). La especificación requiere, de un margen de fase de al menos  $50^\circ$ , por lo que el adelanto de fase adicional ( $\phi_m$ ) necesario para satisfacer el requisito de estabilidad relativa es de  $37,2^\circ$ .

Si se adiciona de un compensador de adelanto, éste desplaza la frecuencia de cruce de ganancia hacia la derecha, disminuyendo así, el margen de fase y para compensar esa disminución se le incrementará  $5^\circ$  (según [8] que recomienda entre  $5^\circ$  a  $12^\circ$ ) a la fase adicional, quedando en  $\phi_m = 42,2^\circ$ .

La relación que tiene el factor de atenuación  $\alpha$  y el ángulo máximo de adelanto  $\phi_m$  es la siguiente (op.cit.):

$$\text{sen}\phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

Con  $\phi_m = 42,2^\circ$  se tiene que  $\alpha = 0,196$ , por lo tanto, se determinan las frecuencias esquinas  $\omega = 1/T$  y  $\omega = 1/\alpha T$  del compensador de adelanto. Para conseguirlo, primero se observa que el ángulo de adelanto de fase máxima  $\phi_m$  ocurre en la media geométrica de las dos frecuencias de esquinas, o bien a  $\omega_m = 1/\sqrt{\alpha T}$  (op.cit.). La cantidad en la modificación de la curva de magnitud por la inclusión de  $(Ts + 1)/(\alpha Ts + 1)$  es:

$$\left| \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega\alpha T} \right|_{\omega=1/\sqrt{\alpha T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Con  $\alpha = 0,196$ , se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0,196}} = 7,07\text{dB}$$

Para no modificar los valores de ganancia obtenidos a partir de las condiciones de régimen estacionario, se ubicará la frecuencia  $\omega_m$  tal que  $|C_1(j\omega_m)| = -7,07\text{dB}$ , para así determinar las frecuencias esquinas del compensador y a su vez, la nueva frecuencia de cruce de ganancia del sistema compensado. A partir de la figura 4.12 se tiene que dicha frecuencia corresponde a  $\omega_m = 6,68 \text{ rad/s}$ , donde se tiene:

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\omega_m = \sqrt{0,196}(6,68) \quad \boxed{\frac{1}{T} = 2,96}$$

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}} = \frac{6,68}{\sqrt{0,196}} \quad \boxed{\frac{1}{\alpha T} = 15,09}$$

Y el valor de  $K_C$  se determina como

$$K_C = \frac{K}{\alpha} = \frac{2,24}{0,196} \quad \boxed{K_C = 11,43}$$

Quedando la función de transferencia del compensador final más integrador como:

$$C_C(s) = 11,43 \frac{s + 2,96}{s(s + 15,09)} \quad (4.36)$$

Adicionando el compensador a los controladores de posición y velocidad (4.28) y (4.30) respectivamente se tiene:

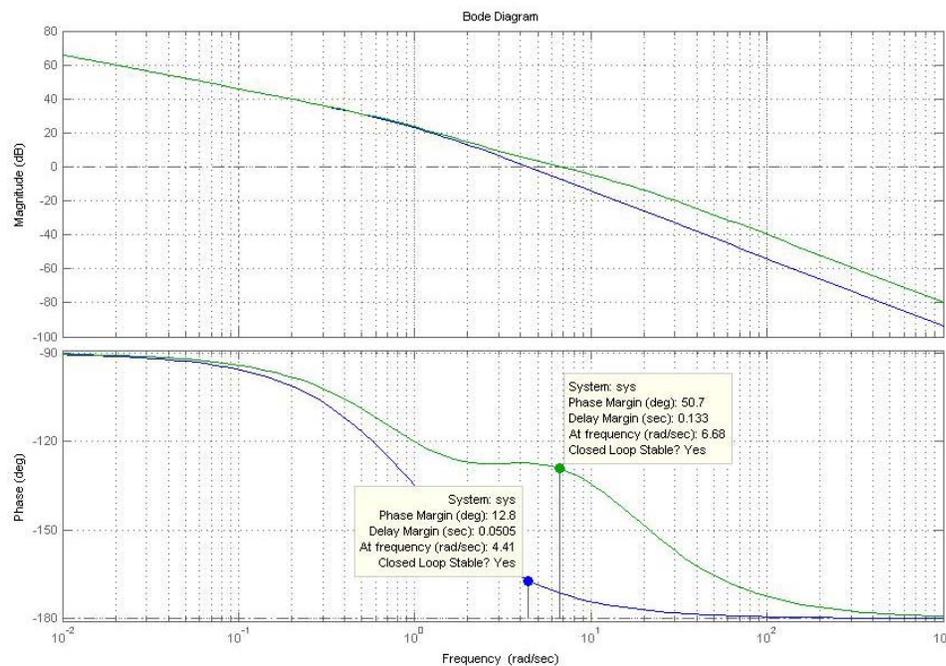
$$C_{pos}^*(s) = \frac{2,055 \times 10^{-4} (s + 238,1)(s + 2,96)(s^2 + 36,65s + 1943)}{(s + 1)(s + 15,09)} \quad (4.37)$$

$$C_{vel}^*(s) = \frac{2,055 \times 10^{-4} (s + 238,1)(s + 2,96)(s^2 + 36,65s + 1943)}{s(s + 1)(s + 15,09)} \quad (4.38)$$

Siendo la función de transferencia a lazo abierto compensado en fase, para los casos de posición y velocidad la siguiente:

$$L_{pos,vel}^*(s) = 101,84 \frac{s + 2,96}{s(s + 15,09)(s + 1)} \quad (4.39)$$

En la figura 4.13 se observa la modificación que ocurre en el sistema, cuya ecuación corresponde a la 4.35, después de adicionado el compensador en adelanto, obteniendo un margen de ganancia y un margen de fase de  $+\infty$  dB y  $50,7^\circ$  respectivamente, cumpliendo con las especificaciones de diseño propuestas.



**Figura 4.13.** Diagramas de Bode de la ecuación 4.35 (línea azul) y la ecuación 4.35 compensado en fase (línea verde).

Finalmente, se examinará las características de la respuesta transitoria del sistema diseñado. Para ello se obtendrán, las curvas de respuesta a escalón unitario y rampa unitaria de los sistemas compensados (4.39) y no compensado (4.25), ambas a lazo cerrado. El programa 4.5 en MATLAB® permitirá la obtención de dichas curvas.

Las funciones de transferencia a lazo cerrado de los sistemas no compensado y compensado, respectivamente, vienen dadas por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{8,91}{s^2 + s + 8,91} \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{101,8s + 301,4}{s^3 + 16,09s^2 + 116,9s + 301,4}$$

**Programa 4.5.** Respuestas a escalón y rampa unitaria de los sistemas no compensado (4.25) y compensado (4.39).

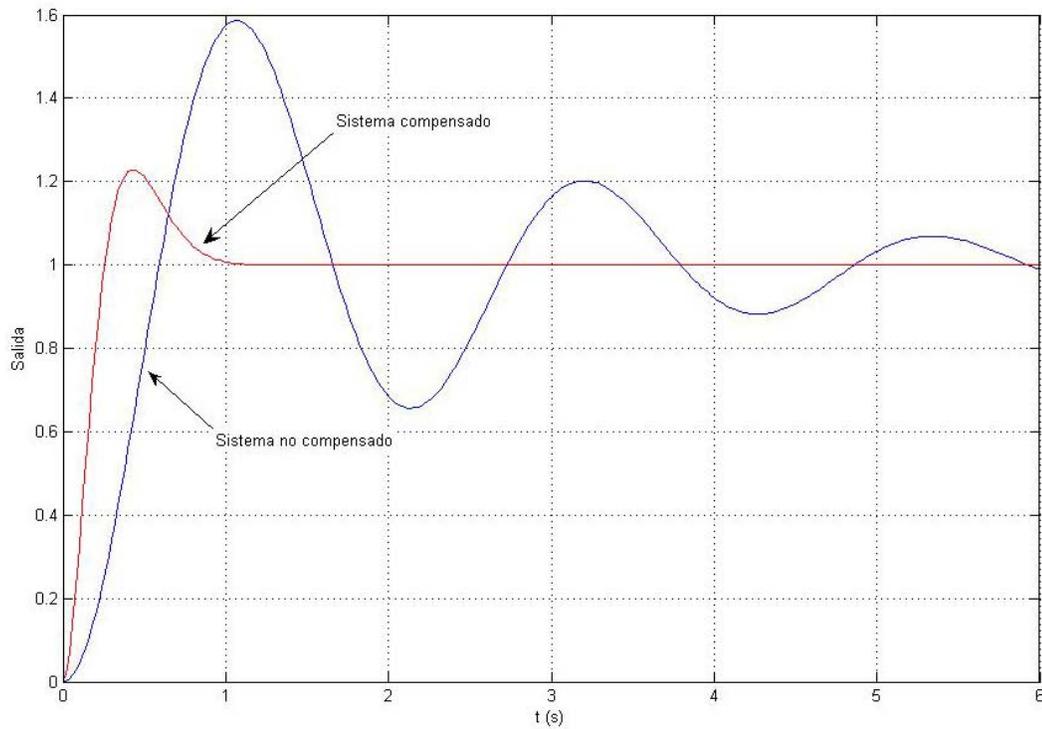
```
% *** Respuesta a un escalón unitario***
numT=8.91*[0 0 1];
denT=[1 1 8.91];
numTc=[101.8 301.4];
denTc=[1 16.09 116.9 301.4];
t=0:0.02:6;
[c1,x1,t]=step(numT,denT,t);
[c2,x2,t]=step(numTc,denTc,t);
plot(t,c1,'-b',t,c2,'-r')
grid
xlabel('t (s)')
ylabel('Salida')
% ****Respuesta a una rampa unitaria***
num1T=8.91*[0 0 1];
den1T=[1 1 8.91 0];
```

```

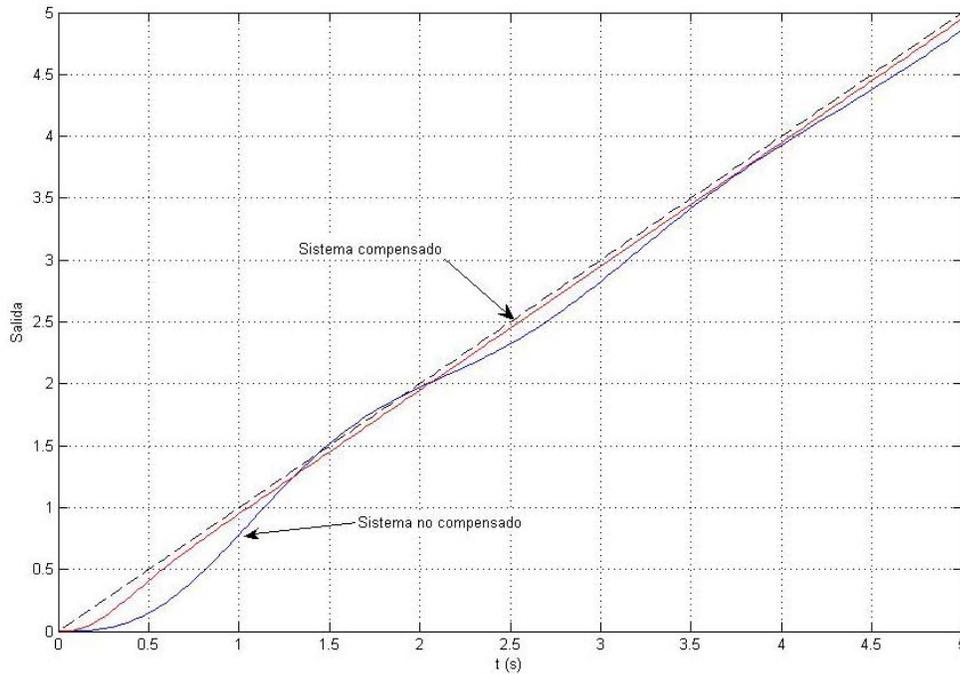
num1Tc=[101.8 301.4];
den1Tc=[1 16.09 116.9 301.4 0];
t=0:0.02:5;
[y1,x1,t]=step(num1T,den1T,t);
[y2,x2,t]=step(num1Tc,den1Tc,t);
plot(t,y1,'-b',t,y2,'-r',t,t,'--k')
grid
xlabel('t (s)')
ylabel('Salida')

```

Las figuras 4.14 y 4.15 se muestran las respuestas ante un escalón y rampa unitaria respectivamente, antes y después de la compensación.



**Figura 4.14.** Respuesta (posición) ante escalón unitario. Sistemas compensado y no compensado.



**Figura 4.15.** Respuesta (posición) ante rampa unitaria. Sistemas compensados y no compensados.

○ Fuerza:

El sistema a lazo abierto para esta variable corresponde a la siguiente función:

$$L_{fuer}(s) = \frac{5,62}{s+1} \quad (4.26)$$

Al igual que en el caso del ajuste en el controlador de posición y velocidad, por ser un sistema de tipo 0, este presentará un offset en régimen permanente, el cual se eliminará adicionando un integrador al sistema a compensar, que dando de la siguiente manera.

$$L'_{fuerza}(s) = \frac{5,62}{s(s+1)} \quad (4.40)$$

El margen de fase del sistema cambió a  $23,8^\circ$  por la adición del integrador, por lo que se necesitará de un compensador de adelanto que proporcione un ángulo de adelanto suficiente para obtener un margen de fase dentro del rango de  $30^\circ$  a  $60^\circ$ . El sistema con integrador (4.40) se muestra en la figura 4.16.

El error en estado estacionario del sistema (4.40) ante una rampa unitaria es:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL'_{fuerza}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{5,62}{s(s+1)} = 5,62$$

$$e_{ss} = 0,18 \quad (18\%)$$

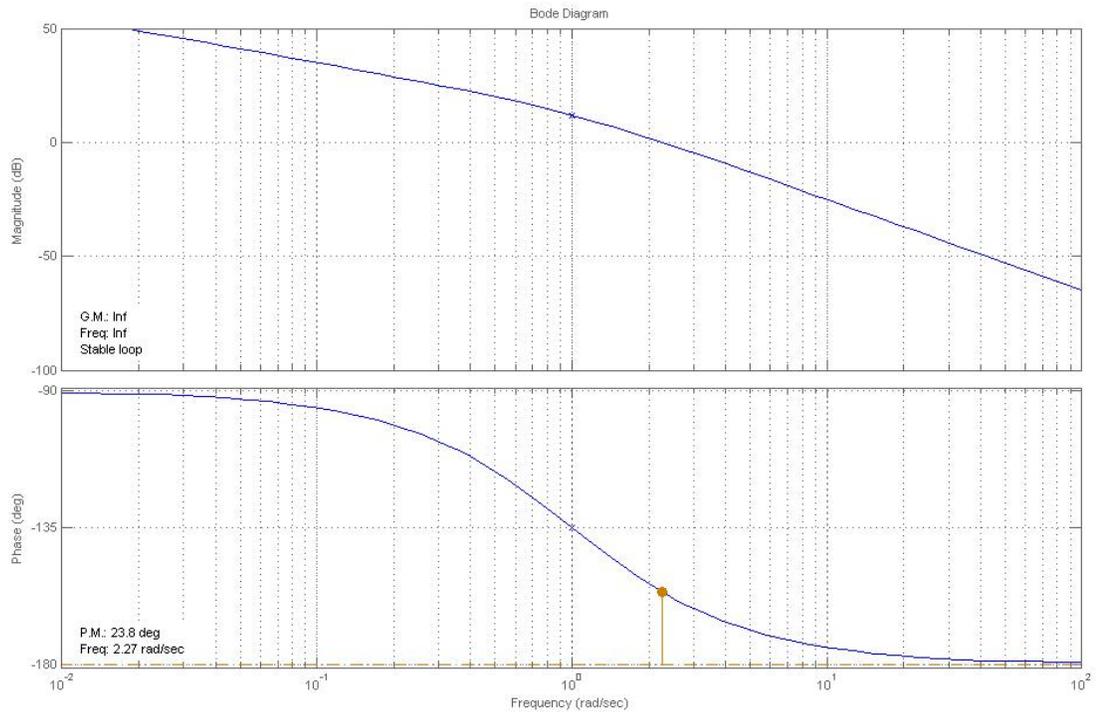


Figura 4.16. Diagramas de Bode de la ecuación 4.26 más integrador (ecuación 4.40).

Al igual que el caso de ajuste para el controlador de posición y el de velocidad, se ajustará este nuevo a través de un compensador en adelanto que cumpla con:

- Margen de fase aproximadamente de  $50^\circ$ .
- Margen de ganancia mayor a 6 dB.
- Error en estado estacionario ante una rampa unitaria aproximadamente de un 5%.

De la figura 4.16 se tiene que el margen de ganancia y el margen de fase son respectivamente  $+\infty$  dB y  $23,8^\circ$ . En este caso se aplicará el mismo procedimiento usado en el ajuste de los controladores de posición y velocidad.

Determinando la ganancia  $K$  que satisfaga el requisito sobre el error en estado estacionario ante una rampa unitaria:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s C_C(s) L_{fuerza}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \frac{5,62}{s(s+1)} = 5,62K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{5,62K} = 0,05 \text{ (5\%)} \quad \boxed{K = 3,56}$$

Usando la ganancia  $K$  determinada, se grafica el diagrama de Bode del sistema con la ganancia ajustada pero sin compensar  $C_1(j\omega)$ .

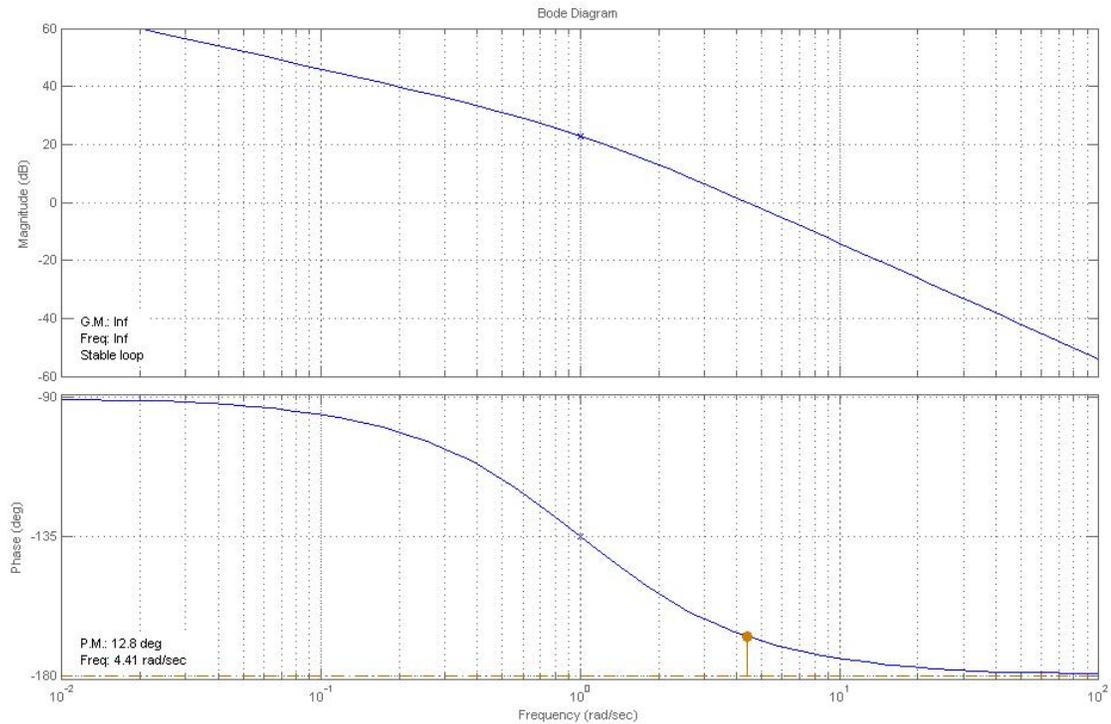
$$C_1(j\omega) = \frac{20,01}{j\omega(j\omega + 1)} \quad (4.41)$$

Según lo expresado anteriormente entonces se tiene que el compensador de adelanto tendrá la misma configuración, variando solamente la ganancia del mismo. El valor de  $K_C$  se determina como,

$$K_C = \frac{K}{\alpha} = \frac{3,56}{0,196} \quad \boxed{K_C = 18,16}$$

Quedando la función de transferencia del compensador final más integrador como:

$$C_C(s) = 18,16 \frac{s + 2,96}{s(s + 15,09)} \quad (4.42)$$



**Figura 4.17.** Diagramas de Bode de la ecuación 4.40 ajustado en ganancia (ecuación 4.41).

Adicionando el compensador al controlador de fuerza se tiene:

$$C_{fuerza}^*(s) = \frac{1,075 \times 10^{-4} (s + 238,1)(s^2 + 36,65s + 1943)(s + 2,96)}{s^2(s + 1)(s + 15,09)} \quad (4.43)$$

Siendo la función de transferencia a lazo abierto para el caso de la fuerza lo siguiente:

$$L_{fuerza}^*(s) = 102,1 \frac{s + 2,96}{s(s + 15,09)(s + 1)} \quad (4.44)$$

Al igual que en el caso de posición y velocidad, se examinará las características de la respuesta transitoria del sistema diseñado. Para ello se obtendrán las curvas de respuesta a escalón unitario y rampa unitaria de los sistemas compensado (4.44) y no compensado (4.26), ambas a lazo cerrado a través del programa 4.6 en MATLAB®. Las funciones de transferencia a lazo cerrado de los sistemas no compensado y compensado, respectivamente, vienen dadas por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5,62}{s^2 + s + 5,62}$$

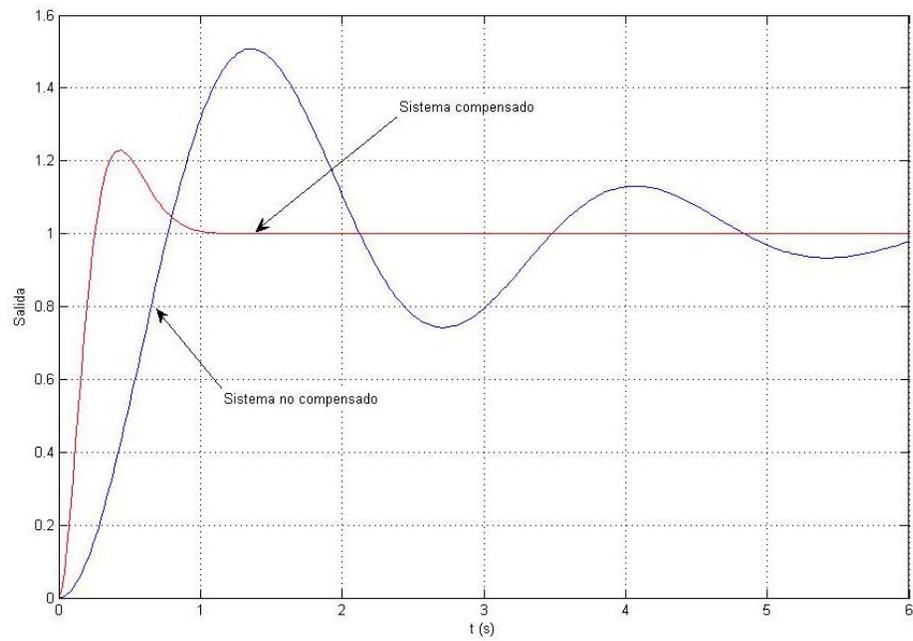
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{102,1s + 302,2}{s^3 + 16,09s^2 + 117,2s + 302,2}$$

**Programa 4.6.** Respuestas a escalón y rampa unitaria de los sistemas no compensado (4.25) y compensado (4.39).

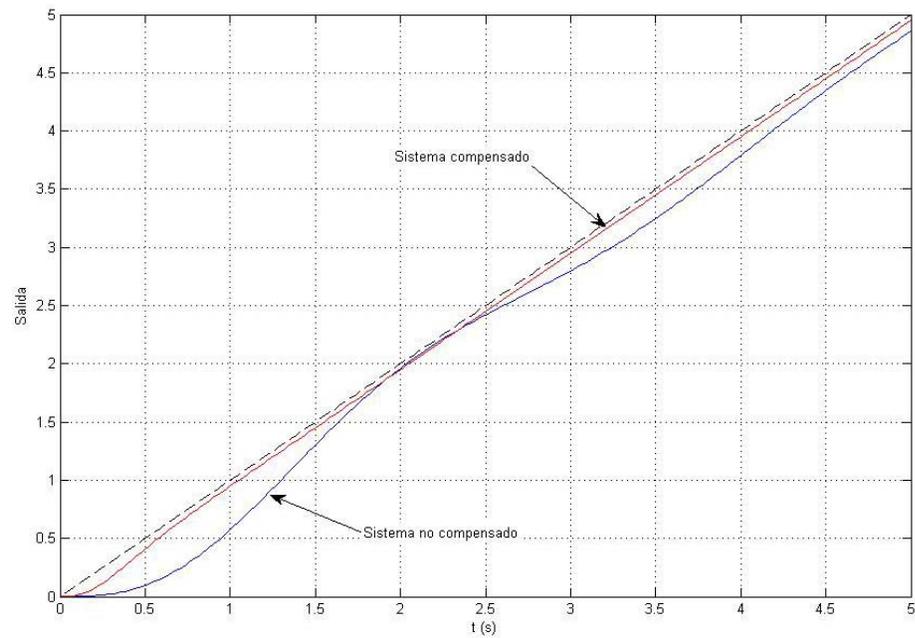
```
% *** Respuesta a un escalón unitario***
numT=5.62*[0 0 1];
denT=[1 1 5.62];
numTc=[102.1 302.2];
denTc=[1 16.09 117.2 302.2];
t=0:0.02:6;
[c1,x1,t]=step(numT,denT,t);
[c2,x2,t]=step(numTc,denTc,t);
plot(t,c1,'-b',t,c2,'-r')
grid
xlabel('t (s)')
ylabel('Salida')

% ****Respuesta a una rampa unitaria***
num1T=5.62*[0 0 1];
den1T=[1 1 5.62 0];
num1Tc=[102.1 302.2];
den1Tc=[1 16.09 117.2 302.2 0];
t=0:0.02:5;
[y1,x1,t]=step(num1T,den1T,t);
[y2,x2,t]=step(num1Tc,den1Tc,t);
plot(t,y1,'-b',t,y2,'-r',t,t,'--k')
grid
xlabel('t (s)')
ylabel('Salida')
```

Las figuras 4.18 y 4.19 muestran las respuestas a un escalón unitario y a una rampa unitaria respectivamente antes y después de la compensación.



**Figura 4.18.** Respuesta (posición) ante escalón unitario. Sistemas compensados y no compensados.



**Figura 4.19.** Respuesta (posición) ante escalón unitario. Sistemas compensados y no compensados.

### 4.3 Diseño de los Controladores mediante las Acciones PI y PD.

En esta sección se realizará el diseño de los controladores PI y PD equivalentes o que cumplan con las características transitorias y estacionarias obtenidas con los controladores diseñados por Loopshaping, con la finalidad de poder realizar la adecuada comparación entre ellas, la cual es uno de los objetivos de la presente investigación.

Estos diseños se realizarán por variable a estudiar, pues existen algunas consideraciones según sea el caso.

#### 4.3.1 Posición

Para iniciar con los diseños de los controladores PI y PD, se requiere primeramente, estudiar el sistema a controlar el cual corresponde a la ecuación 4.27. En la figura 4.20 se muestra el diagrama de Bode de magnitud y fase, en ella se puede observar, que el sistema es estable con un margen de ganancia y de fase de 29,7 dB y 88,6° respectivamente. En las figuras 4.21 y 4.22 se observan las respuestas transitorias de la misma ante un escalón y rampa unitaria respectivamente.

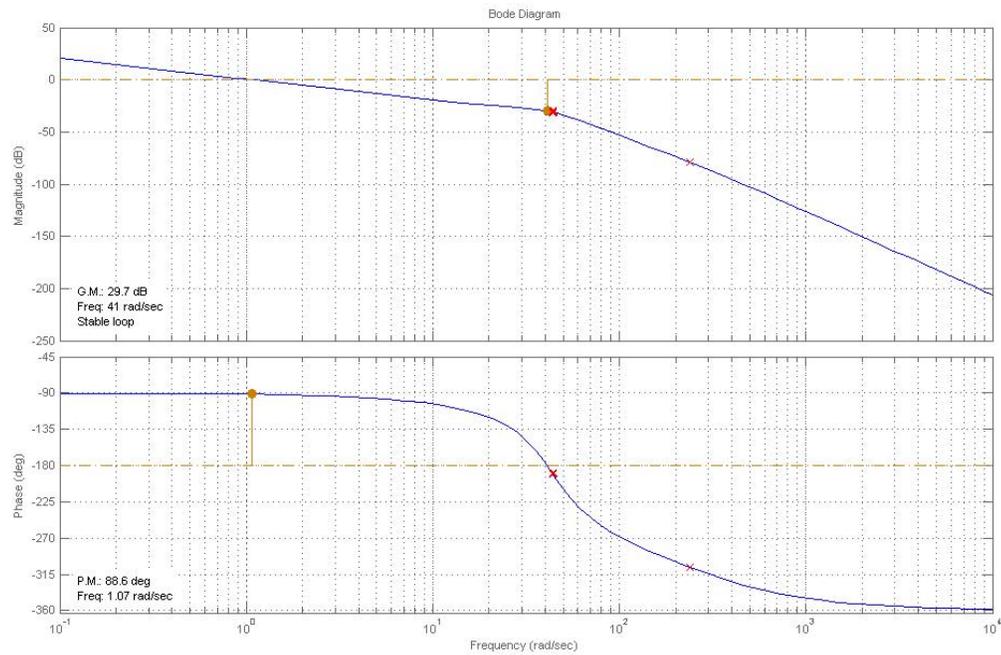


Figura 4.20. Diagrama de Bode de magnitud y fase. Ecuación 4.27.

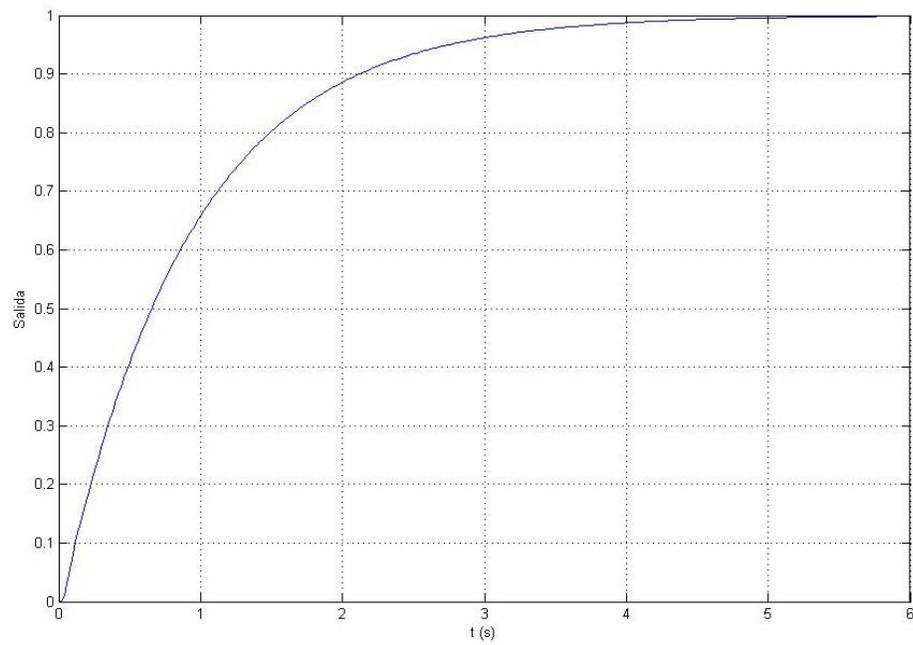
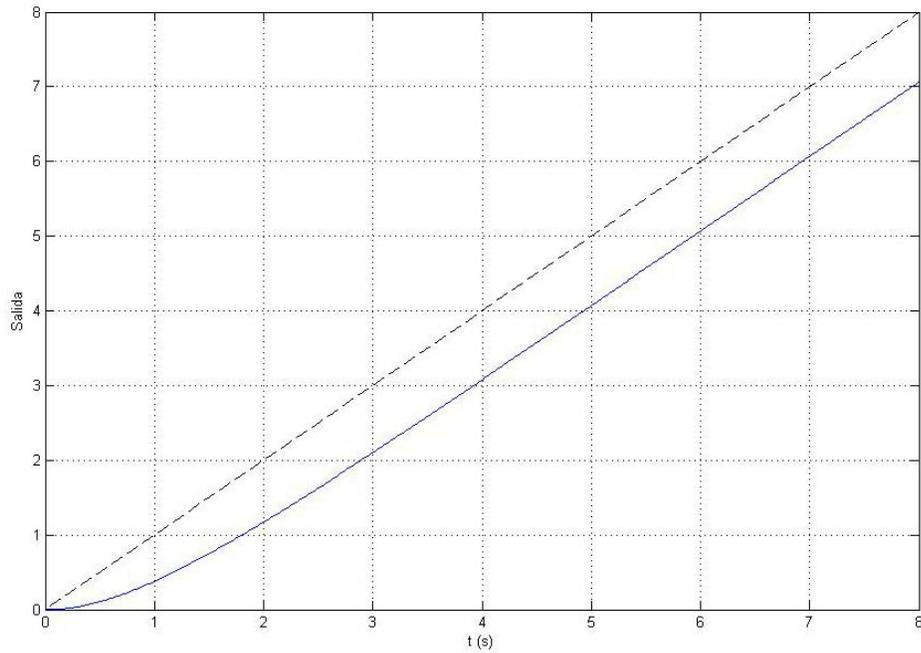


Figura 4.21. Respuesta (fuerza) ante un escalón unitario. Ecuación 4.27.



**Figura 4.22.** Respuesta (fuerza) ante una rampa unitaria. Ecuación 4.27.

La planta a controlar es un sistema de fase mínima de tipo 1. Debido al integrador que presenta la planta, el error en estado estacionario ante un escalón es nulo, mientras que ante una rampa unitaria se tiene que:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s P_{n,pos}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2081}{s(4,2 \times 10^{-3} s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)} = 1,07$$

$$e_{ss} = 0,93 \quad (93\%)$$

En la figura 4.22 se puede observar el offset que presenta el sistema.

El error  $e_{ss}$  ante una rampa unitaria es muy alto, por lo que el controlador debe ser capaz de reducirlo pero no eliminarlo, para efectos de comparación con los controladores diseñados por Loopshaping.

Si al sistema se le compensa con un control PI, este error se eliminará por completo, esto por el integrador adicional que inserta al controlador del sistema, por lo que, el controlador tipo PI no será viable para el caso del control de posición, recordando que, por motivos de comparación de estos controladores, no es conveniente eliminarlo.

En el caso de usar un control PD, éste no eliminaría el error en régimen estacionario ante una rampa unitaria, sino que por su acción derivativa aumentaría la velocidad de reacción del sistema, incrementando la frecuencia de cruce de ganancia y por ende el ancho de banda del mismo.

El controlador PD es de la forma

$$C_{PD}(s) = K_p(1 + T_d s) = K_p T_d \left( s + \frac{1}{T_d} \right)$$

La constante proporcional  $K_p$  se ajusta de manera que cumpla con un error en régimen permanente de 5% (por especificaciones de diseño).

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0,05 \quad K_v = 20s^{-1} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s C_{PD}(s) P_{n, pos}(s)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K_p (1 + T_d s) \cdot \frac{2081}{s(4,2 \times 10^{-3} s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)} = 1,07 K_p = 20$$

$$\boxed{K_p = 18,69}$$

Para determinar la frecuencia de cruce  $\omega_c = 1/T_d$  del controlador se recurrió a la herramienta de MATLAB<sup>®</sup>, para sistemas SISO denominado “SISO Design Tool”, donde se realizó una sintonía fina (tanteo) hasta obtener los parámetros de diseño usados en los controladores de posición, velocidad y fuerza. Las ecuaciones del controlador y de la función de transferencia a lazo abierto  $L(s)$ , obtenidos son las siguientes:

$$C_{PD,pos}(s) = 18,69(1 + 0,033s) = 0,62(s + 30,2) \quad (4.45)$$

$$L^*_{PD,pos}(s) = \frac{1290,22(s + 30,2)}{s(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)} \quad (4.46)$$

En la figura 4.23 se muestra el diagrama de Bode de la ecuación 4.46. En las figuras 4.24 y 4.25 se observan las respuestas transitorias de la misma ante un escalón y rampa unitaria respectivamente.

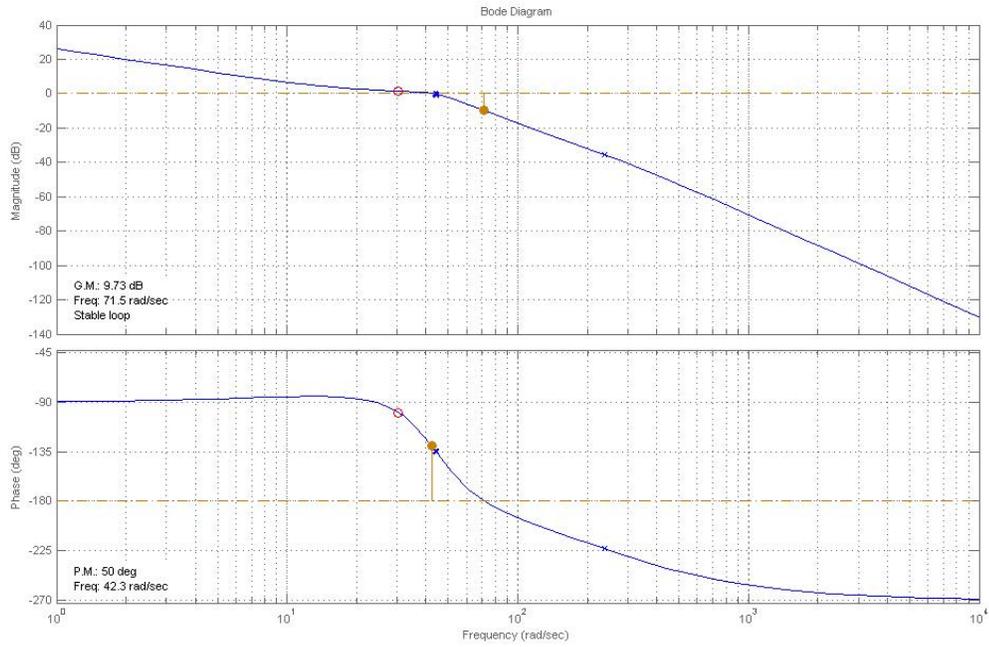


Figura 4.23. Diagrama de Bode de la ecuación 4.27 con el controlador PD.

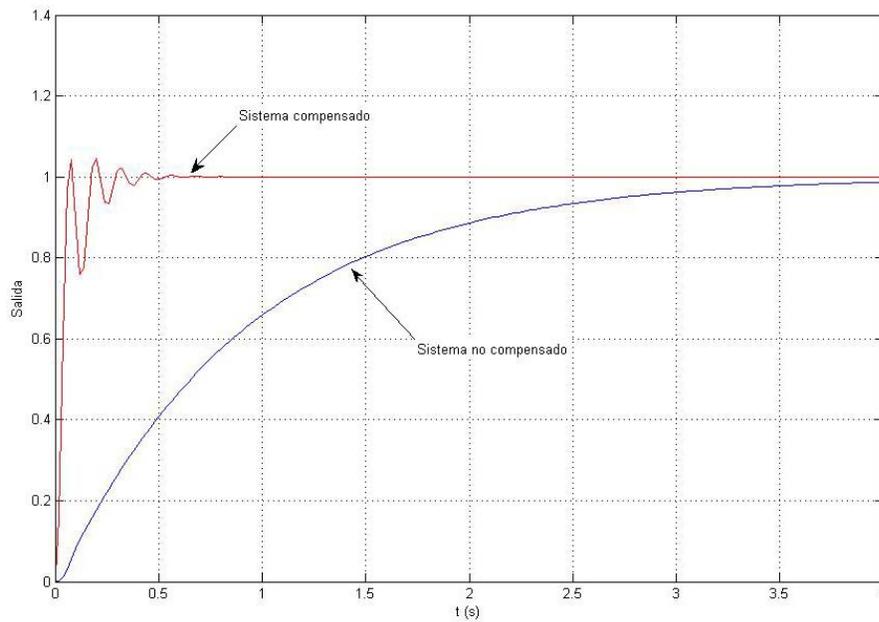
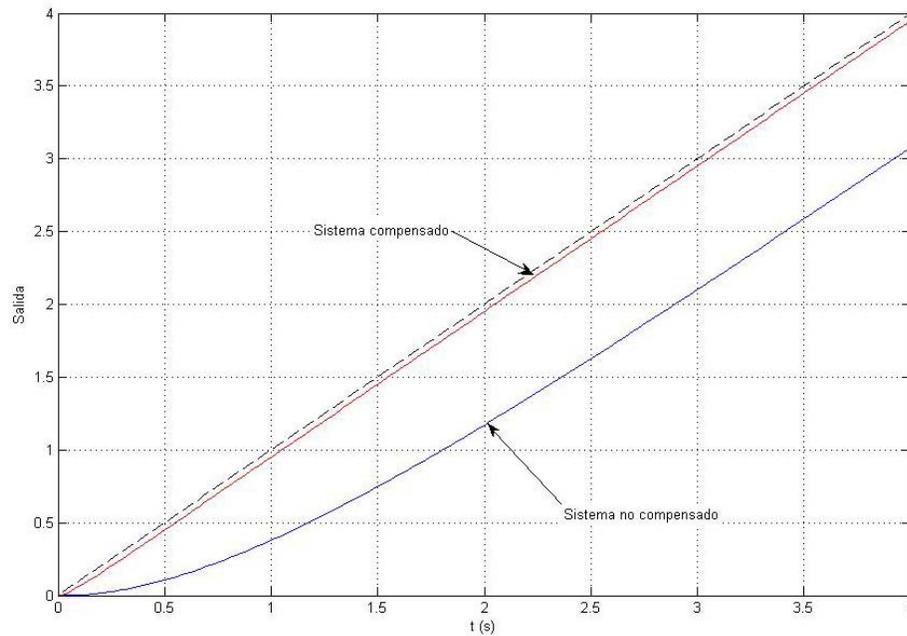


Figura 4.24. Respuesta (posición) ante un escalón unitario. Sistema no compensado y el compensado.



**Figura 4.25.** Respuesta (posición) ante una rampa unitaria. Sistema no compensado y el compensado.

### 4.3.2 Velocidad

Tomando en consideración la ecuación (4.29), como se observa es un sistema de fase mínima de tipo cero, por lo que ésta requerirá de un integrador que podrá ser proporcionado por un control PI, pues eliminará, el error en régimen permanente ante un escalón unitario, sin anular a éste, generado ante una rampa unitaria. La utilización de un PD fallará en el error estacionario frente a una rampa unitaria, debido a que este controlador no aporta el integrador necesario para eliminarlo, por lo que en este caso, será conveniente la utilización del control PI.

El control PI a usar es de la forma:

$$C_{PI}(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_P \frac{(s + \omega_i)}{s}$$

Debido a la configuración del controlador PI, el integrador que se añade al sistema (4.29) hace que se comporte de forma idéntica al integrador que tiene el sistema (4.27), debido a que la diferencia entre dichos sistemas solamente por un integrador, por lo que los parámetros (ganancia y frecuencia de corte del adelanto lineal) del controlador, corresponderán a los mismos del PD para el caso de posición, anteriormente determinado. Por tanto,

$$C_{PI}(s) = 18,62 \left( 1 + \frac{1}{0,033s} \right) = 18,62 \frac{(s + 30,2)}{s} \quad (4.47)$$

Es conveniente acotar que el controlador PI determinado, adiciona la misma ganancia y el cero que presenta el control PD, además de que los sistemas (4.27) y (4.29), muestran los mismos coeficientes de las funciones de transferencia, por lo que al aplicar un PI al sistema de velocidad (4.29) se comportará idénticamente al sistema de posición (4.27) controlado por un PD, por lo que las figuras 4.23, 4.24 y 4.25 serán iguales para éste caso.

### 4.3.3 Fuerza

Tomando en consideración la ecuación (4.31), el sistema corresponde a una función de transferencia de tipo cero, pero con derivador, el cual hace que ni un controlador PI y ni PD, puedan satisfacer la especificación de diseño propuesta en régimen permanente ante una rampa unitaria. Por lo que, en este caso, no se realizará el diseño de dichos controladores.

# CAPÍTULO V: Análisis de Resultados y Conclusiones

---

*En esta sección se realizará los análisis de los resultados obtenidos en el capítulo IV, además la determinación de los índices de desempeño de los controladores diseñados, como herramienta de comparación. Los índices de desempeño a estudiar son: precisión, sobrepico, persistencia, índice de robustez y agresividad, y se concluirá de acuerdo al comportamiento de las variables (posición, velocidad y fuerza) que presenta el sistema controlado.*

## 5.1 Análisis de Desempeño de los Controladores [6]

Uno de los problemas más comunes, es decidir que controlador es el más adecuado de entre un conjunto de diseños realizados por el ingeniero en control, de manera que, estos puedan cumplir los requerimientos dados por el diseñador.

Esta decisión es importante no solamente para el ingeniero en control, sino que tiene importancia en el campo de la robótica, debido a que en la misma se diseña un agente selector (ente encargado de seleccionar los controles a usar en una tarea), el cual debe de realizar una toma de decisiones en la selección del controlador. Para ello se determinarán algunos índices de desempeño sobre los controladores diseñados, como herramienta de comparación. Los índices de desempeño a estudiar, con la arquitectura de control como la mostrada en la figura 4.2, son: precisión, sobrepico, persistencia, índice de robustez y agresividad.

El análisis de desempeño de los controladores se realizará por variable a controlar, es decir, posición, velocidad y fuerza del émbolo del actuador.

### 5.1.1 Posición

El controlador obtenido por Loopshaping (4.37) es de tipo impropio (orden del polinomio del numerador mayor al orden del denominador), esto debido a que el orden efectivo (diferencia entre los órdenes del denominador y numerador) de la función  $L(s)$  seleccionada es igual a la unidad y la planta  $P_{n,pos}(s)$  muestra, un orden efectivo de dicha función de transferencia igual a

cuatro, al aplicar  $C = L/P$  el controlador que se obtendría sería impropio por el bajo orden efectivo que muestra la función  $L(s)$ .

La selección de  $L(s)$  se tomó, como una función en retraso simple, debido a que el comportamiento de dicha función de transferencia se ve determinada por las características que presentan las cotas superior e inferior de Loopshaping (sección 4.3.4); a bajas frecuencias, la magnitud de estas no varía, mientras que a frecuencias medias (de entre 2 a 20 rad/s) se observa que la magnitud varía de forma proporcional a razón de -20 dB/década, por lo que llevó a la decisión iniciar el diseño con una función como la de la ecuación (4.24), además de la simplicidad en la determinación de sus parámetros, de manera que, cumpla las condiciones para que  $L(s)$  esté por encima de la cota inferior y por debajo de la cota superior simultáneamente sin que ésta se aleje mucho de ellas, con la finalidad de no sobrediseñar el controlador.

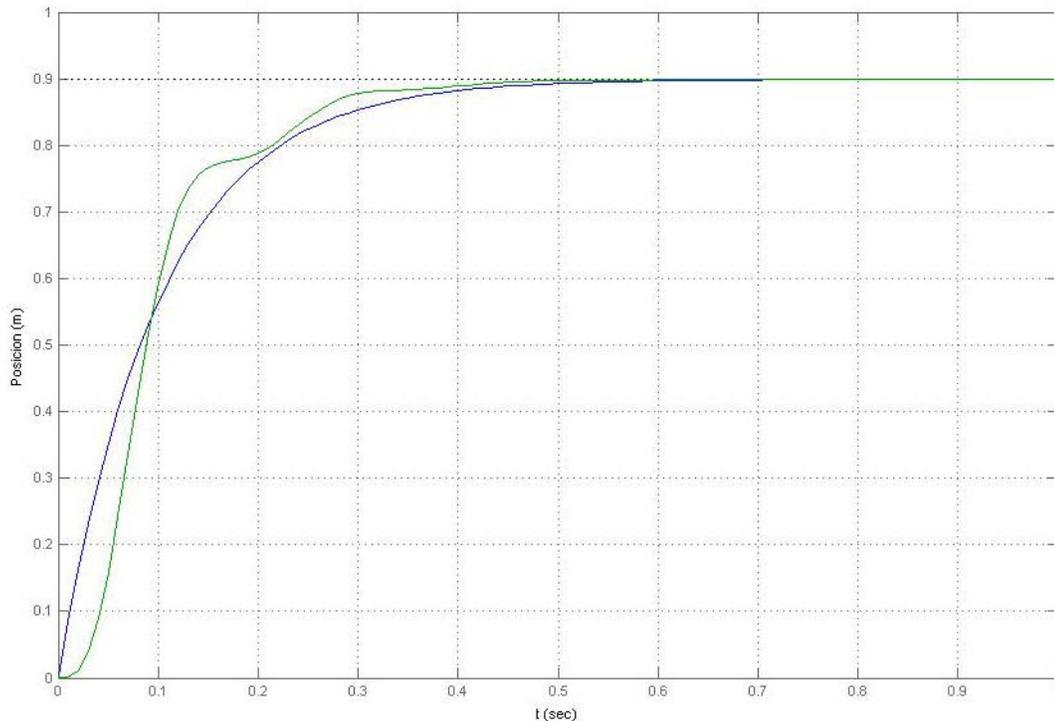
En la práctica no es posible construir un controlador de tipo impropio, debido a esto, se realizó un análisis de magnitud a los coeficientes que acompañan los términos de mayor orden en el numerador del controlador sin compensar  $C_{pos}(s)$  (ecuación 4.28). Los coeficientes obtenidos están muy por debajo de la unidad, de órdenes entre  $1 \times 10^{-6}$  y  $1 \times 10^{-3}$ , por lo que dichos coeficientes son despreciables respecto a los demás en las variables de menor grado, quedando por reducción de orden el siguiente controlador:

$$C_{pos,reduc}(s) = \frac{8,32s}{s+1} \quad (5.1)$$

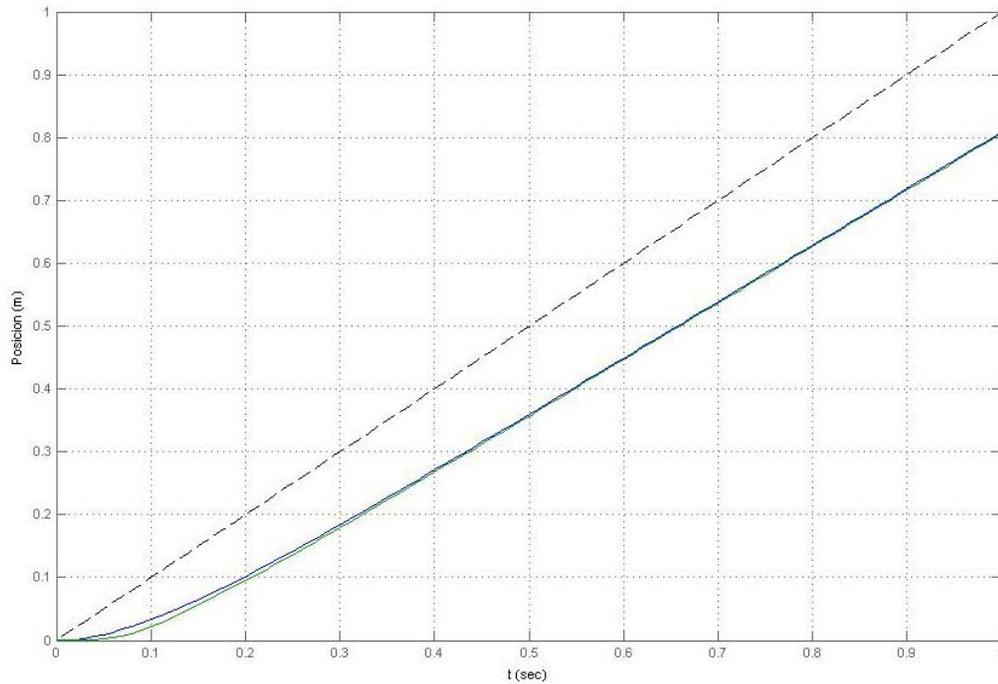
Siendo la función de transferencia a lazo abierto  $L_{pos,reduc}(s)$  el siguiente,

$$L_{pos,reduc}(s) = \frac{17314}{(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)} \quad (5.2)$$

Para convalidar el uso del controlador de ecuación (5.1), como controlador alternativo, se comparó el efecto que tiene este sobre la planta  $P_{n,pos}(s)$  versus la planta controlada por la obtenida por Loopshaping sin compensar de ecuación (4.28) con la finalidad de observar las respuestas simples sin ajustar a las especificaciones de diseño, ante una entrada en escalón y rampa unitaria, véase figuras 5.1 y 5.2.



**Figura 5.1.** Respuesta (posición) ante un escalón unitario. Ecuación 4.27, controlada por el controlador diseñado por Loopshaping (línea azul) y por el de orden reducido (línea verde).



**Figura 5.2.** Respuesta (posición) ante una rampa unitaria. Ecuación 4.27, controlada por el controlador diseñado por Loopshaping (línea azul) y por el Loopshaping reducido en orden (línea verde).

De dichas figuras se puede observar en el sistema controlado por el controlador reducido ( $L_{pos,reduc}(s)$ ), que el comportamiento es cercano al del sistema controlado por el controlador por Loopshaping ( $L_{pos}(s)$ ).

El comportamiento oscilatorio que se observan en las figuras 5.1 y 5.2 corresponde al el par de polos complejos ubicados en  $s = -18,33 \pm j40,09$ , además de gobernar el comportamiento dado por el polo dominante ubicado en  $s = -1$ , por su cercanía al eje imaginario  $j\omega$  o región de inestabilidad.

El sistema de la ecuación (5.2), como en los casos de los controladores diseñados por Loopshaping, y los controladores PI y PD, éste se ajustará a las mismas condiciones transitorias y estacionarias que las descritas en la sección 4.3.5 del capítulo IV, aplicando los mismos métodos mostrados en dicho capítulo. Este sistema, es de fase mínima de tipo 0, generando un error en régimen permanente ante un escalón unitario, el cual se eliminará con la adición de un integrador, quedando lo siguiente:

$$L'_{pos,reduc}(s) = \frac{17314}{s(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)} \quad (5.3)$$

El comportamiento en diagrama de Bode de la ecuación (5.3) se observa en la figura 5.3

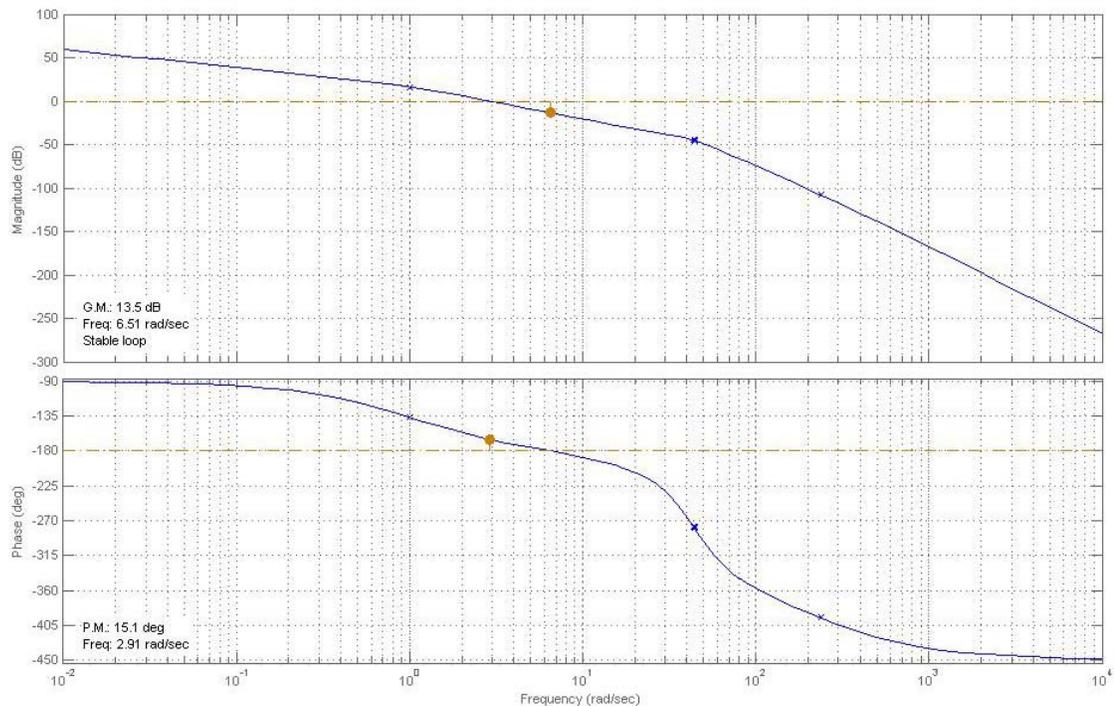


Figura 5.3. Diagramas de Bode de la ecuación 5.3.

Con el integrador, el margen de fase cambió a  $15.1^\circ$  por lo que se necesitará de un compensador de adelanto que proporcione un ángulo de adelanto suficiente para obtener un margen de fase dentro del rango de  $30^\circ$  a  $60^\circ$ .

Aplicando la metodología mostrada en el capítulo IV, sección 4.3.5, se obtuvo el siguiente compensador de adelanto con integrador:

$$C_c(s) = 10,28 \frac{s + 2,8}{s(s + 19,18)} \quad (5.4)$$

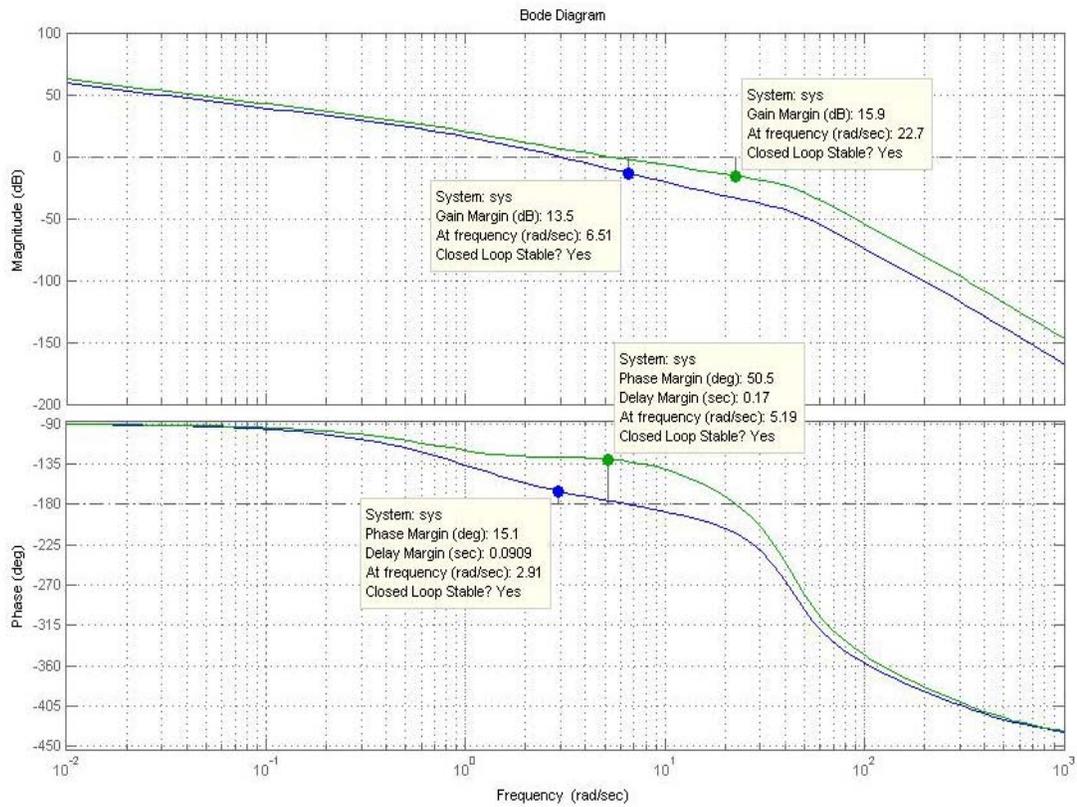
Adicionando el compensador  $C_c(s)$ , al controlador de posición reducido (5.1) se tiene:

$$C_{pos,reduc}^*(s) = 85,53 \frac{(s + 2,8)}{(s + 1)(s + 19,18)} \quad (5.5)$$

Siendo la función de transferencia a lazo abierto compensado en fase, para los casos de posición la siguiente:

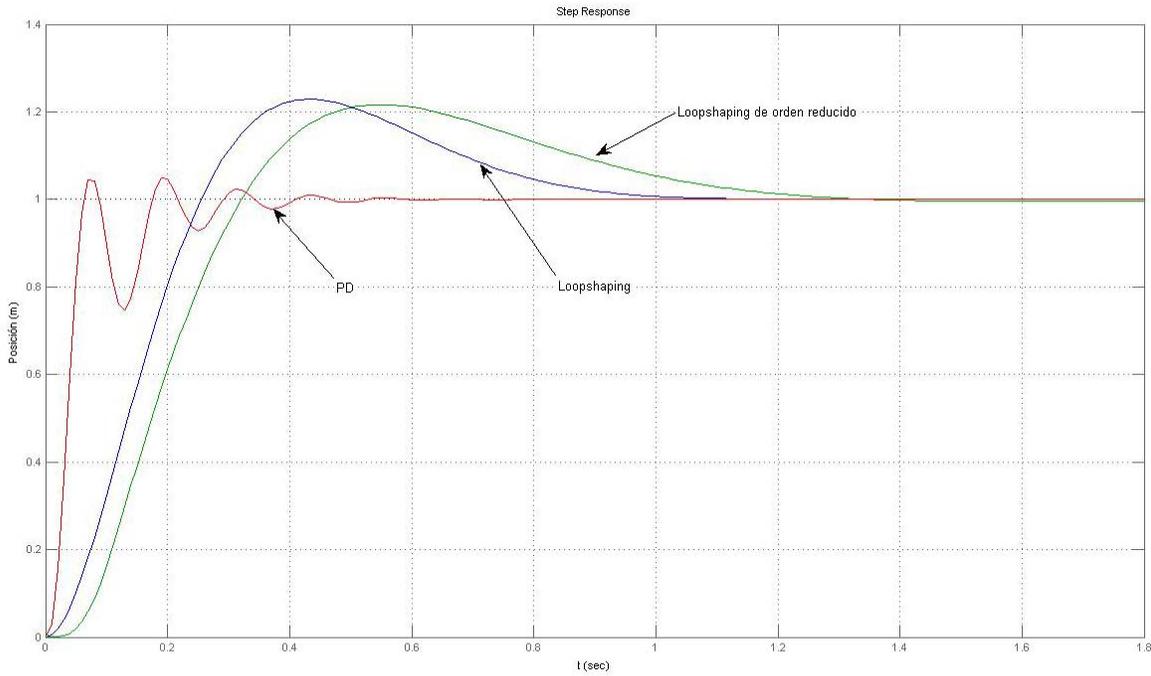
$$L_{pos,reduc}^*(s) = \frac{177987,92(s + 2,8)}{s(s + 19,18)(s + 1)(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)} \quad (5.6)$$

En la figura 5.4 se observa la modificación que ocurre en el sistema de ecuación (5.3) después de ser añadido el compensador en adelanto, obteniéndose un margen de ganancia y un margen de fase de  $+\infty$  dB y  $50,7^\circ$  respectivamente, cumpliendo con los requerimientos propuestos.



**Figura 5.4.** Diagramas de Bode de la ecuación 5.3 (línea azul) y el de la ecuación 4.35 compensado en ganancia y fase (línea verde).

Obtenidos los sistemas  $L(s)$  por Loopshaping (4.39) y el de Loopshaping por reducción (5.6), se analizarán sus respuestas transitorias junto a la respuesta temporal del sistema (4.46), la cual corresponde a planta controlada a través del control PD de ecuación (4.45).



**Figura 5.5.** Respuesta (posición) ante un escalón unitario de la planta (4.27) controlado por Loopshaping (línea azul), por Loopshaping de orden reducido (línea verde) y por PD (línea roja).

Los polos en lazo cerrado de los sistemas mostrados en la figura 5.5, se determinaron con Matlab y corresponden a los siguientes:

**Tabla 5.1.** Polos a lazo cerrado y factor de amortiguamiento relativo de los sistemas (4.39), (4.46) y (5.6).

Loopshaping	PD	Loopshaping de orden reducido
$s = -4,81$ $s = -5,64 \pm j5,56$ $\xi = 0,71$	$s = -243$ $s = -13,8$ $s = -8,85 \pm j51,8$ $\xi = 0,17$	$s = -238$ $s = -10,6$ $s = -19,2 \pm j39$ $s = -3,89 \pm j3,12$ $\xi = 0,78$

Según lo mostrado en la tabla 5.1 los polos que dominan la respuesta transitoria de dichos sistemas corresponden a los polos complejos conjugados, esto según el criterio sobre polos dominantes en lazo cerrado descrito en [8], por lo que su comportamiento corresponderá a un sistema de segundo orden. El comportamiento oscilatorio del sistema (4.46) es debido a que el factor de amortiguamiento relativo ( $\zeta$ ) es muy bajo, siendo el rango de valores recomendados entre 0,4 y 0,8 para una respuesta suficientemente rápida y amortiguada (op. cit.).

Los sistemas controlados por Loopshaping (4.39) y por Loopshaping de orden reducido (5.6), presentan un polo dominante en  $s = -1$ , por la cercanía del mismo al eje imaginario  $j\omega$  del plano complejo, siendo sus efectos en el espacio temporal mayores respecto al resto de los polos, quedando que, la constante de tiempo a lazo abierto que rige a dichos controladores será  $\tau = 1s$ , dicha constante de tiempo se usará para determinar el índice de desempeño de precisión, según lo visto en el capítulo II.

Para el caso del sistema controlado por un control PD el sistema a lazo abierto lo domina el retraso cuadrático, debido a que el par de polos complejos  $s = -18,33 \pm 40,09j$  se encuentran más cercanos al eje imaginario, por lo que la constante de tiempo a lazo abierto que rige este sistema será:

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} = \frac{2}{36,65} \quad \boxed{\tau = 0,0545s}$$

A partir de las respuestas transitorias de los sistemas (4.39), (4.46) y (5.6) se determinaron las siguientes características a través de Matlab, las cuales

se muestran en la tabla 5.2. Dichas características serán la base para la determinación de los índices de desempeño según lo mostrado en el capítulo II.

**Tabla 5.2.** Características transitorias de los sistemas (4.39), (4.46) y (5.6)

Característica	Loopshaping	PD	Loopshaping de orden reducido
Tiempo de elevación (s)	0,1750	0,0401	0,199
Tiempo de asentamiento (s)	0,898	0,381	1,15
IAE	0,0571	0,0375	0,0620
Constante de tiempo a lazo abierto (s)	1,00	0,0545	1,00

Para la determinación del *IAE*, se utilizó el programa C.4 (véase anexo C), donde el sistema se verá afectado por una perturbación de tipo pulso con una amplitud máxima de 1m y una duración de 1 segundos.

Para la determinación de la precisión de los sistemas se aplicó la ecuación (2.27), a través del programa C.5, del anexo C, usando las constantes de tiempo a lazo abierto de la tabla 5.2, siendo el error  $e$  el siguiente:

$$e = \lim_{t \rightarrow 2\tau} \frac{\tau * t - y(t)}{\tau * t} * 100$$

- Loopshaping:  $e = 2,51\%$  ; Precisión=97,49%
- Loopshaping de orden reducido:  $e = 3,74\%$  ; Precisión=96,26%
- PD:  $e = 2,49\%$  ; Precisión=97,51%

Para la determinación del sobrepico de dichos sistemas se aplicó la ecuación (2.28).

- Loopshaping:  $M_p = 22,90\%$
- Loopshaping de orden reducido:  $M_p = 21,70\%$
- PD:  $M_p = 4,83\%$

Para el análisis de persistencia, el sistema se verá afectado en un 90% de perturbaciones de tipo pulso con una amplitud máxima de 1m y una duración de 1 segundos. Para su determinación se aplicó la ecuación (2.30), con los valores del IAE mostrados en la tabla 5.2

- Loopshaping:  $Persistencia = 84,86\%$
- Loopshaping de orden reducido:  $Persistencia = 84,42\%$
- PD:  $Persistencia = 86,63\%$

Para la determinación del índice de robustez de los sistemas anteriormente mencionados se aplicó la ecuación (2.32), variando los parámetros de la planta según la tabla 4.2, a través del programa C.6 (anexo C).

- Loopshaping:  $IndiceRobustez = 45,88\%$
- Loopshaping de orden reducido:  $IndiceRobustez = 80,78\%$
- PD:  $IndiceRobustez = 31,27\%$

Para la determinación de la agresividad de los sistemas se realizó mediante la ecuación (2.33).

- Loopshaping: *Agresividad* = 80,51%
- Loopshaping de orden reducido: *Agresividad* = 82,70%
- PD: *Agresividad* = 89,50%

**Tabla 5.3.** Índices de desempeño de los sistemas (4.39), (4.46) y (5.6)

Característica	Loopshaping	PD	Loopshaping de orden reducido
Precisión (%)	97,49	97,51	96,26
Sobrepico (%)	22,90	4,83	21,70
Persistencia (%)	84,86	86,63	84,42
Índice de robustez (%)	45,88	31,27	80,78
Agresividad (%)	80,51	89,50	82,70

De la tabla 5.3 se puede observar lo siguiente:

- Tanto el sistema controlado por Loopshaping (4.39) como el controlado por PD (4.46) son más precisos que el controlador por Loopshaping de orden reducido (5.6), esto debido a lo lento de su repuesta, véase figura 5.5, por lo que requiere un mayor tiempo para corregir correctamente el error, esto se puede observar en el tiempo de asentamiento, a pesar de compartir la misma constante de tiempo a lazo abierto con el sistema (4.39), recordando que uno de los parámetros principales que rige a la precisión, por definición, es la constante  $\tau$ .

- b) Los sistemas controlado por Loopshaping (4.39) y Loopshaping de orden reducido (5.6) presenta un sobrepico mayor al del sistema controlado PD (4.46), debido a que los ceros que presentan en lazo cerrado, los dos primeros sistemas, se encuentran muy cercanos al eje imaginario  $j\omega$  del plano complejo ( $s = -2,97$  y  $s = -2,8$  respectivamente) en comparación al cero en lazo cerrado del sistema controlado por PD ( $s = -30,2$ ) [8].
- c) El sistema controlado por PD (4.46), es ligeramente más persistente respecto a los sistemas (4.39) y (5.6), debido a que la acción derivativa incrementa la velocidad de respuesta que tiene dicho sistema, reduciendo el *IAE* (recordando que esta depende el error absoluto frente a una perturbación) y por ende incrementando su persistencia. A pesar de que los sistemas (4.39) y (5.6) presentan una velocidad de respuesta menor respecto al sistema controlado por PD, sus persistencias están cercanas a la de éste último.
- d) La robustez de los sistemas controlados por Loopshaping (4.39) y por Loopshaping de orden reducido (5.6) son mayores respecto al obtenido por el sistema controlado por PD (4.46), debido que el diseño por Loopshaping considera las incertidumbres que presenta la planta (4.27), mientras que el diseño del controlador PD solo se diseño en base a los valores nominales de dicha planta. También se puede observar que el índice de robustez para el sistema (4.39) es menor al 50%, esto se debe a que dentro de la familia de plantas perturbadas, según la tabla 4.2, alguna(s) de la(s) planta(s) cambio su margen de ganancia nominal, que correspondía a  $+\infty$  dB, a algún otro valor real distinto  $+\infty$  dB, por lo que el porcentaje de

variación en el margen de ganancia sería infinito, disminuyendo el índice de robustez por más del 50% al aplicar la ecuación (2.32).

- e) El sistema controlado por PD (4.46) es más agresivo ante el cambio de consigna que los sistemas controlado por Loopshaping (4.39) y por Loopshaping de orden reducido (5.2), esto se debe a que el primer sistema presenta un tiempo de elevación mucho menor que la los obtenidos en los sistemas (4.39) y (5.2). El hecho de que el sistema presente una agresividad alta, no garantiza que el sistema se asiente de forma rápida, como se observa en la figura 5.5, en donde el sistema (5.2) a pesar de asentarse más lentamente que el sistema (4.39), muestra una agresividad ligeramente mayor, pues este parámetro solo mide la rapidez en tratar de alcanzar la señal de entrada.

### 5.1.2 Velocidad

Para el caso de la velocidad, el controlador obtenido por Loopshaping (4.38) es de tipo impropio, por lo que se aplicó los mismos criterios usados en dicha sección, quedando el siguiente controlador:

$$C_{vel,reduc}(s) = \frac{8,32}{s+1} \quad (5.7)$$

Siendo la función de transferencia a lazo abierto  $L_{vel,reduc}(s)$  el siguiente,

$$L_{vel,reduc}(s) = \frac{17314}{(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s+1)(s^2 + 36,65s + 1943)} \quad (5.8)$$

Como se puede observar el sistema (5.8) es idéntico al sistema (5.2), por lo que el compensador para ajustar este sistema, a las especificaciones de diseño dados en el capítulo IV, será igual al del (5.4). Adicionando dicho compensador al controlador (5.7) se tiene,

$$C_{vel,reduc}^*(s) = 85,53 \frac{(s + 2,8)}{s(s + 1)(s + 19,18)} \quad (5.9)$$

Siendo la función de transferencia a lazo abierto compensado en fase, para los casos de posición la siguiente:

$$L_{vel,reduc}^*(s) = \frac{177987,92(s + 2,8)}{s(s + 19,18)(s + 1)(4,2 \times 10^{-3}s + 1)(s^2 + 36,65s + 1943)} \quad (5.10)$$

Debido a que el sistema de velocidad (5.10) es similar al sistema de posición (5.6), y que la planta (4.29) controlada por el controlador PI (4.47) generará un sistema idéntico al (4.46), se observa que las respuestas y características transitorias serán las mismas a las obtenidas en la sección 5.1.1, por lo que los análisis realizados en dicha sección, corresponderán, de igual forma, a los realizados para el caso de la velocidad.

### 5.1.3 Fuerza

Para el caso de la fuerza, el controlador obtenido por Loopshaping (4.43), a diferencia de los controladores de posición y velocidad, éste es de tipo propio, por lo que no fue necesario obtener un controlador de orden reducido, para su factibilidad en su elaboración.

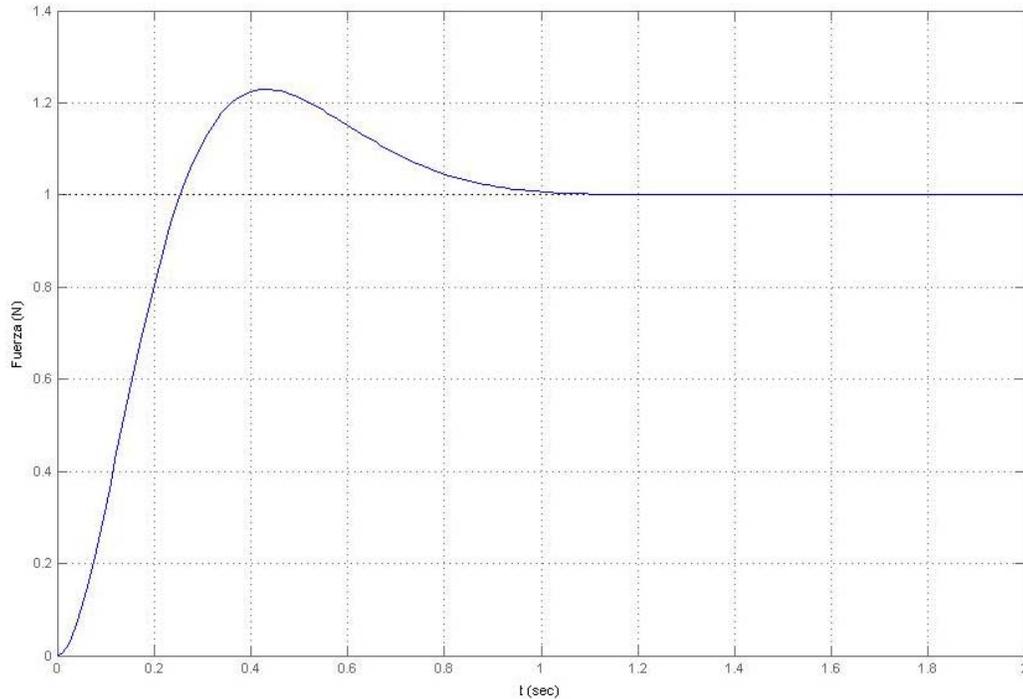
Recordando que el sistema (4.31), es un sistema de tipo cero, con derivador por lo que la adición de un integrador, a través de un PI, o un derivador, a través de un PD, no permitirá alcanzar las especificación de diseño, porque no podrá corregir el error en estado estacionario ante una rampa ni ante un escalón. Por esta razón no será posible realizar una comparación con un control PD o PI, por lo que sólo se determinará su respuesta transitoria, además de obtener los índices de desempeño de dicho controlador, para su respectivo análisis.

La respuesta transitoria del sistema controlado por Loopshaping (4.44), se muestra en figura 5.5.

Los polos en lazo cerrado del sistema mostrado en la figura 5.5, se determinaron con Matlab y corresponden a los siguientes:

**Tabla 5.4.** Polos a lazo cerrado y factor de amortiguamiento relativo del sistema (4.44).

Loopshaping		
$s = -4,79$	$s = -5,65 \pm j5,58$	$\xi = 0,71$



**Figura 5.6.** Respuesta (fuerza) ante un escalón unitario de la planta (4.31), controlado por Loopshaping

Según lo mostrado en la tabla 5.4 los polos que dominan la respuesta transitoria de dicho sistema corresponden a los polos complejos conjugados, esto según el criterio sobre polos dominantes en lazo cerrado descrito en [8], por lo que su comportamiento corresponderá a un sistema de segundo orden. El alto factor de amortiguamiento del sistema (4.44) es relativamente alto  $\xi = 0,71$ , provocando que en la figura 5.5, se presente una baja oscilación, la cual es una característica deseada, pero el cual disminuye su velocidad de respuesta (op. cit.).

El sistema controlado por Loopshaping (4.44), presentan un polo dominante en  $s = -1$ , por la cercanía del mismo al eje imaginario  $j\omega$  del plano complejo, siendo sus efectos en el espacio temporal mayores respecto

al resto de los polos, quedando que, la constante de tiempo a lazo abierto que rige a dichos controladores será  $\tau = 1s$ , dicha constante de tiempo se usará para determinar el índice de desempeño de precisión, según lo visto en el capítulo II.

A partir de la respuesta transitoria del sistema (4.44), se determinaron las siguientes características a través de Matlab, las cuales se muestran en la tabla 5.5. Dichas características serán la base para la determinación de los índices de desempeño según lo mostrado en el capítulo II.

**Tabla 5.5.** Características transitorias del sistema (4.44).

Característica	Loopshaping
Tiempo de elevación (s)	0,1750
Tiempo de asentamiento (s)	0,896
IAE	0,0571
Constante de tiempo a lazo abierto (s)	1,00

Para la determinación del *IAE*, se utilizó el programa C.4 (véase anexo C), variando solo los valores de la función de transferencia a lazo cerrado para el sistema (4.44), donde el sistema se verá afectado por una perturbación de tipo pulso con una amplitud máxima de 1m y una duración de 1 segundos.

Para la determinación de la precisión de los sistemas se aplicó la ecuación (2.27), usando las constantes de tiempo a lazo abierto de la tabla 5.2, siendo el error  $e$  el siguiente:

$$e = \lim_{t \rightarrow 2\tau} \frac{\tau * t - y(t)}{\tau * t} * 100$$

$$e = 2,50\% ; \text{ Precisión} = 97,50\%$$

Para la determinación del sobrepico de dichos sistemas se aplicó la ecuación (2.28).

$$M_p = 22,90\%$$

Para el análisis de persistencia, el sistema se verá afectado en un 90% de perturbaciones de tipo pulso con una amplitud máxima de 1m y una duración de 1 segundos. Para su determinación se aplicó la ecuación (2.30), con los valores del IAE mostrados en la tabla 5.2

$$\text{Persistencia} = 84,86\%$$

Para la determinación del índice de robustez de los sistemas anteriormente mencionados se aplicó la ecuación (2.32), variando los parámetros de la planta según la tabla 4.2, a través del programa C.6 (anexo C).

$$\text{IndiceRobustez} = 45,95\%$$

Para la determinación de la agresividad de los sistemas se realizó mediante la ecuación (2.33).

$$Agresividad = 80,47\%$$

**Tabla 5.6.** Índices de desempeño de los sistemas (4.44).

Característica	Loopshaping
Precisión (%)	97,50
Sobrepico (%)	22,90
Persistencia (%)	84,86
Índice de robustez (%)	45,95
Agresividad (%)	80,47

De la tabla 5.6 se puede observar lo siguiente:

- Presenta una alta precisión por el integrador que se forma en el sistema (4.44), al añadir el controlador (4.43) a la planta (4.31).
- La presencia del cero  $s = -2,96$  en el lazo cerrado del sistema (4.44) produce un sobrepico relativamente alto, debido a la cercanía de dicho cero al eje imaginario  $j\omega$  del plano complejo [8].
- El sistema (4.44), por la característica de robustez y rechazo a las perturbaciones en su diseño, dicho sistema reduce el  $IAE$  (recordando que esta depende el error absoluto frente a una perturbación) y por ende incrementando su persistencia.

- d) La robustez de los sistema (4.44), se puede observar es menor al 50%, esto se debe a que dentro de la familia de plantas perturbadas, según la tabla 4.2, alguna(s) de la(s) planta(s) cambio su margen de ganancia nominal, que correspondía a  $+\infty$  dB, a algún otro valor real distinto  $+\infty$  dB, por lo que el porcentaje de variación en el margen de ganancia sería infinito, disminuyendo el índice de robustez por más del 50% al aplicar la ecuación (2.32).

Se puede observar, que los índices de desempeño del control de la fuerza, fueron similares a los obtenidos para el caso de la posición y velocidad, esto debido a que dichos sistemas fueron diseñados a partir de la misma técnica de control y ajustados a las mismas especificaciones de diseño, recordando además, que las funciones de transferencia (4.27), (4.29) y (4.31) solo varían en la ganancia y en el integrador o derivador que se generan, por lo que era de esperarse estos resultados.

## Conclusiones

- En función de la información recabada de otras investigaciones y textos relacionados con la técnica de Loopshaping y de los diferentes servomecanismos, se comprendió el funcionamiento estos últimos y de los parámetros que se ven involucrados en dichas plantas, además de los pasos a seguir en el diseño los controladores, para el caso de ésta investigación, de la posición, velocidad y fuerza de un actuador mediante de técnica mencionada anteriormente.
- A partir de la planta seleccionada, se obtuvieron las ecuaciones que rigen la dinámica de dicha planta. Dichas ecuaciones por ser no lineales, se procedió a su linealización a través de series de Taylor de primer orden (mostrados en el anexo A), alcanzando modelo matemático lineal que aproxima el comportamiento de la planta usada.
- Se diseño el esquema de control, aplicando método gráfico de la técnica de Loopshaping mostrada en el capítulo II, donde los controladores obtenidos resultaron ser impropios, por lo que se les realizó una reducción orden a los mismos y su respectiva comparación, donde se observo que se podían usar estos últimos como controladores alternativos. Todos los controladores obtenidos fueron ajustados a las especificaciones de diseño mostradas en la sección 4.3.5, por compensación en serie, a través de un compensador en adelanto, debido a las características frecuenciales que mostraban los sistemas controlados.

- Al momento de diseñar cualquier controlador, se debe de tener en cuenta que, para la fabricación de éste, es necesario que dicho controlador sean propio, pues de no serlo, físicamente es imposible construirse. De conseguirse un controlador impropio en el diseño, se debe de recurrir a técnicas que permitan la obtención de controladores equivalentes propios a partir de impropios.
- Todos los análisis se realizaron a través de Matlab, y algunas de sus herramientas como “Desing SISO Tool”, los cuales facilitaron el desarrollo de los cálculos y gráficas necesarios para alcanzar el objetivo general de la presente investigación.
- Con los algoritmos desarrollados en Matlab, se realizaron los análisis en respuesta transitoria y frecuencial de los sistemas controlados por los controladores diseñados por Loopshaping obtenidos en las secciones 4.3.4 y 5.1, los cuales mostraron ser sistemas estables tal que cumplen con las especificaciones a los cuales fueron diseñados. A partir dichas respuestas, se determinaron los índices desempeño de éstos controladores, para su posterior comparación, con los obtenidos por la teoría de control clásica (PI y PD).
- A partir de las especificaciones de diseño mostradas en la sección 4.3.5 y en función de las características de las plantas a controlar se observó lo siguiente:
  - Para el control de la posición, solo fue necesario usar un control PD, debido a que éste podría cumplir con las especificaciones de diseño; mientras que el controlador PI,

no podría cumplir con dichas especificaciones por motivos de comparación entre los controladores obtenidos por Loopshaping y los obtenidos por la teoría de control clásica.

- Para el control de la velocidad, solo fue necesario usar un control PI, por las mismas razones expuestas en el caso del control de la posición.
- Para el control de la fuerza, tanto las el control PD como el PI, debido a que con estas no es posible cumplir con las especificaciones de diseño dadas.
- Se realizó la comparación entre los controladores diseñados por Loopshaping de las secciones 4.3.4 y 5.1 con los diseñados por teoría de control clásica (PI y PD) de la sección 4.4, en donde se concluye que los sistemas obtenidos por Loopshaping presenta una mayor robustez y rechazo a las perturbaciones que en los obtenidos por la teoría de control clásica, pero en otras características, los controladores PI y PD presentan una velocidad de respuesta mayor, con un menor sobrepico, además de que su determinación resulta ser más simple que por la técnica de Loopshaping.

## Recomendaciones

- a. Comprobar de manera experimental, que el modelo linealizado de la planta usada, se ajuste al sistema real, dentro de un rango aceptable.
- b. Usar el modelo matemático que incluyan no linealidades como: saturación, histéresis, fricción de Coulomb, etc. Lo que harán real al sistema.
- c. Optimizar los algoritmos usados en Matlab, para un diseño del controlador amigable, al momento de realizar la metodología de la técnica de control Loopshaping, descrito en la sección 2.2.5.
- d. Realizar los diseños de los controladores por Loopshaping, no solo por especificaciones de diseño de forma frecuencial, sino además por diseño por respuesta transitoria, para mejorar las características dinámicas de los sistemas controlados por Loopshaping.
- e. Verificar la efectividad de los sistemas controlados por Loopshaping de orden reducido, a través de la implementación en físico de dichos sistemas.

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] Carlson, J. y Doyle, J. (2002). *Complexity and robustness*. California, Estados Unidos: Universidad de California.
- [2] Colmenares, W. y Tadeo, F. (2005). *Apuntes sobre control robusto y multiobjetivos de sistemas*. Editorial Equinoccio.
- [3] Doyle, J.; Francis, B. y Tannenbaum, A. (1990). *Feedback Control Theory*. Editorial Macmillan Co.
- [4] Etchepareborda, A. y Flury, C. (2002). *Multivariable robust control of an integrated nuclear power reactor*. Bariloche, Argentina: Brazilian Journal of Chemical Engineering.
- [5] Ilchmann, A.; Sawodny, O. y Trenn, S. (2006). *Pneumatic cylinders: modelling and feedback force-control*. Universidad técnica Ilmenau.
- [6] Innocenti B. (2000). *Representación de la Dinámica del Cuerpo Físico de Agentes Físicos en Capacidades Atómicas*. Universidad de Girona.
- [7] Karpenko, M. y Sepehri, N. (2006). *Development and experimental evaluation of a fixed-gain nonlinear control for a low-cost pneumatic actuator*. Universidad de Manitoba, Canadá.
- [8] Katsuhiko, Ogata (2005). *Ingeniería de Control Moderna - 4º Edición*. Madrid, España: Editorial Pearson. Prentice Hall.

- [9] Prempain, E. y Postlethwaite, I. (2005) *Static  $H^\infty$  loop shaping control of a fly-by-wire helicopter*. Inglaterra: Universidad de Leicester.
- [10] Rahima, A. y Nowickib, E. (2005). *A robust damping controller for SMES using loop-shaping technique*. Calgary, Alta., Canada: Universidad de Calgary.
- [11] Reinelt, Wolfgang (2001).  *$H_\infty$  Loop Shaping for Systems with Hard Bounds*. Linköping, Suiza: Universidad de Linköping.
- [12] Sabino, C. (1986). *El Proceso de Investigación*. Caracas: Editorial PANAPO.
- [13] Safonov, M.; Laub, A.; Hartmann, G. (1981). *Feedback Properties of Multivariable Systems: The Role and Use of the Return Difference Matrix – Vol. 26*. Automatic Control, IEEE Transactions.
- [14] Stoll, K.; Deppert, W. (2000). *Dispositivos Neumáticos*. Marcombo. Colombia. Editorial Alfaomega.

## ANEXO A

---

## LINEALIZACIÓN DEL SISTEMA.

Las ecuaciones (4.4) y (4.5) requieren ser linealizadas para obtener las funciones de transferencias requeridas para estudio de la planta.

La linealización del sistema se realizará a través de una serie de Taylor de primer orden centrado en el estado deseado “E” (extensión total del vástago (punto de operación)).

En la cámara 1 del actuador se definen las siguientes variables:  $v = \dot{X}$ ;  $P_{d1} = \dot{P}_1$ ; esto se realizó con la finalidad de simplificar los términos, quedando la expresión de la siguiente manera:

$$\dot{m}_e(t) = \frac{A}{RT_0} P_1(t)v(t) + \frac{A}{C_P T_0} P_d(t)X(t) \quad (1)$$

El desarrollo de Taylor de primer orden de la ecuación (1) corresponde a la siguiente forma:

$$\dot{m}_e - \overline{\dot{m}_e} = K_1(P_1 - \overline{P}_1) + K_2(v - \overline{v}) + K_3(P_{d1} - \overline{P}_{d1}) + K_4(X - \overline{X}) \quad (2)$$

Evaluando las condiciones del estado “E” representado por los parámetros promedios que intervienen en el mismo y siendo sus condiciones las siguientes:  $\overline{P}_1 = P_0$  debido a que cuando el actuador se encuentra completamente extendido su valor alcanza al valor de la presión de suministro,  $\overline{v} = 0$  debido a la que la posición del actuador no varía esta variable se anula,  $\overline{X} = L$  como se encuentra completamente extendido la posición adquiere el valor de la carrera del pistón,  $\overline{\dot{m}_e} = 0$  como la presión de la cámara 1 se iguala a la presión de suministro no

existe flujo de aire,  $\bar{P}_{d1} = 0$  debido a que la presión en la cámara 1 se mantiene constante su variación se hace cero.

Entonces;

$$K_1 = \left. \frac{\partial \dot{m}_e}{\partial P_1} \right|_E = \frac{A}{RT_0} \bar{v} = 0 \quad K_2 = \left. \frac{\partial \dot{m}_e}{\partial v} \right|_E = \frac{A}{RT_0} \bar{P}_1 = \frac{AP_0}{RT_0}$$

$$K_3 = \left. \frac{\partial \dot{m}_e}{\partial P_{d1}} \right|_E = \frac{A}{C_P T_0} \bar{X} = \frac{AL}{C_P T_0} \quad K_4 = \left. \frac{\partial \dot{m}_e}{\partial X} \right|_E = \frac{A}{C_P T_0} \bar{P}_{d1} = 0$$

Sustituyendo las constantes obtenidas y devolviendo el cambio de variable en la ecuación (2), se tiene:

$$\dot{m}_e(t) = \frac{AP_0}{RT_0} \dot{X}(t) + \frac{AL}{C_P T_0} \dot{P}_1(t)$$

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación anterior, se tiene:

$$M_e(s) = \frac{AP_0}{RT_0} sX(s) + \frac{AL}{C_P T_0} sP_1(s) \quad (3)$$

En la cámara 2 del actuador se definen las siguientes variables:  $v = \dot{X}$ ,  $P_{d2} = \dot{P}_2$ , quedando la expresión de la siguiente manera:

$$\dot{m}_s(t) = -\frac{1}{RT_2} P_2(t) A v(t) + \frac{A}{C_P T_0} P_{d2}(t) (L - X(t)) \quad (4)$$

Evaluando las condiciones del estado "E" representado por los parámetros promedios que intervienen en el mismo y siendo sus condiciones las siguientes:  $\bar{P}_2 = P_a$  debido a que la cámara 2 se encuentra descargando a la atmósfera la presión en dicha cámara

alcanza el valor de la presión atmosférica;  $\bar{v} = 0$  debido a la que la posición del actuador no varía esta variable se anula;  $\bar{X} = L$  como se encuentra completamente extendido la posición adquiere el valor de la carrera del pistón;  $\bar{m}_s = 0$  como la presión de la cámara 2 se iguala a la presión de atmosférica no existe flujo de aire;  $P_{d2} = 0$  debido a que la presión en la cámara 2 se mantiene constante su variación se hace cero.

$$\dot{m}_s - \bar{m}_s = K_1(P_2 - \bar{P}_2) + K_2(v - \bar{v}) + K_3(P_{d2} - \bar{P}_{d2}) + K_4(X - \bar{X}) \quad (5)$$

$$K_1 = \left. \frac{\partial \dot{m}_s}{\partial P_2} \right|_E = \frac{A}{RT_2} \bar{v} = 0 \quad K_2 = \left. \frac{\partial \dot{m}_s}{\partial v} \right|_E = -\frac{A}{RT_2} \bar{P}_2 = -\frac{AP_a}{RT_2}$$

$$K_3 = \left. \frac{\partial \dot{m}_s}{\partial P_{d2}} \right|_E = \frac{A}{C_p T_0} (L - \bar{X}) = 0 \quad K_4 = \left. \frac{\partial \dot{m}_s}{\partial X} \right|_E = -\frac{A}{C_p T_0} \bar{P}_{d2} = 0$$

Sustituyendo las constantes obtenidas y devolviendo el cambio de variable en la ecuación (1), se tiene

$$\dot{m}_s(t) = -\frac{AP_a}{RT_2} \dot{X}(t)$$

Aplicando Laplace:

$$Q_s(s) = -\frac{AP_a}{RT_2} sX(s) \quad (6)$$

La ecuación (6) nos indica que el caudal de masa de salida del actuador, no depende sino únicamente de la posición del actuador y de la presión atmosférica a la descarga de la misma, por lo cual, puede considerarse la presión de la cámara 2 del cilindro constante y cercana a la atmosférica, alrededor del estado de completa extensión del vástago ("E").

Haciendo referencia a la ecuación (4.1) y debido a que la presión  $P_2$  corresponde a la presión atmosférica (alrededor del estado "E"), y el término  $P_1$  corresponde a una presión absoluta (presión atmosférica + presión manométrica = presión absoluta) de la cámara 1, haciendo un balance de fuerzas en el pistón y debido a la diferencia de presiones el resultado que se obtiene es presión manométrica en la cámara 1. Quedando la ecuación (4.1) de la siguiente manera:

$$P_{1m}A - b\dot{X} = M\ddot{X} \quad (7)$$

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación obtenida se tiene:

$$P_{1m}(s)A - bsX(s) = Ms^2X(s) \quad (8)$$

De la ecuación (3) se tiene:

$$P_{1m}(s) = \frac{Q_e(s) - \frac{A_1 P_0}{RT_0} sX(s)}{\frac{A_1 L}{C_p T_0}}$$

Sustituyendo en la ecuación (8), tenemos:

$$\frac{Q_e(s) - \frac{AP_0}{RT_0} sX(s)}{\frac{L}{C_p T_0}} - bsX(s) = Ms^2X(s)$$

Reordenando la ecuación anterior, se tiene que:

$$X(s) = \frac{\frac{C_p T_0}{ML}}{s \left( s^2 + \frac{b}{M} s + \frac{AC_p P_0}{RML} \right)} Q_e(s) \quad (9)$$

Relacionando las ecuaciones (4.9), (4.10) y (4.11) a la ecuación (4.19) se obtiene la función de transferencia del sistema a controlar, que relaciona la posición del pistón con el voltaje de entrada a la válvula.

$$\frac{X(s)}{U(s)} = P(s) = \frac{\frac{wC_p P_0 K_v \sqrt{T_0}}{ML} \left[ \frac{\gamma \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right]^{1/2}}{s(\tau_v s + 1) \left( s^2 + \frac{b}{M} s + \frac{AC_p P_0}{RML} \right)} \quad (10)$$

Otra forma de representar la función de transferencia de nuestro sistema sería:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = P(s) = \frac{K}{s(\tau_v s + 1)(s^2 + K_1 s + K_2)} \quad (11)$$

Siendo las constantes:

$$K = \frac{wC_p P_0 K_v \sqrt{T_0}}{ML} \left[ \frac{\gamma \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right]^{1/2}$$

$$K_1 = \frac{b}{M} \quad K_2 = \frac{AC_p P_0}{RML}$$

## ANEXO B

---

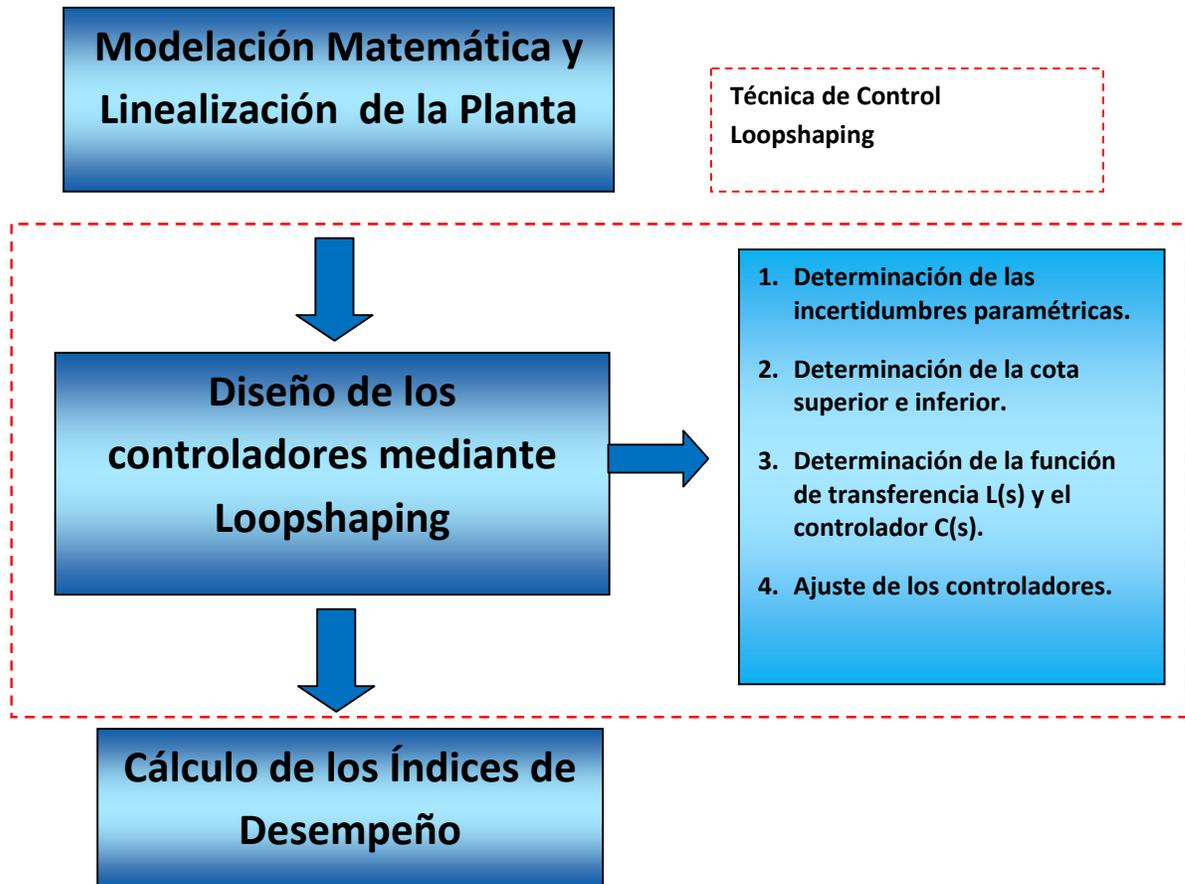


Figura B.1. Procedimiento para el diseño del controlador por Loopshaping

## ANEXO C

---

**Programa C.1.** Respuesta (posición) ante un escalón unitario de la ecuación 4.27, controlada por el controlador diseñado por loopshaping y por el de orden reducido.

```

% *** Respuesta a un escalón unitario***
% ---Numerador y denominador de L por Loopshaping
numTLoop=[101.8 301.4];
denTLoop=[1 16.09 116.9 301.4];
% ---Numerador y denominador de L por Loop. de orden reducido
numTRed=[1.78e5 4.984e5];
denRTed=[4.2e-3 1.239 68.18 2869 4.007e4 2.153e5 4.984e5];
% ---Numerador y denominador de L por PD
numTPD=[1290 3.896e4];
denTPD=[4.2e-3 1.154 44.81 3233 3.896e4];
% Grafica de los sistemas
t=0:0.01:3;
step(numTLoop,denTLoop,t);
hold on
step(numTRed,denRTed,t);
step(numTPD,denTPD,t);
grid
xlabel('t')
ylabel('Posición (m)')

```

**Programa C.2.** Diagramas de Bode de la ecuación 5.3 y el de la ecuación 4.35 compensado en ganancia y fase.

```

% % ---Bode compensado en ganancia mas bode con compensador
wMin=-2;
wMax=3;
n=100;
% ---Sistema sin compensar
numL1=17314*[0 1];
denL1=[4.2e-3 1.158 45.96 1988 1943 0];
% ---sistema compensado
numL2=1.78e5*[1 2.8];
denL2=[4.2e-3 1.239 68.18 2869 4.007e4 3.727e4 0];
% Grafica en Bode
w=logspace(wMin,wMax,n);
bode(numL1,denL1,w);
hold on
bode(numL2,denL2,w);
grid

```

**Programa C.3.** Respuesta a escalón unitario con perturbación a la salida de la planta de tipo pulso.

```

%% --- Respuesta a escalon unitario + perturbación---
% --- Parametros de la perturbación
paso = 0.02;
max = 5;
ampPert = 1;
% --- Funciones de transferencia L y S del sistema a mostrar
numT = [102.1 302.2];
denT = [1 16.09 117.2 302.2];
numS = [1 16.09 15.09 0];
denS = [1 16.09 117.2 302.2];
% Grafica del sistema
t = 0:paso:max;
sysT = tf(numT, denT);
[y, t] = step(sysT, t);
t1 = 0:paso:1;
x1 = 0*ones(size(t1));
t2 = 1+paso:paso:2;
x2 = ampPert*ones(size(t2));
t3 = 2+paso:paso:max;
x3 = 0*ones(size(t3));
tper = [t1 t2 t3];
xper = [x1 x2 x3];
sysS = tf(numS, denS);
[yper, t] = lsim(sysS, xper, tper);
yt = y + yper;
plot(t, yt, '-b')
grid
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Posición (m)')

```

**Programa C.4.** Determinación del índice de desempeño IAE.

```

%% ---Calculo de IAE---
% Limites de integración
a = 1;
b = 5;
sum = 0;
[m, n] = size(t);
for i = 1:m
    e_abs(i) = abs(yt(i) - 1);
end
for j = 1:(2 + a/paso):(b/paso)
    sum = sum + 2 * e_abs(j);
end
sum = sum + e_abs(1 + a/paso) + e_abs(1 + b/paso);
valIAE = 0.5*paso*sum

```

**Programa C.5.** Respuesta ante una rampa de pendiente  $\tau$   
y determinación del índice de precisión.

```

% % ---Respuesta a rampa de pendiente tau---
tau = 1;
paso = 0.02;
% --- Funcion de transferencia a lazo cerrado
numT = [102.1 302.2];
denT = [1 16.09 117.2 302.2];
% Grafica
t = 0:paso:3;
r = tau * t;
y = lsim(numT, denT, r, t);
plot(t, r, '--b', t, y, '-r')
grid
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Salida')
% ---Calculo de precisión---
i = 1;
while t(i) <= 2 * tau;
    i = i + 1;
end
A = y(i-1) + (2 * tau - t(i-1)) * (y(i) - y(i-1)) / (t(i) - t(i-1));
e = (2 * tau^2 - A) / 2 * tau^2%#ok<NOPTS>
Precision = (1 - e) * 100 %#ok<NOPTS>

```

