

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERIA
ESCUELA DE INGENIERIA MECANICA
DEPARTAMENTO TERMICA Y ENERGETICA



**ANÁLISIS NUMÉRICO DEL CAMPO DE FLUJO COMPRESIBLE A TRAVÉS DE
UNA TOBERA CONVERGENTE – DIVERGENTE**

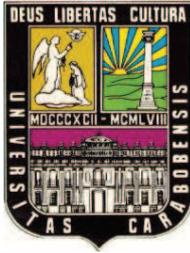
Tutor

Prof. Gruber Caraballo

Autor

Ángel Briceño

Naguanagua, Julio de 2012



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERIA
ESCUELA DE INGENIERIA MECANICA
DEPARTAMENTO TERMICA Y ENERGETICA



ANÁLISIS NUMÉRICO DEL CAMPO DE FLUJO COMPRESIBLE A TRAVÉS DE UNA TOBERA CONVERGENTE – DIVERGENTE

Trabajo Especial de Grado, presentado ante la ilustre Universidad de Carabobo para optar
al Título de Ingeniero Mecánico

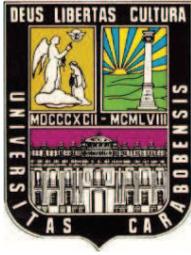
Tutor

Prof. Gruber Caraballo

Autor

Ángel Briceño

Naguanagua, Julio de 2012



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERIA
ESCUELA DE INGENIERIA MECANICA
DEPARTAMENTO TERMICA Y ENERGETICA



CERTIFICADO DE APROBACIÓN

Los abajo firmantes, miembros del jurado designado para evaluar el trabajo especial de grado titulado “**Análisis Numérico del campo de flujo compresible a través de una tobera convergente – divergente**” realizado por el bachiller **Ángel A. Briceño B.**, portador de la cedula de identidad N° **19.515.817**, hacemos constar que hemos revisado y aprobado el mencionado trabajo.

Prof. Gruber Caraballo

Tutor Académico

Prof. José Velázquez

Jurado

Prof. Nilo Espinoza

Jurado

Naguanagua 11 de Julio de 2012

Agradecimientos y Dedicatoria.

A Dios por brindarme la oportunidad y dicha de la vida, y por darme la salud y los medios necesarios para iniciar y mantener mi carrera como estudiante de ingeniería y permitirme alcanzar todas mis metas como estudiante universitario, siendo siempre un apoyo incondicional

A mi madre Luz Briceño, por todo tu esfuerzo, tu apoyo y la confianza que siempre has depositado en mí a lo largo de todo este camino que ha sido mi carrera universitaria, y no me equivoco en decir que eres la mejor madre del mundo.

Al profesor Gruber Caraballo gracias porque sin sus asesoría y recomendaciones no hubiese sido posible lograr el éxito de este trabajo.

A todos los profesores que de forma directa o indirecta intervinieron y colaboraron en mi avance y crecimiento como profesional.

A mis amigos brindarme su amistad y por todos los momentos que hemos compartido.

A mi familia por siempre haberme apoyado y ser una ayuda a través de este largo camino llamado ingeniería.

Resumen.

La presente investigación muestra el análisis numérico realizado a una tobera convergente – divergente mediante el uso de un programa de Dinámica de Fluidos Computacional (CFD). Una tobera convergente – divergente es un ducto de sección transversal variable el cual es usado para acelerar el flujo que pasa a través de ella y así exista la posibilidad de alcanzar velocidades supersónicas a la salida del mismo. A partir de esto se estudia el comportamiento del campo de flujo a través de la tobera y como el mismo se ve afectado al modificar determinados factores, dichos factores para esta investigación constan de presencia de rugosidad absoluta y transferencia de calor en las paredes de la tobera. Obteniéndose que para el caso de rugosidad absoluta que las variaciones en las propiedades del flujo son mínimas. Mientras que para la condición de transferencia de calor con las paredes dichas variaciones son más notables; generando ciertas modificaciones en el comportamiento del fluido.

Contenido

Índice de Figuras.....	V
Índice de Tablas.....	IX
Nomenclatura.....	XI
Constantes.....	XIII
Introducción.....	XV
CAPÍTULO I.....	1
1.1 Planteamiento del problema.....	3
1.2 Objetivos de la investigación.....	4
1.2.1 Objetivo General:.....	4
1.2.2 Objetivos Específicos:.....	4
1.3 Justificación.....	4
1.4 Limitaciones.....	5
1.5 Alcance.....	5
CAPÍTULO II.....	7
2.1 Antecedentes.....	9
2.2 Bases teóricas.....	10
2.2.1 Velocidad del sonido y número de Mach.....	10
2.2.2 Número de Mach.....	15
2.2.3 Ecuaciones de gases perfectos en términos del número de mach.....	15
2.2.4 Presión de Estancamiento – Ecuación de Energía.....	18
2.3 Flujo adiabático con variación de área.....	19
2.3.1 Gases perfectos con pérdidas.....	23
2.4 Tobera convergente – divergente.....	27
2.5 Flujo de Fanno.....	28
2.5.3 Punto Límite.....	30
2.5.5 Ecuaciones de trabajo para gases ideales.....	32
2.6 Flujo de Rayleigh.....	37

2.6.4 Punto Límite.....	43
2.6.5 Ecuaciones de gobierno para gases ideales.....	46
2.6.5.3 Condiciones de estancamiento.....	48
2.7 Dinámica de fluidos computacional	50
2.7.1 Tipos de mallado empleados en los códigos CFD	51
2.7.1.1 Mallado body-fitted.	52
2.7.1.2 Mallado en coordenadas cartesianas.....	52
2.7.1.3 Mallado estructurado.	53
2.7.1.4 Mallado no-estructurado.	53
2.7.2 Discretización de Ecuaciones.	55
2.7.2.1 Método de los volúmenes finitos.	55
2.7.2.2 Método de los elementos finitos.	56
2.8 Modelos de turbulencia	57
2.8.1 Modelo de turbulencia $k - \epsilon$	58
2.8.2 Modelo $k-\omega$	59
2.8.3 Modelo “Shear Stress Transport” (SST).....	60
CAPÍTULO III.....	61
3.1 Nivel de la investigación.	63
3.2 Diseño de la investigación.....	63
3.2.1 Fase1: Revisión bibliográfica.	65
3.2.2 Fase 2: Selección de la tobera.....	65
3.2.3 Fase 3: Dibujo de la tobera a estudiar mediante programa CAD	65
3.2.4 Establecimiento de la geometría y mallado	66
3.2.5 Fase 4: Configuración del dominio.....	69
3.2.6 Fase 5 Configuración de la herramienta de análisis y solución de ecuaciones....	75
3.2.7 Fase 6 Convergencia de la simulación.....	76
3.2.8 Fase 7 Obtención de los resultados.	76
3.2.9 FASE 6 Análisis de Resultados.	77
3.3 Técnicas de recolección de datos.....	77
3.3.2 Recursos Humanos.....	77
CAPÍTULO IV.....	79

4.1 Generación del Dominio	81
4.1.1 Establecimiento de las condiciones de trabajo	81
4.2 Selección del Modelo de turbulencia	81
4.3 Convergencia de la simulación	85
4.3.1 Convergencia de la simulación para una rugosidades absolutas de $\varepsilon = 0.275 \mu\text{m}$, $\varepsilon = 0.55 \mu\text{m}$, $\varepsilon = 0.825 \mu\text{m}$ y $\varepsilon = 1.10 \mu\text{m}$	85
4.3.5 Convergencia de la simulación para flujos de calor ($Q = 1,255 \text{ MW/m}^2$, $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$, $Q = 3,675 \text{ MW/m}^2$ y $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$)	90
4.4 Comportamiento de las líneas de flujo para una tobera convergente – divergente	94
4.4.1 Estudio de la tobera sin rugosidad ni transferencia de calor	94
A partir de los datos obtenidos en la figura anterior se elabora la grafica presión vs posición, mostrada en la figura 4.27, se observa como el comportamiento de la misma es el inverso a la presión esto de acuerdo al decremento de presión que percibe el fluido para lograr su aumento de velocidad.	99
4.4.2 Estudio de la tobera para una rugosidad absoluta de $\varepsilon = 0,275 \mu\text{m}$	100
4.4.3 Estudio de la tobera convergente – divergente para $\varepsilon = 1.1$	107
4.4.5 Estudio de la tobera convergente divergente para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,55 \mu\text{m}$	114
4.4.6 Estudio de la tobera convergente divergente para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825 \mu\text{m}$	115
4.4.7 Estudio de la tobera convergente divergente para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$	116
4.4.8 Estudio de la tobera convergente – divergente parta una cantidad de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$	124
4.4.9 Estudio de la tobera para cantidad de calor $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$	131
4.4.10 Estudio de la tobera para cantidad de calor $Q = 3,765 \text{ MW/m}^2$	132
4.5 Visualización de resultados	133
4.5.1 Representación gráfica de cada rugosidad absoluta para la tobera convergente – divergente	133
4.5.2 Representación gráfica de cada cantidad de calor para la tobera convergente – divergente	137
4.5.3 Efecto del flujo de calor sobre el fluido de trabajo que pasa a través de la tobera convergente –divergente	141
4.5 Análisis de Resultados	144

4.5.1 Convergencia de la simulación	144
4.5.2 Comportamiento de las líneas de flujo en una tobera convergente divergente..	144
4.5.3 Visualización de resultados.....	145
Conclusiones.	147
Recomendaciones.....	149
Referencias Bibliográficas	151
Apéndice A.....	153
Apéndice B.....	171

Índice de Figuras

Figura 2.1 Iniciación de pulso de presión infinitesimal	11
Figura 2.2 Onda de sonido	12
Figura 2.3 Variación de las propiedades en función del cambio de área.....	22
Figura 2.4 Sistema de flujo de área variable.....	24
Figura 2.5 Ejemplo de una Tobera Convergente - Divergente	27
Figura 2.6 Efectos de la presión del receptor en el flujo de una tobera convergente divergente	27
Figura 2.7 Esquemas de las líneas de Fanno	29
Figura 2.8 Líneas de Fanno en función de la entropía	30
Figura 2.9 Esquema de estudio para flujo de Fanno	32
Figura 2.10 Análisis de momento para el flujo de Rayleigh	38
Figura 2.11 Líneas de Rayleigh	40
Figura 2.12 Líneas de Rayleigh en función del volumen específico	41
Figura 2.13 Líneas de Rayleigh en función de la entropía	42
Figura 2.14 Línea de Rayleigh en función de la entropía	45
Figura 2.15 Mallado " <i>Body-Fitted</i> "	52
Figura 2.16 Mallado en Coordenadas Cartesianas.....	52
Figura 3.1 Geometría final de la tobera convergente - divergente	66
Figura 3.2 Validación de la geometría por parte del software DFC	66
Figura 3.3 Superficies de seleccionadas para la construcción del mallado	67
Figura 3.4 Detalles del Mallado.....	68
Figura 3.5 Estadísticas finales del mallado.....	68
Figura 3.6 Mallado Final para el estudio	69
Figura 3.7 Árbol de trabajo del "CFX-Pre"	70
Figura 3.8 Panel de selección tipo de frontera "Entrada"	70
Figura 3.9 Selección de condiciones frontera "Entrada"	71
Figura 3.10 Etiqueta de selección de tipo de frontera para "salida"	71
Figura 3.11 Selección de la condiciones de frontera "Salida"	72
Figura 3.12 Panel de selección para el tipo de frontera "Pared"	72
Figura 3.13 Selección de la condición frontera en la pared de la tobera	73
Figura 3.14 Panel de selección del entorno	74
Figura 3.15 Etiqueta de los modelos de turbulencia y modelos de energía.....	74
Figura 3.16 Dominio resultante luego de la puesta punto	75
Figura 3.17 Control de la herramienta de solución de ecuaciones	76
Figura 4.1 Gráfica Imbalance para modelo de turbulencia k-Épsilon.....	83
Figura 4.2 Gráfica Imbalance para modelo de turbulencia k-Omega.....	83

Figura 4.3 Imbalance para modelo de turbulencia k-Épsilon.....	84
Figura 4.4 Convergencia de Masa y Momento para $\varepsilon = 0,275 \mu\text{m}$	85
Figura 4.5 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $\varepsilon = 0.275 \mu\text{m}$	86
Figura 4.6 Convergencia de Masa y Momento para $\varepsilon = 0.55 \mu\text{m}$	87
Figura 4.7 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $\varepsilon = 0.55 \mu\text{m}$	87
Figura 4.8 Convergencia de Masa y Momento para $\varepsilon = 0.825 \mu\text{m}$	88
Figura 4.9 Convergencia de ecuaciones de turbulencia $\varepsilon = 0.825 \mu\text{m}$	88
Figura 4.10 Convergencia de Masa y Momento para $\varepsilon = 1.1 \mu\text{m}$	89
Figura 4.11 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $\varepsilon = 1.1 \mu\text{m}$	90
Figura 4.12 Convergencia de masa y momento para $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$	90
Figura 4.13 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$	91
Figura 4.14 Convergencia de masa y momento para $Q = 2.51 \text{ MW/m}^2$	91
Figura 4.15 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$	92
Figura 4.16 Convergencia de masa y momento para $Q = 3,675 \text{ MW/m}^2$	92
Figura 4.17 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $Q = 3,675 \text{ MW/m}^2$	93
Figura 4.18 Convergencia de masa y momento para $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$	93
Figura 4.19 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$...	94
Figura 20 Distribución del Número de mach para $\varepsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$	95
Figura 4.21 Número de Mach vs posición para $\varepsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$	95
Figura 4.22 Distribución de la velocidad para $\varepsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$	96
Figura 4.23 Velocidad vs posición para $\varepsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$	97
Figura 4.24 Distribución de temperatura para $\varepsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$	98
Figura 4.25 Temperatura vs posición para $\varepsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$	98
Figura 4.26 Distribución de presión para $\varepsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$	99
Figura 4.27 Presión vs posición para $\varepsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$	100
Figura 4.28 Distribución del Número de Mach para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,275 \mu\text{m}$	100
Figura 4.29 Número de Mach vs. Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,275 \mu\text{m}$...	101
Figura 4.30 Distribución de la velocidad para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,275 \mu\text{m}$	102
Figura 4.31 Velocidad vs posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,275 \mu\text{m}$	103
Figura 4.32 Distribución de la Temperatura para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,275 \mu\text{m}$.	103
Figura 4.33 Temperatura vs. Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,275 \mu\text{m}$	104
Figura 4.34 Distribución de la presión para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,275 \mu\text{m}$	105
Figura 4.35 Presión vs. Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,275 \mu\text{m}$	106
Figura 4.36 Distribución del Número de Mach para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 1,1 \mu\text{m}$	107
Figura 4.37 Número de Mach vs. Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 1,1 \mu\text{m}$	108
Figura 4.38 Distribución de la velocidad para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 1,1 \mu\text{m}$	109
Figura 4.39 Velocidad vs. Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 1,1 \mu\text{m}$	110
Figura 4.40 Distribución de la temperatura para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 1,1 \mu\text{m}$	111
Figura 4.41 Temperatura vs. Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 1,1 \mu\text{m}$	112
Figura 4.42 Distribución de la presión para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 1,1 \mu\text{m}$	113

Figura 4.43 Presión vs. Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 1,1 \mu\text{m}$	114
Figura 4.44 Distribución del Número de Mach para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$	116
Figura 4.45 Número de Mach vs. Posición para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$	117
Figura 4.46 Distribución de la velocidad para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$	118
Figura 4.47 Velocidad vs. Posición para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$	119
Figura 4.48 Distribución de la temperatura para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$	120
Figura 4.49 Temperatura vs. Posición para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$	121
Figura 4.50 Distribución de la presión para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$	122
Figura 4.51 Presión vs. Posición para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$	123
Figura 4.52 Distribución del Número de mach para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.	124
Figura 4.53 Número de Mach vs. Posición para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$	125
Figura 4.54 Distribución de la velocidad para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$	126
Figura 4.55 Velocidad vs. Posición para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$	127
Figura 4.56 Distribución de la temperatura para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$	128
Figura 4.57 Temperatura vs. Posición para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$	129
Figura 4.58 Distribución de la presión para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$	130
Figura 4.59 Presión vs. Posición para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$	131
Figura 4.60 Número de Mach vs. Posición para cada rugosidad absoluta	133
Figura 4.61 Velocidad vs. Posición para cada rugosidad absoluta.....	134
Figura 4.62 Temperatura vs. Posición para cada rugosidad absoluta.....	135
Figura 4.63 Presión vs. Posición para cada rugosidad absoluta	136
Figura 4.64 Número de Mach vs. Posición para cada cantidad de calor	137
Figura 4.65 Velocidad vs. Posición para cada cantidad de calor.....	138
Figura 4.66 Temperatura vs. Posición para cada cantidad de calor.....	139
Figura 4.67 Presión vs. Posición para cada cantidad de calor	140
Figura 4.68 Número de Mach vs. Temperatura para cada cantidad de calor.....	141
Figura 4.69 Velocidad vs. Temperatura para cada cantidad de calor	142
Figura 4.70 Presión vs. Temperatura para cada cantidad de calor	143
Figura A.1 Distribución de el Número de Mach para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,55$	155
Figura A.2 Número de Mach vs Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,55$	155
Figura A.3 Distribución de el la velocidad para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,55$	156
Figura A.4 Velocidad vs Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,55$	156
Figura A.5 Distribución de la Temperatura para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,55$	157
Figura A.6 Temperatura vs Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,55$	157
Figura A.7 Distribución de la Presión para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,55$	158
Figura A.8 Presión vs Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,55$	158
Figura A.9 Distribución del Número de Mach para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825$	159
Figura A.10 Número de Mach vs Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825$	159
Figura A.11 Distribución de la Velocidad para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825$	160
Figura A.12 Velocidad vs Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825$	160

Figura A.13 Distribución de la Temperatura para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825$	161
Figura A.14 Temperatura vs Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825$	161
Figura A.15 Distribución de la Presión para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825$	162
Figura A.16 Presión vs Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825$	162
Figura A.17 Distribución de el Número de Mach para una cantidad de Calor $Q = 2,51$ MW/m ²	163
Figura A.18 Número de Mach vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 2,51$ MW/m ²	163
Figura A.19 Distribución de la velocidad para una cantidad de Calor $Q = 2,51$ MW/m ² .	164
Figura A.20 Velocidad vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 2,51$ MW/m ²	164
Figura A.21 Distribución de Temperatura para una cantidad de Calor $Q = 2,51$ MW/m ²	165
Figura A.22 Temperatura vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 2,51$ MW/m ²	165
Figura A.23 Distribución de Presión para una cantidad de Calor $Q = 2,51$ MW/m ²	166
Figura A.24 Presión vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 2,51$ MW/m ²	166
Figura A.25 Distribución de Número de Mach para una cantidad de Calor $Q = 3,765$ MW/m ²	167
Figura A.26 Número de Mach vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 3,765$ MW/m ²	167
Figura A.27 Distribución de Velocidad para una cantidad de Calor $Q = 3,765$ MW/m ² ..	168
Figura A.28 Velocidad vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 3,765$ MW/m ²	168
Figura A.29 Distribución de Temperatura para una cantidad de Calor $Q = 3,765$ MW/m ²	169
Figura A.30 Temperatura vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 3,765$ MW/m ²	169
Figura A.31 Distribución de Presión para una cantidad de Calor $Q = 3,765$ MW/m ²	170
Figura A.32 Presión vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 3,765$ MW/m ²	170

Índice de Tablas

Tabla 2.1 Relación entre el régimen de flujo y algunas propiedades	22
Tabla 2.2 Variación de las propiedades para flujo de Fanno	37
Tabla 2.3 Variación de las propiedades para flujo de Rayleigh	50
Tabla 4.1 Resultados para cada modelo de turbulencia	84

Nomenclatura.

A	Área	m^2
c	Velocidad del Sonido	m/s
c_p	Calor específico a presión constante	kJ/kgK
c_v	Calor específico a volumen constante	kJ/kgK
E_v	Modulo de elasticidad	
f	Factor de Darcy	-
h	Entalpia	kJ/kg
M	Número de Mach	-
\dot{m}	Flujo másico	kg/s
p	Presión	kPa
q	Transferencia de calor por unidad de masa	kJ/kg
R	Constante de los gases	kJ/kgK
s	Entropía	kJ/kgK
Sm	Fuente de masa	$\text{kg/m}^3\text{s}$
T	Temperatura	K
U	Vector velocidad	m/s
V	Velocidad	m/s
w	Trabajo por unidad de masa	kJ/kg
Letras Griegas		
μ	Viscosidad dinámica	kg/ms

μ_{eff}	Viscosidad efectiva	kg/ms
μ_t	Viscosidad Turbulenta	kg/ms
Γ_t	Difusividad Turbulenta	kg/ms
ν	Viscosidad cinemática	m ² /s
v	Volumen	m ³
ρ	Densidad	kg/m ³

Constantes.

β'	Constante del modelo k-Omega	0,009
α	Constante del modelo k-Omega	5/9
β	Constante del modelo k-Omega	0,075
σ_k	Constante del modelo k-Omega	2
σ_ω	Constante del modelo k-Omega	2

Introducción.

En las últimas décadas, el uso de herramientas computacionales para la resolución de problemas ha venido en aumento debido a la gran versatilidad y a los diferentes campos de aplicación de la misma. La Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) es una técnica numérica de integración de métodos, que permite la realización de cálculos detallados de cualquier sistema complejo, en el cual intervengan fluidos, mediante la resolución de las ecuaciones fundamentales de conservación de materia, energía y cantidad de movimiento para la geometría particular de cada sistema considerado. Con este tipo de herramientas computacionales se pueden evaluar y diseñar sistemas o procesos considerando transferencia de calor, de masa, cantidad de movimiento, arrastre, transporte de partículas y flujos mono o multifásicos, flujo laminar o turbulento, reacciones químicas, cambios de fase e incluso combustión.

Esta investigación se basa principalmente en el análisis numérico de campo de flujo compresible que pasa a través de una tobera convergente – divergente cuando dicho campo es afectado por rugosidad absoluta en el ducto, y por transferencia de calor con las paredes de la tobera; todo esto mediante la implementación de técnicas de dinámica de fluidos computacional.

Principalmente este estudio tendrá cuatro grandes secciones; la primera en la que se presenta el planteamiento del problema, así como los objetivos, limitaciones y alcances. Una segunda sección en la que se establecen todas las bases teóricas a tener en cuenta para el éxito de la investigación. Una tercera sección en donde se diseña la metodología necesaria para alcanzar los objetivos planteados en la primera sección, y la última sección está conformada por los resultados arrojados por la simulación numérica, así como los análisis correspondientes para explicar los fenómenos expresados en dichos resultados. Para finalmente arrojar las conclusiones y recomendaciones a tener en cuenta en investigaciones similares a futuro.

CAPÍTULO I.

El Problema.

En esta sección se explicará la problemática asociada al flujo compresible a través de una tobera convergente divergente y se establecerán los objetivos a ser alcanzados para la solución de dichos problemas así como el alcance y las limitaciones de esta investigación.

1.1 Planteamiento del problema

A través de los años, el estudio, control y manejo de los fluidos se ha vuelto cada vez más imprescindible, debido a que cada día se desarrollan aplicaciones industriales en las cuales es mayor el aprovechamiento de la energía que absorben/entregan los fluidos, este es el caso del uso de la tobera convergente-divergente, aplicada en diversos campos de la ingeniería como son la aeronáutica, conformado de materiales, entre otros. La misma se encarga de modificar las propiedades de un flujo compresible para que este gane energía cinética a costa de presión efectiva dentro de ella, permitiéndose así lograr que el flujo que es manipulado alcance valores de velocidades supersónicas.

En gran parte de los casos, el flujo que pasa a través de una tobera convergente-divergente tiende a sufrir cambio en algunas propiedades, que se ven modificadas, principalmente por la presencia de elementos externos, como son la transferencia de calor generada por el medio donde se encuentra la tobera o la fricción entre el fluido y las paredes internas de la tobera, limitando así las capacidades de la misma, es por ello que el estudio de las toberas se realiza de forma ideal; es decir, como un proceso isoentrópico; donde los factores mencionados anteriormente no son considerados, estableciéndose así los modelos matemáticos conocidos hasta ahora que permiten facilitar su proceso de estudio. Por ello es importante establecer modelos que permitan modelar una tobera convergente-divergente tomando en cuenta los factores rugosidad superficial, que generaría roce entre el fluido y la tobera y la transferencia de calor con el medio.

En la actualidad, existen estudios teóricos en los cuales se generaron modelos matemáticos que tienen en cuenta dichas consideraciones, sin embargo, estos modelos presentan una gran complejidad para presentar una solución analítica, o las soluciones presentadas, que son pocas, son obtenidas para casos muy específicos, simplificados y en un entorno con variables controladas.

Otra posibilidad se presentaría con el ensayo en un banco experimental, sin embargo, esta opción generaría un alto costo debido a la complejidad de los procesos para la fabricación de una tobera convergente-divergente, además de que el equipamiento requerido para la medición de las variables involucradas es muy específico y requiere de una alta precisión, siendo este un factor más que elevaría el costo de un estudio mediante

un banco experimental. Igualmente, existe otra oportunidad como sería el estudio, análisis y modelado numérico mediante el uso de herramientas computacionales que permiten el uso de las ecuaciones antes mencionadas, permitiendo simular con gran exactitud el campo de flujo con consideraciones como son rugosidad y transferencia de calor, y obteniéndose así, resultados que se adapten a lo que sería el comportamiento real de dicho campo de flujo, este último método es por el cual se proyecta realizar el estudio de este fenómeno.

1.2 Objetivos de la investigación.

1.2.1 Objetivo General del Trabajo.

Analizar numéricamente el campo de flujo compresible a través de una tobera convergente-divergente.

1.2.2 Objetivos Específicos.

1. Aplicar las ecuaciones de gobierno para el campo de flujo compresible a través de una tobera convergente-divergente tomando en cuenta la rugosidad absoluta.
2. Aplicar las ecuaciones de gobierno para el campo de flujo compresible a través de una tobera convergente-divergente tomando en cuenta la transferencia de calor.
3. Seleccionar el modelo matemático del campo de flujo compresible.
4. Discretizar el dominio y fijar las condiciones de borde del modelo.
5. Simular el campo de flujo
6. Obtener los resultados en forma de datos y por medio de representaciones gráficas de las variables y parámetros que describen el fenómeno.
7. Validar los resultados bajo criterios de comparación con los antecedentes

1.3 Justificación.

En la actualidad, el uso de herramientas computacionales dedicadas al comportamiento de fluidos (CFD) va en aumento, esto con el fin de simplificar el estudio de diversos fenómenos, que en otras épocas habrían sido muy complejos o simplemente imposibles de desarrollar. Ante este hecho, la simulación numérica cada día va abriendo más puertas hacia el estudio de estos fenómenos complejos, evitando el realizar cálculos de muy alta complejidad y resolver modelos matemáticos que hasta los momentos no tenían solución alguna; o simplemente, requerían la elaboración y aplicación de un método numérico para

su solución y, sin embargo, esto no garantizaría una solución fiable y que se apegue a la realidad.

Es por ello que la finalidad de esta investigación sea realizar una simulación numérica del campo de flujo compresible de una tobera convergente-divergente, tomando en cuenta todas las variables que afectan el proceso en la realidad como son la fricción y la transferencia de calor, lo cual es altamente difícil de lograr mediante un banco real experimental debido a la gran cantidad de variables involucradas, los diferentes estados termodinámicos implicados, los altos costos que generaría la construcción de un banco y el adiestramiento de personal para poder operar dicho banco. Igualmente, comparar los diversos modelos matemáticos y determinar cuál se adapta de mejor manera al comportamiento real de la tobera.

1.4 Limitaciones.

Entre las principales limitaciones se encuentra la alta complejidad en el manejo de los diversos programas computacionales existentes, así como la selección del que se adapte de mejor manera a los requerimientos necesarios para el estudio antes mencionado, además del tiempo de adquisición y aplicación de los conocimientos para el manejo del programa.

La poca cantidad de estudios realizados acerca del comportamiento real de una tobera convergente-divergente, y de los estudios existentes, la gran mayoría son realizados en entornos controlados y para aplicaciones específicas.

Influye además la no existencia en la universidad o casas de estudio adyacentes de un banco experimental en donde se ensaye una tobera convergente-divergente y se pueda verificar la veracidad de los resultados obtenidos.

1.5 Alcance.

Esta investigación sólo se encargará del estudio del campo de flujo compresible a través de una tobera convergente-divergente, esto en virtud de que para el tiempo establecido no se pretende indagar en otros tipos de consideraciones en el campo de flujo y estados termodinámicos que puedan existir.

Tampoco se indagará en el estudio de los diferentes tipos de onda de choque que pueden producirse en una tobera convergente – divergente.

El estudio y la simulación numérica sólo serán referidas para un modelo matemático específico, así como los resultados obtenidos sólo serán aplicables a una tobera convergente-divergente con fricción entre las paredes de la misma y el fluido y con transferencia de calor en las paredes.

Los resultados obtenidos serán arrojados en forma de datos y mediante el uso de gráficos experimentales de las variables que describen el fenómeno.

CAPÍTULO II.

Marco Teórico.

En este capítulo se establecerán todos los fundamentos teóricos necesarios para poder realizar el estudio del campo de flujo compresible a través de una tobera convergente – divergente. Se abordara desde las ecuaciones de gobierno de los gases ideales así como lo concerniente al flujo compresible, y además todo lo relacionado con la dinámica de fluidos computacional

2.1 Antecedentes.

Las investigaciones en el análisis numérico y en el desarrollo de modelos computacionales para el estudio de la cinemática de fluidos son de data reciente, y es muy escasa la cantidad de investigadores que han incursionado en esta área, siendo aún mucho menor el desarrollo de investigaciones en función del análisis y comportamiento numérico/computacional de una tobera convergente - divergente; muchos estudios realizados hasta ahora se basan en el comportamiento de dichas toberas en una aplicación industrial o entorno determinado.

Pougatch et al., (2008), realizan el modelado computacional del flujo compresible gas - líquido en una tobera convergente – divergente, la cual es usada para la atomización asistida por gas. El modelo es desarrollado para flujos con altos valores de fracción volumétrica de gas, hasta los valores de inversión de fase. En este modelado se realiza una consideración especial para flujos compresibles de mezcla líquido-gas para poder trabajar con las ecuaciones existentes de Navier - Stokes, también se realiza el estudio de como la fuerza de gravedad afecta o no el flujo a través de la tobera. Igualmente se desarrolló un nuevo modelo de funciones de pared que permite trabajar con flujo tipo multifasico, además del cálculo de la tensión tangencial de corte en el fluido. Se observó como la comparación entre las medidas experimentales y los perfiles de presión predichos a lo largo de la pared demuestran una buena proximidad.

Hemidi et al., (2009), realizan un estudio computarizado mediante programas CFD de un eyector, el cual no es más que una tobera convergente divergente con aplicaciones específicas en la industria como para extraer gases, en los condensadores, en los sistemas de evaporación, entre otros. Mediante esta investigación se realiza un comparación entre el estudio experimental y el estudio teórico permitiendo así evaluar la forma en cómo podría variar las consideraciones de un modelo matemático con respecto al modelado en computadora, además es de notar que al realizarse el modelado computacional por dos métodos diferentes pueden existir resultados diferentes para un mismo conjunto de condiciones de borde, permitiendo así seleccionar el método que se adapte mejor a las condiciones de estudio. Igualmente se establece como el líquido resultante de la condensación puede afectar el comportamiento del eyector.

Xu, Zhao., (2007), investigan el comportamiento de las ondas de choque en toberas convergentes – divergentes, esto lo logran mediante el desarrollo de una simulación numérica con aire como fluido de trabajo, el modelo fue posible realizarlo gracias a la implementación de las ecuaciones de Navier - Stokes, mediante esta investigación se estableció como la capa límite se comporta para diferentes tipos de ondas de choque y en diferentes zonas de la tobera y los diferentes fenómenos que ocurren a causa de esas ondas, fenómenos como el cambio en la viscosidad del fluido. Igualmente se estudió el efecto de como el espesor de la capa límite va aumentando conforme aumenta la presión aguas arriba.

Gómez et al., (2010), realizan una investigación de una tobera de Laval, la tobera de Laval no es más que una tobera convergente – divergente, la investigación se basa principalmente en las ecuaciones de Navier – Stokes y balance de energía, momento y continuidad de los gases, en este estudio el fluido de trabajo son gases resultantes de la combustión de una turbina a gas, debido a la complejidad del modelo desarrollado fue necesario aplicar una linealización y discretizar el entorno de estudio, luego esta linealización el modelo pudo ser realizado y ensayado en programa CFD verificándose que el comportamiento coincide con el original.

Liu et al., (2008), realizan una investigación de flujo en toberas convergentes – divergentes, este estudio se basa principalmente en la transferencia de calor en la tobera, al hacer pasar a través de ella un líquido subenfriado, esto se logra desarrollando un modelo de dos dimensiones que estudia cómo se comporta las ondas de choque de evaporación dentro de la tobera y como ella se forma en la zona divergente de la misma. Igualmente se realiza el estudio de como la velocidad tangencial supersónica del fluido afecta la forma y el desplazamiento de las ondas de choque. Luego de que el modelo es desarrollado es comparado con un modelo preexistente, demostrando que el modelo desarrollado ofrece desviaciones de menos del 4% con respecto al modelo patrón.

2.2 Bases teóricas.

2.2.1 Velocidad del sonido y número de Mach. [1]

Se examinara ahora los medios por los cuales las perturbaciones pasan a través de un medio elástico. Una perturbación en un punto dado crea una región de moléculas comprimidas que pasan a lo largo de sus moléculas vecinas y, al hacerlo, crea una onda que

se propaga. Las ondas vienen en varias fuerzas, que se mide por la amplitud de la perturbación. La velocidad a la que se propaga a través de esta perturbación del medio se llama la velocidad de la onda. Esta velocidad no sólo depende del tipo de medio y su estado termodinámico, sino también es una función de la fuerza de la onda. Cuanto más fuerte es la onda es decir, más rápido se mueve.

Si se trata de ondas de gran amplitud, que implican cambios de presión y densidad relativamente grandes, llamamos a estas, ondas de choque. Si, por otro lado, observamos las ondas de amplitud muy pequeña, su velocidad y su estado son la única característica del medio. Estas ondas son de vital importancia para nosotros ya que las ondas de sonido entran en esta categoría. Además, la presencia de un objeto en un medio sólo se puede sentir por el objeto que está enviando o reflejando las ondas que se propagan infinitesimales en la velocidad del sonido característica.

Se establece la hipótesis de cómo se puede formar una onda de presión infinitesimal, y luego aplicar los conceptos fundamentales para determinar la velocidad de la onda. Se considera un ducto largo de área constante lleno con agua y que tiene un pistón en un extremo, como se muestra en la figura 2.1. El fluido está inicialmente en reposo. En un momento determinado al pistón se le da un incremento de velocidad dV hacia la izquierda. Las partículas del fluido inmediatamente próximos al pistón se comprimen una cantidad muy pequeña a medida que adquieren la velocidad del pistón.

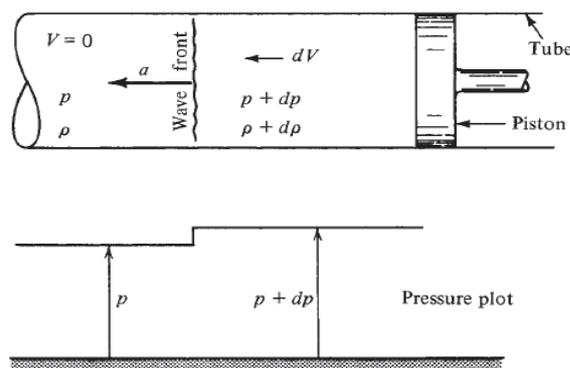


Figura 2.1 Iniciación de pulso de presión infinitesimal [1]

A medida que el pistón (estas partículas comprimidas) continúan su movimiento, el siguiente grupo de partículas es comprimido y la onda se propaga a través del fluido a una

velocidad de sonido característica de magnitud (c). Todas las partículas entre el frente de la onda y el piston se están moviendo a velocidad dV hacia la izquierda y han sido comprimidas de una densidad (ρ) a $(\rho + d\rho)$, y han incrementado su presión de (p) a $(p+dp)$.

Como se observa es una situación difícil de estudiar debido al ser un flujo inestable en el cual a cualquier punto dado en el tubo las propiedades cambian con el tiempo. Este problema puede ser fácilmente resuelto mediante la superposición de un campo de flujo de velocidad constante a la derecha de la magnitud (c). Este procedimiento cambia el marco de referencia para el frente de onda, ya que ahora aparece como una onda estacionaria. Una forma alternativa de lograr este resultado es saltar en el frente de onda. La figura 2.2 muestra el problema que ahora se tiene. Teniendo en cuenta que al cambiar el marco de referencia de esta manera no se altera en alguna forma las propiedades termodinámicas reales (estáticas) del fluido, a pesar de que afectará a las condiciones de estancamiento. Dado que el frente de onda es extremadamente delgado, se puede utilizar un volumen de control de espesor infinitesimal.

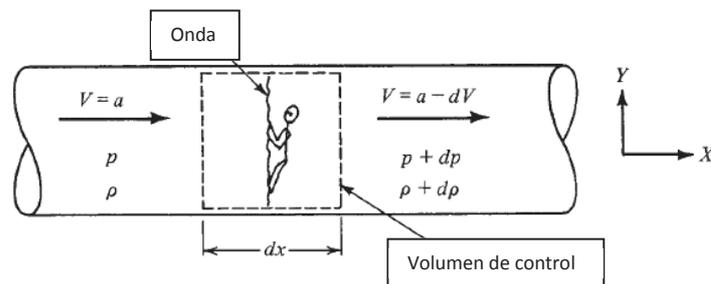


Figura 2.2 Onda de sonido [1]

Condiciones de Continuidad.

Para flujo estable unidimensional, se tiene que el flujo másico viene dado por la ecuación (2.1):

$$\dot{m} = \rho AV = \text{constante} \quad (2.1)$$

De la ecuación (2.1), tomando en cuenta área constante, resulta en la ecuación (2.2):

$$\rho V = \text{constante} \quad (2.2)$$

Aplicando la ecuación (2.2), al volumen de control antes expuesto, resulta la ecuación (2.3):

$$\rho c = (\rho + d\rho)(c - dV) \quad (2.3)$$

Resolviendo el producto notable establecido en la ecuación (2.3), resulta en la ecuación (2.4):

$$\rho dV = cd\rho - d\rho dV \quad (2.4)$$

Despreciando el término de orden superior y resolviendo para dV se obtiene la ecuación (2.5):

$$dV = \frac{cd\rho}{\rho} \quad (2.5)$$

Dado que el volumen de control tiene un espesor infinitesimal, se puede despreciar cualquier esfuerzo cortante a lo largo de las paredes. Se escribe la componente x de la ecuación de momento, se toman fuerzas y la velocidad como positivas si van a la derecha. El flujo unidimensional viene dado por la ecuación (2.6):

$$\sum F_x = \frac{\dot{m}}{g_c}(V_{out_x} - V_{in_x}) \quad (2.6)$$

$$Adp = \rho Ac dV \quad (2.7)$$

Cancelando el área y resolviendo para dV, la ecuación (2.7) queda de la forma de la ecuación (2.8):

$$dV = \frac{dp}{\rho c} \quad (2.8)$$

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) son ahora combinadas para eliminar dV, obteniendo la ecuación (2.9):

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (2.9)$$

Sin embargo, la derivada $dp / d\rho$ no es única. Depende por completo del proceso. Por lo tanto, realmente debería ser escrita como una derivada parcial con el subíndice correspondiente. ¿Pero que subíndice? ¿Qué tipo de proceso se trata? Se está analizando

una perturbación infinitesimal. En este caso se puede suponer pérdidas y transferencia de calor insignificantes cuando la onda pasa a través del fluido. Así, el proceso es reversible y adiabático tanto, lo que significa que es isoentrópico. Por lo tanto la ecuación (2.9) quedaría de la forma expresada por la ecuación (2.10):

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.10)$$

Esta puede ser expresada en una forma alternativa introduciendo el modulo de elasticidad E_v . Esta es una relación entre el volumen o los cambios de densidad que ocurren como un resultado de las variaciones de presión y esta definido como lo muestra la ecuación (2.11):

$$E_v \equiv -v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \equiv \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.11)$$

En consecuencia, al combinar las ecuaciones (2.10) y (2.11) se obtiene la ecuación (2.12):

$$c^2 = \left(\frac{E_v}{\rho} \right) \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.10) y (2.12) son relaciones equivalentes para velocidad sónica a través de cualquier medio. El módulo de volumen se utiliza normalmente en conexión con los líquidos y sólidos. Para sólidos sino que también depende del tipo de carga. El recíproco del módulo de volumen se llama la compresibilidad.

La ecuación (2.10) es normalmente usada para gases y puede ser simplificada para gases que presentan un comportamiento de gas ideal. Un proceso isentropico viene dado por la ecuación (2.13):

$$pv^k = constante \quad o \quad p = \rho^k constante \quad (2.13)$$

Diferenciando la ecuación anterior se obtiene la ecuación (2.14)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = k\rho^{k-1} const \quad (2.14)$$

Pero de la ecuación (2.13), la constante p / ρ^γ . Por lo tanto la ecuación (2.14), queda de la forma

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = k\rho^{k-1} \frac{p}{\rho^\gamma} = k \frac{p}{\rho} = kRT \quad (2.15)$$

Y de la ecuación (2.10) se obtiene la ecuación (2.16)

$$c^2 = kRT \quad (2.16)$$

O, la ecuación (2.16) puede ser escrita la como la ecuación (2.17)

$$c = \sqrt{kRT} \quad (2.17)$$

Se observa que para los gases perfectos, la velocidad del sonido es una función propia de cada gas y su temperatura.

2.2.2 Número de Mach.

El número de mach viene dado por la ecuación (2.18):

$$M = \frac{V}{c} \quad (2.18)$$

Es importante darse cuenta de que tanto (V) y (c) se calculan localmente para las condiciones que existen realmente en el mismo punto. Si la velocidad en un punto en un sistema de flujo es el doble que en otro punto, no podemos decir que el número de Mach se ha duplicado. Debemos buscar más información sobre la velocidad del sonido, la cual probablemente ha cambiado también.

Si la velocidad es menor que la velocidad local del sonido, M es menor que 1 y el flujo se llama subsónico. Si la velocidad es mayor que la velocidad local del sonido, M es mayor que 1 y el flujo se denomina supersónico. Pronto veremos que el número de Mach es el parámetro más importante en el análisis de los flujos compresibles.

2.2.3 Ecuaciones de gases perfectos en términos del número de mach.

Anteriormente se mencionó que los flujos supersónicos y subsónicos tienen características totalmente diferentes. Esto sugiere que sería correcto usar el número de Mach como un parámetro básico en las ecuaciones. Esto se puede hacer muy fácilmente para el flujo de un gas perfecto, ya que en este caso se tiene una ecuación de estado simple

y una expresión para la velocidad del sonido. El desarrollo de algunas relaciones importantes es el siguiente.

2.2.3.1 Condiciones de continuidad.

La ecuación (2.19) representa, la ecuación para un gas ideal

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (2.19)$$

Y de la definición de número de mach, se obtiene la ecuación (2.20)

$$V = Mc \quad (2.20)$$

Substituyendo las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.17) en la ecuación (2.1),

$$\rho AV = \frac{p}{RT} AM\sqrt{kRT} = pAM\sqrt{\frac{k}{RT}} \quad (2.21)$$

Así para el flujo estable unidimensional de un gas perfecto, la ecuación de continuidad se convierte en la ecuación (2.22):

$$\dot{m} = pAM\sqrt{\frac{k}{RT}} = const. \quad (2.22)$$

2.2.3.2 Relaciones de estancamiento.

Para gases se elimina el término potencial y queda:

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \quad (2.23)$$

Par tiendo de la ecuación (21.7) se obtiene la ecuación (2.24):

$$c^2 = kRT \quad (2.24)$$

Se obtiene la ecuación (2.25), al relacionar las ecuaciones (2.22), (2.23) y (2.24)

$$h_0 = h + \frac{M^2 kRT}{2} = h + \frac{M^2 kRT}{2} \quad (2.25)$$

Como el calor específico a presión constante (c_p) se puede escribir en términos de (k) y (R); esto mediante la ecuación (2.26):

$$c_p = \frac{kR}{k-1} \quad (2.26)$$

Combinando las ecuaciones (2.26) y (2.25), se tiene la ecuación (2.27) que representa la entalpia de estancamiento en función del número de mach y (c_p):

$$h_0 = h + M^2 \frac{k-1}{2} c_p \quad (2.27)$$

Sin embargo para un gas la entalpia vendría dada por la ecuación (2.28):

$$h = c_p T \quad (2.28)$$

Así la ecuación anterior podría ser escrita, de la forma mostrada por la ecuación (2.29):

$$h_0 = h + M^2 \frac{(k-1)}{2} h \quad (2.29)$$

Igualmente la ecuación (2.29) puede ser escrita de forma mostrada por la ecuación (2.30):

$$h_0 = h \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \quad (2.30)$$

Usando $h = c_p T$ y $h_0 = c_p T_0$, la ecuación (2.30) puede escribirse como se observa en la ecuación (2.31):

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \quad (2.31)$$

Ahora el estancamiento es un proceso isoentrópico. Así (k) puede ser usado como el exponente n en la siguiente ecuación, y entre dos puntos cualesquiera con entropía igual, se obtiene la ecuación (2.32), dada por:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.32)$$

El punto 1 está referido a las condiciones estáticas, mientras el punto 2 las condiciones de estancamientos, entonces combinando las ecuaciones (2.32) y (2.31) se obtiene la ecuación (2.33):

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.33)$$

La ecuación (2.333) también puede ser escrita, de la forma mostrada por la ecuación (2.34):

$$p_0 = p \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.34)$$

2.2.4 Presión de Estancamiento – Ecuación de Energía.

Para flujo estable unidimensional se tiene la ecuación (2.35):

$$\frac{dp_0}{\rho_0} + ds_e(T_0 - T) + T_0 ds_i + \delta w_s = 0 \quad (2.35)$$

Para un gas ideal, a partir de la ecuación (2.19), se obtiene la ecuación (2.36)

$$p_0 = \rho_0 RT_0 \quad (2.36)$$

Substituyendo por la densidad de estancamiento, la ecuación (2.35) puede ser escrita como se observa en la ecuación (2.37):

$$\frac{dp_0}{p_0} + \frac{ds_e}{R} \left(1 - \frac{T}{T_0}\right) + \frac{ds_i}{R} + \frac{\delta w_s}{RT_0} = 0 \quad (2.37)$$

Un gran número de problemas son adiabáticos y no involucran trabajo de flecha. En este caso (ds_e) y (δw_s) son cero, como se indica en la ecuación (2.38):

$$\frac{dp_0}{p_0} + \frac{ds_i}{R} = 0 \quad (2.38)$$

Esta puede ser integrada entre dos puntos en el flujo de un sistema para obtener la ecuación (2.39):

$$\ln \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{s_{i2} - s_{i1}}{R} = 0 \quad (2.39)$$

Pero desde que ($ds_e=0$), ($ds_i = ds$), no es necesario escribir el subíndice (i) de la entropía. Así que la ecuación anterior que de la forma mostrada en la ecuación (2.40)

$$\ln \frac{p_{02}}{p_{01}} = - \frac{s_2 - s_1}{R} \quad (2.40)$$

Usando el antilogaritmo en la ecuación (2.40), se obtiene la ecuación (2.41):

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = e^{-\frac{s_2 - s_1}{R}} \quad (2.41)$$

La ecuación (2.41) igualmente, se puede escribir mediante la forma presenta por la ecuación (2.42):

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = e^{-\frac{\Delta s}{R}} \quad (2.42)$$

La presión total debe ser absoluta, y $\Delta s / R$ debe ser adimensional. Para este caso flujo adiabático, Δs siempre será positivo. Esto debido a que p_{02} siempre será menos que p_{01} .

Esto confirma lo demostrado anteriormente de la ecuación de presión- energía de estancamiento, que para el caso de un sistema adiabático, sin perdidas de flujo $p_t =$ constante para cualquier fluido. Así a presión de estancamiento es considerada un parámetro muy importante para muchos sistemas que reflejan pérdidas de flujo.

2.3 Flujo adiabático con variación de área.

Primero se considera el comportamiento general de un fluido arbitrario. Para estudiar los efectos del cambio de área, se harán las siguientes suposiciones:

- Flujo estable unidimensional
- Adiabático ($\delta q = 0$), ($ds_e = 0$)
- Sin trabajo de flecha ($\delta w_s = 0$)
- Sin energía potencial ($dz = 0$)
- Sin fricción ($ds_i = 0$)

El objetivo es obtener relaciones que indiquen la variación de las propiedades del fluido en función de los cambios de área y el número de Mach. De esta manera se pueden distinguir las diferencias importantes entre flujo subsónico y supersónico. Primero la ecuación de energía dada por la ecuación (2.41):

$$\delta q = \delta w_s + dh + \frac{dV^2}{2} + g dz \quad (2.41)$$

Pero, de acuerdo a las consideraciones al inicio de la sección.

$$\delta q = \delta w_s = dz = 0$$

Tomando en cuenta lo anterior la ecuación (2.41) quedaría como la ecuación (2.42):

$$0 = dh + \frac{dV^2}{2} \quad (2.42)$$

La ecuación (2.42), igualmente se escribe de la forma dada por la ecuación (2.43):

$$dh = -VdV \quad (2.43)$$

Ahora se introduce la relación de propiedades dada por la ecuación (2.44):

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (2.44)$$

Desde que el flujo ha sido asumido como no adiabático y sin pérdidas, esto también lo vuelve isoentrópico ($ds = 0$), así la ecuación (2.44) queda de la forma de la ecuación (2.45):

$$dh = \frac{dp}{\rho} \quad (2.45)$$

Al igualar las ecuaciones (2.43) y (2.44) se obtiene, la ecuación (2.46):

$$-VdV = \frac{dp}{\rho} \quad (2.46)$$

Otra forma de presentar la ecuación (2.46), sería la ecuación (2.47):

$$dV = -\frac{dp}{\rho V} \quad (2.47)$$

Esto se introduce en la ecuación (2.48):

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (2.48)$$

Y la forma diferencial de la ecuación de continuidad queda, de la forma de la ecuación (2.49):

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} - \frac{dV}{\rho V^2} = 0 \quad (2.49)$$

Resolviendo esto para (dp / ρ) , la ecuación anterior queda de la forma de la ecuación (2.50):

$$\frac{dp}{\rho} = V^2 \left(\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} \right) \quad (2.50)$$

Recordando la definición de velocidad del sonido dada por la ecuación (2.10):

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.10)$$

Desde que el flujo es isoentrópico, se puede ignorar el subíndice y cambiar la derivada parcial para una derivada ordinaria, se obtiene la ecuación (2.51):

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (2.51)$$

Esto permite que la ecuación (2.50) sea reorganizada a, la forma mostrada por la ecuación (2.52):

$$dp = c^2 d\rho \quad (2.52)$$

Substituyendo esta expresión para (dp) en la ecuación (2.50), se obtiene la ecuación (2.53):

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{V^2}{c^2} \left(\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} \right) \quad (2.53)$$

Introduciendo la definición de número de Mach tomada de la ecuación (2.20):

$$M^2 = \frac{V}{c} \quad (2.20)$$

Y combinando en términos de (dp / ρ) para obtener la siguiente relación entre la densidad y cambios de área, se obtiene la ecuación (2.54):

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{M^2}{1 - M^2} \right) \frac{dA}{A} \quad (2.54)$$

Si se substituye la ecuación (2.54) en la forma diferencial de la ecuación de continuidad, se puede obtener una relación entre la velocidad y los cambios de área, obteniéndose la ecuación (2.55):

$$\frac{dV}{V} = - \left(\frac{1}{1 - M^2} \right) \frac{dA}{A} \quad (2.55)$$

Ahora la ecuación (2.55) puede ser dividida por (V) para obtener la ecuación (2.56):

$$\frac{dV}{V} = \rho V^2 \left(\frac{1}{1 - M^2} \right) \frac{dA}{A} \quad (2.56)$$

Si se igualan las ecuaciones (2.54) y (2.55), se puede obtener una relación entre la presión y los cambios de área dada por la ecuación (2.57):

$$dp = \rho V^2 \left(\frac{1}{1 - M^2} \right) \frac{dA}{A} \tag{2.57}$$

Veamos lo que está sucediendo en los flujos de fluidos a través de un conducto de área variable. Para simplificar vamos a suponer que la presión está siempre disminuyendo. Así dp es negativo. De la ecuación (2.57) se ve que si $M < 1$, dA debe ser negativo, lo que indica que el área está disminuyendo, mientras que si $M > 1$, dA debe ser positivo y el área va en aumento.

Resumimos lo anterior diciendo que a medida que la presión disminuye, las siguientes variaciones se producen:

Tabla 2.1 Relación entre el régimen de flujo y algunas propiedades [1]

		Subsónico ($M < 1$)	Supersónico ($M > 1$)
Área	A	Disminuye	Incrementa
Densidad	ρ	Disminuye	Disminuye
Velocidad	V	Incrementa	Incrementa

Una tabla similar podría ser fácilmente realizada para la situación en que aumenta la presión, pero es probable que sea más conveniente de expresar lo anterior en una forma gráfica alternativa, como se observa en la figura 2.3

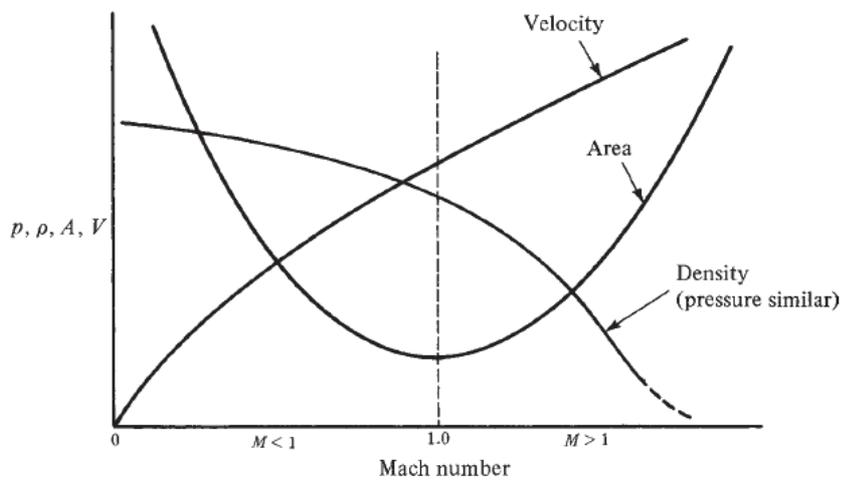


Figura 2.3 Variación de las propiedades en función del cambio de área [1]

La forma apropiada de estas curvas pueden ser visualizados si se combinan las ecuaciones (2.54) y (2.55) para eliminar el término (dA / A) con el siguiente resultado expresado en la ecuación (2.58):

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (2.58)$$

De esta ecuación se ve que a bajos números de Mach, variaciones en la densidad serán muy pequeñas, mientras que a altos números de Mach la densidad cambia muy rápidamente. (Eventualmente, como V se hace muy grande y ρ se hace muy pequeña, los pequeños cambios de densidad se producen una vez más.) Esto significa que la densidad es casi constante en el régimen de baja subsónico ($d\rho \approx 0$) y los cambios de velocidad compensan los cambios área. En un número de Mach igual a la unidad, se llega a una situación en la que los cambios de densidad y de velocidad se compensan entre sí y por lo tanto no se requiere variación en el área ($dA = 0$). A medida que se mueven en el área en supersónico, la densidad disminuye tan rápidamente que el cambio de velocidad de acompañamiento no puede acomodar el flujo y por lo tanto el área debe aumentar. Ahora nos damos cuenta otro aspecto del comportamiento del flujo, que es exactamente lo contrario en flujo subsónico y supersónico. Considere la posibilidad de la operación de dispositivos tales como toberas y difusores.

2.3.1 Gases ideales con pérdidas.

Luego de estudiar los efectos generales de la variación del área en un campo de flujo, ahora se desarrollaran algunas ecuaciones específicas de gobierno para el caso de un gas perfecto. Un ejemplo para el sistema se observa en la figura 2.4, la ecuación (2.59) expresa como para el caso mencionado anteriormente la relación de presiones de entrada y salida es una función que depende directamente, del número de mach, la relación de calores específicos y la variación de la entropía:

$$\frac{p_2}{p_1} = f(M_1, M_2, k, \Delta S_i) \quad (2.59)$$

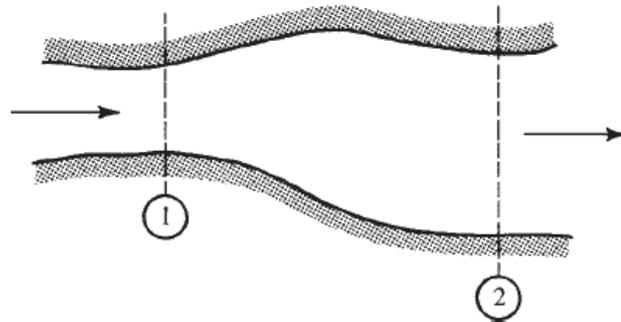


Figura 2.4 Sistema de flujo de área variable [1]

Se inicia por tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- Flujo estable unidimensional.
- Adiabático.
- Sin trabajo de flecha.
- Gas ideal.
- Sin energía potencial.

2.3.1.1 Condiciones de estado.

Aplicando la ecuación de estado para un gas ideal, mostrada en la ecuación (2.60):

$$p = \rho RT \quad (2.60)$$

2.3.1.2 Continuidad.

A partir de la definición de flujo másico dada en la ecuación (2.1), se obtiene la ecuación (2.61):

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \quad (2.61)$$

En primer lugar se relacionan las áreas, mediante la ecuación (2.62):

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1 V_1}{\rho_2 V_2} \quad (2.62)$$

Se substituyen las densidades usando la ecuación de estado (2.60) y para las velocidades de la definición de número de Mach, obteniéndose la ecuación (2.63):

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \left(\frac{RT_2}{RT_1} \right) \frac{M_1 c_1}{M_2 c_2} = \frac{p_1 T_2 M_1 c_1}{p_2 T_1 M_2 c_2} \quad (2.63)$$

Introduciendo en la ecuación (2.63) la expresión de velocidad para un gas ideal, dada en la ecuación (2.17), es generada la ecuación (2.64):

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{p_1 M_1}{p_2 M_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.64)$$

Ahora se debe encontrar una forma de expresar las razones de presión y temperatura en términos de M_1 , M_2 , γ y Δs .

2.3.1.3 Energía.

Se parte de, de un balance de energía dado por la ecuación (2.65):

$$h_{01} + q = h_{02} + w_s \quad (2.65)$$

Considerando un proceso adiabático, sin trabajo, queda la ecuación (2.66):

$$h_{01} = h_{02} \quad (2.66)$$

Sin embargo, se puede ir más allá de esto, ya que se sabe que para un gas ideal, la entalpía es una función de la temperatura. Como se observa en la ecuación (2.67):

$$T_{01} = T_{02} \quad (2.67)$$

Recordando la relación entre la temperatura estática y la temperatura de estancamiento, dada por la ecuación (2.31):

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \quad (2.31)$$

Entonces la ecuación (2.66) puede ser escrita como la ecuación (2.68) mostrada a continuación:

$$T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right) = T_2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right) \quad (2.68)$$

La ecuación anterior puede ser escrita, de la forma mostrada por la ecuación (2.69):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + [(k-1)/2] M_1^2}{1 + [(k-1)/2] M_2^2} \quad (2.69)$$

Que es la proporción deseada para la ecuación (2.64). Tenga en cuenta que no se han colocado subíndices en la relación específica de calor γ , lo que significa que estamos

suponiendo que ($k_1 = k_2$). Esto podría ser relativo debido a que los calores específicos (c_p) y (c_v) varían con la temperatura.

Recordando también se desarrollo una relación entre la presión estática y la presión de estancamiento, dada por la ecuación (2.34):

$$p_0 = p \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.34)$$

Además, la ecuación de energía – presión de estancamiento fue integrada para el caso de un gas ideal en flujo adiabático sin trabajo, obteniendo como resultado la ecuación (2.42):

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = e^{-\frac{\Delta s}{R}} \quad (2.42)$$

Si se introduce la ecuación (2.34) en la ecuación (2.42) se tiene, la ecuación (2.69):

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_2^2}{1 + [(k-1)/2]M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = e^{-\frac{\Delta s}{R}} \quad (2.70)$$

Reorganizando la ecuación anterior se obtiene la ecuación (2.70):

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_2^2}{1 + [(k-1)/2]M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} e^{+\frac{\Delta s}{R}} \quad (2.71)$$

Ahora tenemos la información deseada para lograr el objetivo original. Sustitución directa de las ecuaciones (2.68) y (2.70) en (2.64) se obtiene la ecuación (2.71):

$$\frac{A_2}{A_1} = \left[\left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_2^2}{1 + [(k-1)/2]M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} e^{+\frac{\Delta s}{R}} \right] x \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_2^2}{1 + [(k-1)/2]M_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.72)$$

Esto puede ser simplificado a la forma mostrada por la ecuación (2.72):

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_2^2}{1 + [(k-1)/2]M_1^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} e^{\frac{\Delta s}{R}} \quad (2.72)$$

A partir de las ecuaciones (2.70) (2.68), es posible obtener la ecuación (2.73):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_2^2}{1 + [(k-1)/2]M_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}} e^{\frac{\Delta s}{R}} \quad (2.73)$$

2.4 Tobera convergente – divergente.

La tobera convergente divergente (algunas veces llamada tobera DeLaval), se observa en las figuras 2.5 y 2.6, y se puede identificar la garganta (o sección de área mínima) como 2 y la sección de salida como 3. La característica distintiva física de este tipo de tobera es la relación del área, lo que significa la relación del área de salida al área de la garganta. El objetivo de una tobera convergente divergente es la obtención de flujo supersónico, si la tobera opera como es deseado, el flujo será subsónico de 1 a 2, mientras que en 2 será sónico, y a partir de 2 hasta 3 será supersónico

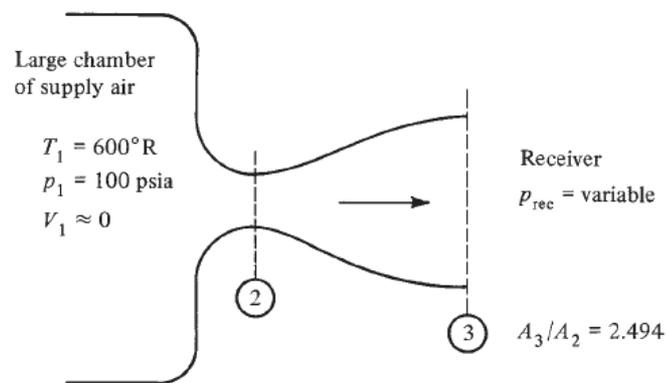


Figura 2.5 Ejemplo de una Tobera Convergente – Divergente [1]

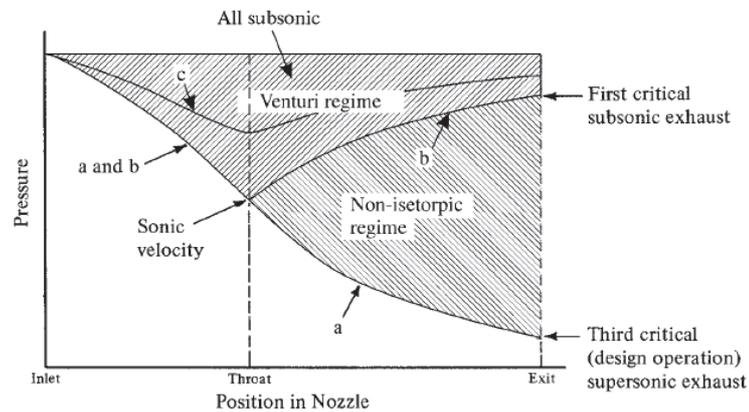


Figura 2.6 Efectos de la presión del receptor en el flujo de una tobera convergente divergente [1]

2.5 Flujo de Fanno.

Análisis para un fluido general.

Se considera primero el comportamiento de un fluido arbitrario. Para aislar los efectos de la fricción, se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:

- Flujo estable unidimensional
- Adiabático ($\delta q = 0$), ($ds_e = 0$)
- Sin trabajo de flecha ($\delta w_s = 0$)
- Sin energía potencial ($dz = 0$)
- Área constante ($dA = 0$)

Se aplican los conceptos básicos de continuidad, energía y momento.

2.5.1 Condiciones de continuidad.

A partir de la ecuación de flujo másico dada en la expresión (2.1) Pero desde que el área es considerada constante, se reduce a la ecuación (2.74):

$$\rho V = \text{const} \quad (2.74)$$

Se asigna un nuevo símbolo (G) para esta constante (la cantidad ρV), la cual se refiere a la velocidad de la masa de la forma mostrada por la ecuación (2.75):

$$\rho V = G = \text{const} \quad (2.75)$$

2.5.2 Condiciones energía.

Para un flujo adiabático sin trabajo, se tiene la ecuación (2.76):

$$h_{01} = h_{02} = h_0 = \text{const.} \quad (2.76)$$

Si se desprecia el término potencial esto significa, que la ecuación anterior resulta en la ecuación (2.77):

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = \text{const.} \quad (2.77)$$

Substituyendo la velocidad de la ecuación (2.75), queda la ecuación (2.78):

$$h_0 = h + \frac{G^2}{2\rho^2} = \text{const} \quad (2.78)$$

Ahora para cualquier flujo dado, las constantes (h_t) y (G) son conocidas. Así la ecuación (2.78) establece una única relación entre (h) y (ρ). La figura 2.7 es una grafica de esta ecuación en el plano $h - v$ para varios valores de (G), pero todos ellos para el mismo valor de (h_t). Cada curva es llamada línea de Fanno y representa el flujo a una determinada velocidad másica. Observe cuidadosamente que (G) es constante mientras (\dot{m}). En los ductos de diferentes tamaños puede pasar el mismo flujo másico sin embargo puede tener diferentes velocidades másicas.

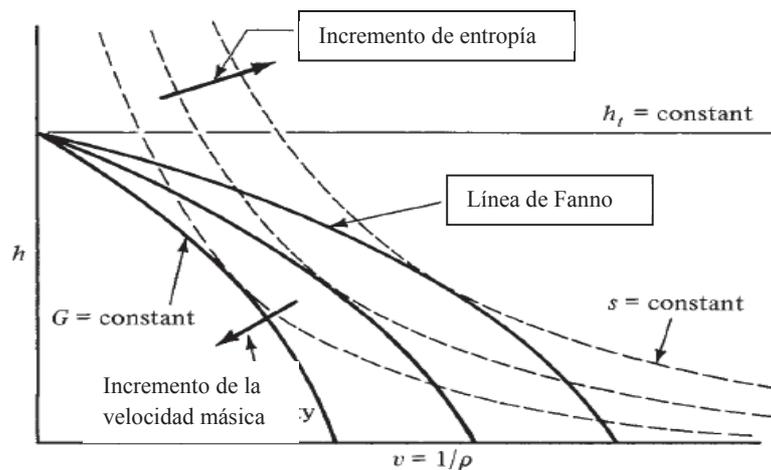


Figura 2.7 Esquemas de las líneas de Fanno [1]

Una vez que el fluido se conoce, también se puede trazar líneas de entropía constante en el diagrama $h-v$. Curvas típicas de $s = \text{constante}$ se muestran como líneas discontinuas en la figura. Es mucho más instructivo para trazar estas líneas Fanno en el conocido $h-s$ avión, tal esquema se muestra en la figura 2.8. En este punto, un hecho significativo es muy claro, además como se ha supuesto que no hay transferencia de calor ($ds_e = 0$), la única manera de que la entropía se puede generar es a través de irreversibilidades (ds_i).

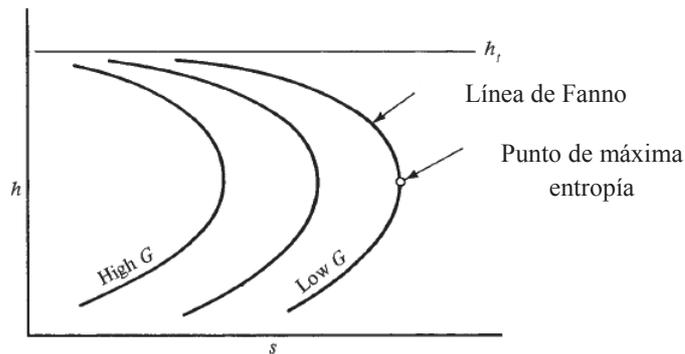


Figura 2.8 Líneas de Fanno en función de la entropía [1]

La figura 2.9 muestra una determinada línea de Fanno, junto con las líneas de presión típicos. Todos los puntos de esta línea representan estados con el mismo flujo másico por unidad de área (velocidad de masa) y la entalpía estancamiento mismo. Debido a la naturaleza irreversible de los efectos de fricción, el flujo sólo puede proceder a la derecha. Así, la línea Fanno está dividida en dos partes distintas, una superior y una rama inferior, que están separados por un punto límite de máxima entropía.

2.5.3 Punto Límite.

Diferenciando la expresión de energía desarrollada, y establecida por la ecuación (2.77), se obtiene la ecuación (2.79):

$$dh_0 = dh + VdV = 0 \quad (2.79)$$

Igualmente diferenciando la ecuación de continuidad (2.74), se obtiene la ecuación (2.80):

$$\rho dV + Vd\rho = 0 \quad (2.80)$$

La cual igualmente puede ser escrita de la siguiente forma dada por la ecuación (2.81):

$$dV = -V \frac{d\rho}{\rho} \quad (2.81)$$

Introduciendo la ecuación (2.81) en la ecuación (2.79), se obtiene la ecuación (2.82):

$$dh = \frac{V^2 d\rho}{\rho} \quad (2.82)$$

Substituyendo en la ecuación (2.44), (dh) de la ecuación (2.82), se obtiene la ecuación (2.83):

$$T ds = \frac{V^2 d\rho}{\rho} - \frac{dp}{\rho} \quad (2.83)$$

Es importante señalar que esta expresión es válida para cualquier fluido, y entre dos puntos separados en cualquier lugar diferente a lo largo de la línea de Fanno. Ahora se va a aplicar la ecuación (2.83) a dos puntos adyacentes que rodean el punto límite de un máximo de entropía. En este punto ($s = \text{const.}$) así ($ds = 0$), y la ecuación (2.83) se convierte en:

$$V^2 d\rho = dp \quad \text{en el punto límite} \quad (2.84)$$

$$V^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{en el punto límite}} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=\text{const}} \quad (2.85)$$

Se observa como la velocidad es sónica en el punto límite. La rama superior ahora puede ser más significativa de la rama llamada subsónica, y la rama inferior se ve que es la rama supersónica.

2.5.4 Condiciones de momento.

El análisis anterior fue hecho usando solo relaciones de continuidad y energía. Ahora se procede a aplicar conceptos de momento para el volumen de control mostrado en la figura 2.9. La componente (x) de la ecuación de momento para flujo estable unidimensional es:

$$\sum F_x = \dot{m} (V_{s_x} - V_{o_x}) \quad (2.6)$$

De la figura 2.9 se observa que la sumatoria de fuerzas viene dada por la ecuación (2.86):

$$\sum F_x = p_1 A - p_2 - F_f \quad (2.86)$$

Donde (F_f) representa fuerza de fricción de la pared en el fluido entre las secciones 1 y 2. Así la ecuación de momento en la dirección del flujo es:

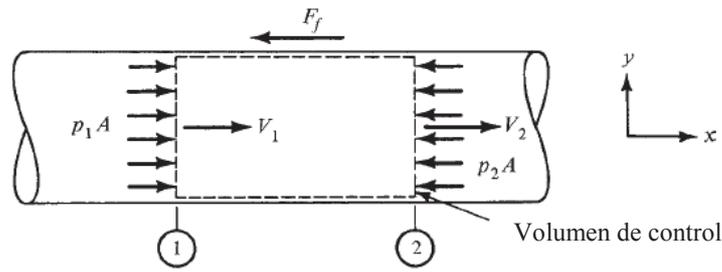


Figura 2.9 Esquema de estudio para flujo de Fanno [1]

$$(p_1 - p_2)A - F_f = \dot{m} (V_2 - V_1) = \rho AV (V_2 - V_1) \quad (2.87)$$

Se observa como la ecuación (2.86) puede ser escrita como, lo expresa la ecuación (2.88):

$$p_1 - p_2 - \frac{F_f}{A} = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 \quad (2.88)$$

O, de la forma mostrada por la ecuación (2.89):

$$(p_1 + \rho_1 V_1^2) - \frac{F_f}{A} = p_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (2.89)$$

En esta forma la ecuación no es particularmente usada excepto para casos con hechos significativos. Para flujos estables unidimensionales en área constante de cualquier fluido, el valor de $(p + \rho V^2 / g_c)$ no puede ser constante si fuerzas de roce están presentes.

Antes de abandonar esta sección de fluidos en general, podríamos decir unas palabras sobre el flujo de Fanno a bajos números de Mach. Un vistazo a la Figura 2.9 muestra que la rama superior se aproxima asintóticamente a la línea de la entalpía total constante. Así, el extremo izquierdo de la línea Fanno será casi horizontal. Esto indica que el flujo a números de Mach muy bajos deberán velocidad casi constante.

2.5.5 Ecuaciones de trabajo para gases ideales.

Se ha descubierto una tendencia general de variaciones de propiedades que ocurren en el flujo de Fanno, tanto para régimen subsónico como para régimen subsónico. Ahora se puede desarrollar algunas ecuaciones específicas de trabajo para el caso de un gas perfecto. Recordando que estas son relaciones entre propiedades en ubicaciones arbitrarias de un sistema de flujo, escritas en términos del número de Mach y la relaciones de calores específicos.

2.5.5.1 Ecuaciones de energía.

Se inicia con la ecuación de energía, mostrada por la ecuación (2.76):

$$h_{01} = h_{02} = h_0 = \text{const.} \quad (2.76)$$

En un gas ideal, la entalpia es una función de la temperatura, indicado en la ecuación (2.90):

$$T_{01} = T_{02} \quad (2.90)$$

Ahora para un gas perfecto con calores específicos constantes, se recuerda la ecuación (2.31):

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \quad (2.31)$$

Por lo tanto la ecuación de energía para el flujo de Fanno puede ser escrita como lo muestra la ecuación (2.91):

$$T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right) = T_2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right) \quad (2.91)$$

Otra forma de presentar la ecuación anterior se observa en la ecuación (2.92):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + [(k-1)/2]M_1^2}{1 + [(k-1)/2]M_2^2} \quad (2.92)$$

2.5.5.2 Condiciones de continuidad.

Anteriormente se conocía que la densidad y la velocidad son proporcionales a una constante denominada (G), como se observa en la ecuación (2.75):

$$\rho V = G = \text{const} \quad (2.75)$$

Para establecer las propiedades entre dos puntos la ecuación anterior puede ser escrita como se muestra en la ecuación (2.93):

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (2.93)$$

Si se introduce la ecuación de estado de un gas ideal, la definición de número de Mach y la velocidad del sonido para un gas, la ecuación (2.92) queda como lo muestra la ecuación (2.94):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.94)$$

Ahora se introduce la expresión de la relación de temperaturas de la ecuación (2.91), y se tendrá la relación de trabajo para la presión estática, dada por la ecuación (2.95):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_1^2}{1 + [(k-1)/2]M_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.95)$$

La relación de densidad puede ser fácilmente obtenida de las ecuaciones (2.91), (2.94) y de la ley de gases ideales, como se muestra en la ecuación (2.96):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_2^2}{1 + [(k-1)/2]M_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.96)$$

2.5.5.3 Cambio de Entropía.

A partir la expresión de cambio de entropía entre dos puntos, dada por la ecuación (2.97):

$$\Delta S_{1-2} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (2.97)$$

Substituyendo el valor de (c_p) con su forma adimensional, de la ecuación anterior se obtiene la ecuación (2.98):

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{k}{k-1} \ln \frac{T_2}{T_1} - \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (2.98)$$

Si se utilizan las expresiones desarrolladas para la razón de temperatura (2.91) y la razón de presiones, la entropía pasa a ser de la forma mostrada en la ecuación (2.99):

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{k}{k-1} \ln \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_1^2}{1 + [(k-1)/2]M_2^2} \right) - \ln \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_1^2}{1 + [(k-1)/2]M_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.99)$$

Se observa que este cambio de entropía entre dos puntos en el Flujo de Fanno puede ser escrito como lo muestra la ecuación (2.100):

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_1^2}{1 + [(k-1)/2]M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (2.100)$$

Ahora recordando la ecuación de presión – energía de estancamiento para flujo adiabático sin trabajo para un gas ideal, mostrada en la ecuación (2.42):

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = e^{-\frac{\Delta s}{R}} \quad (2.42)$$

Así, combinando las ecuaciones (2.42) y (2.99) se obtiene una expresión simple para la razón de presiones de estancamiento, como se observa en la ecuación (2.101):

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_2^2}{1 + [(k-1)/2]M_1^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (2.101)$$

Ahora tenemos los medios para obtener todas las propiedades en un punto 2 aguas abajo, si sabemos que todas las propiedades en algún punto 1 aguas arriba y el número de Mach en el punto 2. Sin embargo, en muchas situaciones no se conoce ambos en números de Mach. Un problema típico sería predecir el último número de Mach, dadas las condiciones iniciales y la información sobre la longitud del conducto, material, y así sucesivamente. Así, nuestro siguiente trabajo es relacionar el cambio en el número de Mach a las pérdidas por fricción.

2.5.5.4 Momento.

Se inicia con la forma diferencial de la ecuación de momento, expresada en la ecuación (2.102):

$$\frac{dp}{\rho} + f \frac{V^2 dx}{2D_e} + g dz + \frac{dV^2}{2} = 0 \quad (2.102)$$

El objetivo es obtener esta ecuación en términos del número de Mach. Si se introducen la ecuación de un gas ideal junto con las expresiones de número de Mach y la velocidad del sonido se obtiene la ecuación (2.103):

$$\frac{dp}{p} (RT) + f \frac{dx}{D_e} \frac{M^2 k RT}{2} + \frac{g}{g_c} dz + \frac{dM^2 k R dT}{2} = 0 \quad (2.103)$$

Igualmente la ecuación anterior puede ser escrita, como la ecuación (2.104) a continuación:

$$\frac{dp}{p} + f \frac{dx}{D_e} \frac{\gamma}{2} M^2 + \frac{g dz}{RT} + \frac{k}{2} dM^2 + \frac{k}{2} M^2 \frac{dT}{T} = 0 \quad (2.104)$$

La ecuación (2.103) es una forma útil de la ecuación de momento que es válida para todos los problemas de flujo estable que implican un gas perfecto. Ahora se procede a aplicar esto a flujo de Fanno. Conociendo la ecuación (2.105)

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) = \text{const.} \quad (2.105)$$

Y luego aplicando logaritmo en ambos lados de la igualdad, se obtiene la ecuación (2.106):

$$\ln T + \ln \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) = \ln \text{const.} \quad (2.106)$$

Luego de diferenciar, la ecuación anterior, se obtiene la ecuación (2.107):

$$\frac{dT}{T} + \frac{d(1 + [(k-1)/2] M^2)}{1 + [(k-1)/2] M^2} = 0 \quad (2.107)$$

Que se puede utilizar para substituir (dT / T) en la ecuación (2.103). La relación de continuidad establecida en términos de un gas perfecto, queda dada por la ecuación (2.108):

$$\frac{pM}{\sqrt{T}} = \text{const.} \quad (2.108)$$

Por diferenciación logarítmica (tomando el logaritmo natural y luego diferenciando), se observa, la expresión mostrada por la ecuación (2.109):

$$\frac{dp}{p} + \frac{dM}{M} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad (2.109)$$

Se puede introducir la ecuación (2.106) para eliminar (dT/T), obteniendo la ecuación (2.110):

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dM}{M} - \frac{1}{2} \frac{d(1 + [(k-1)/2] M^2)}{1 + [(k-1)/2] M^2} \quad (2.110)$$

La cual puede ser usada para substituir (dp / p) en la ecuación (2.103):

Realizando las substituciones indicadas para (dp / p) y (dT / T) en la ecuación de momento, ignorando el término potencial, la ecuación (2.103) puede ser escrita como la ecuación (2.111), escrita a continuación:

$$f \frac{dx}{D_e} = \frac{d(1 + [(k-1)/2] M^2)}{1 + [(k-1)/2] M^2} - \frac{dM^2}{M^2} + \frac{2}{k} \frac{dM}{M^3} + \frac{1}{kM^2} \frac{d(1 + [(k-1)/2] M^2)}{1 + [(k-1)/2] M^2} \quad (2.111)$$

El último término puede ser simplificado por integración, obteniéndose la ecuación (2.112):

$$\frac{1}{kM^2} \frac{d(1 + [(k-1)/2] M^2)}{1 + [(k-1)/2] M^2} = \frac{k-1}{2k} \frac{dM^2}{M^2} - \frac{k-1}{2k} \frac{d(1 + [(k-1)/2] M^2)}{1 + [(k-1)/2] M^2} \quad (2.112)$$

Entonces la ecuación de momento se escribe como se observa en la ecuación (2.113):

$$f \frac{dx}{D_e} = \frac{k+1}{2k} \frac{d(1 + [(k-1)/2] M^2)}{1 + [(k-1)/2] M^2} + \frac{2}{k} \frac{dM}{M^3} - \frac{k+1}{2k} \frac{dM^2}{M^2} \quad (2.113)$$

La ecuación (2.113) esta restringida para flujos estables unidimensionales de un gas ideal, sin transferencia de calor o trabajo, área constante, variaciones despreciables de la energía potencial. Ahora se puede integrar esta ecuación entre dos puntos de un flujo y se obtiene la ecuación (2.114):

$$\frac{f(x_2 - x_1)}{D_e} = \frac{k+1}{2k} \ln \frac{1 + [(k-1)/2] M_2^2}{1 + [(k-1)/2] M_1^2} - \frac{1}{k} \left(\frac{1}{M_2^2} - \frac{1}{M_1^2} \right) - \frac{k+1}{2k} \ln \frac{M_2^2}{M_1^2} \quad (2.114)$$

Luego de haber analizado el flujo en un ducto de área constante con fricción pero sin transferencia de calor. Las propiedades del fluido cambian de una forma predecible dependiendo del régimen de flujo. Como es mostrado en la tabla 2.2. La variación de las propiedades en flujo subsónico de Fanno sigue un patrón intuitivo pero se observa que para flujo supersónico es completamente diferente.

Tabla 2.2 Variación de las propiedades para flujo de Fanno [1]

Propiedad	Subsónico	Supersónico
Velocidad	Incrementa	Disminuye
Número de Mach	Incrementa	Disminuye
Entalpia	Disminuye	Incrementa
Entalpia de Estancamiento	Constante	Constante
Presión	Disminuye	Incrementa
Densidad	Disminuye	Incrementa
Presión de estancamiento	Disminuye	Disminuye

2.6 Flujo de Rayleigh.

Análisis para un fluido general

Primero se debe considerar el comportamiento general de un fluido arbitrario. Para aislar los efectos de la transferencia de calor se harán las siguientes consideraciones.

- Flujo estable unidimensional

- Fricción despreciable ($ds_i \approx 0$)
- Sin trabajo de flecha ($\delta w_s = 0$)
- Energía potencial despreciable ($dz = 0$)
- Área constante ($dA = 0$)

Se aplican los conceptos básicos de continuidad, energía y momento.

2.6.1 Continuidad.

Partiendo de la definición de flujo másico (ecuación 2.1) y considerando un ducto de área constante, se obtiene la ecuación (2.115):

$$\rho V = \text{const.} \quad (2.115)$$

Como se observó en la sección anterior, se conoce que la constante (G), es la velocidad másica. Dada por la ecuación (2.116):

$$\rho V = G = \text{const.} \quad (2.116)$$

2.6.2 Energía.

La expresión cuando se trabaja con un flujo sin trabajo de flecha, viene dada por la ecuación (2.117):

$$h_{01} + q = h_{02} \quad (2.117)$$

2.6.3 Momento.

Ahora se proceden a aplicar las ecuaciones de momento para el control de volumen mostrado en la figura 2.11. La componente (x) de la ecuación de momento para flujo estable unidimensional esta dada por la ecuación (2.6):

$$\sum F_x = \dot{m} (V_{sx} - V_{ox}) \quad (2.6)$$

Simplificando la expresión anterior se obtiene la ecuación (2.118):

$$p_1 A - p_2 A = \rho A V (V_2 - V_1) \quad (2.118)$$

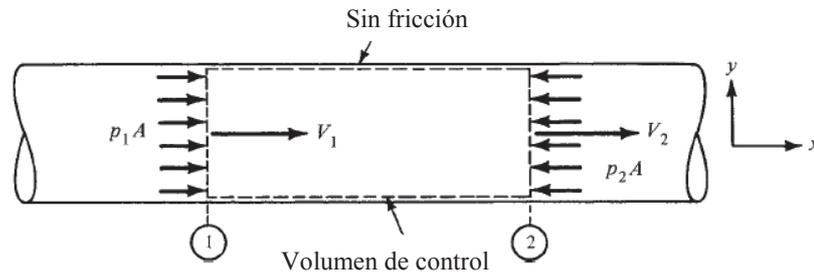


Figura 2.10 Análisis de momento para el flujo de Rayleigh [1]

Cancelando el área, se tiene la expresión dada por la ecuación (2.119):

$$p_1 - p_2 = \rho V (V_2 - V_1) = G (V_2 - V_1) \quad (2.119)$$

La cual puede ser escrita como se muestra en la ecuación (2.120):

$$p + GV = \text{const.} \quad (2.120)$$

Otras formas alternativas a la ecuación (2.120) son las ecuaciones (2.121a) y (2.121b):

$$p + \frac{G^2}{\rho} = \text{const.} \quad (2.121a)$$

$$p + G^2 v = \text{const.} \quad (2.121b)$$

Si se multiplica la ecuación (2.119) por el área constante se obtiene, la ecuación (2.122):

$$pA + (\rho AV)V = \text{const.} \quad (2.122)$$

Resolviendo la ecuación anterior, se obtiene la ecuación (2.123):

$$pA + \dot{m}V = \text{const.} \quad (2.123)$$

La constante en la ecuación (2.122) es llamada función impulso o función avance por varios autores. Al retornar a la ecuación (2.121b), se puede trazar una línea recta en el plano $p - v$, esta línea es llamada línea de Rayleigh y representa el flujo a una velocidad másica (G) en particular. Si el fluido es conocido, también se pueden dibujar líneas temperatura constante en el mismo diagrama. Estas líneas isotérmicas son fácilmente obtenidas asumiendo un comportamiento de gas ideal. Algunas de estas líneas se pueden observar en la figura 2.11.

Normalmente se esperarían los efectos del calentamiento simple para incrementar la temperatura y disminuir la densidad. Esto parece estar de acuerdo con un proceso que va

desde un punto 1 hasta un punto 2 como esta marcado en la figura 2.8. Si se adiciona mas calor, de desplazara mas lejos de la línea de Rayleigh y la temperatura aumentara mas. Pronto se alcanza el punto 3 donde la temperatura es un máximo.

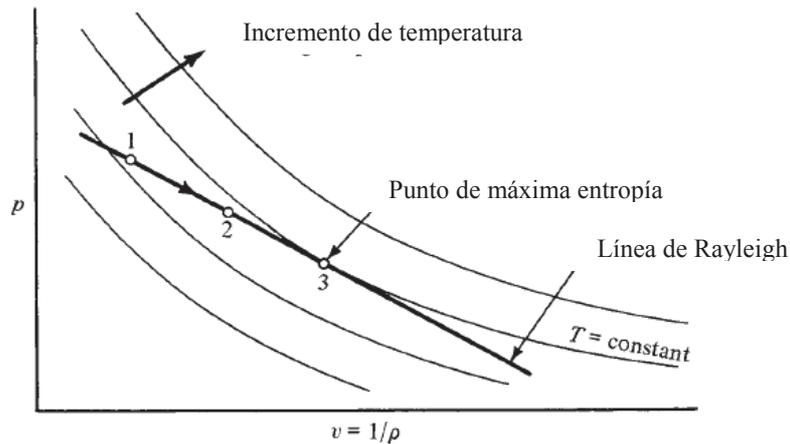


Figura 2.11 Líneas de Rayleigh [1]

Recordando que la adición de calor genera un aumento de entropía en el fluido, como se observa en la ecuación (2.124):

$$ds_e = \frac{\delta q}{T} \tag{2.124}$$

A partir de la consideración de fricción despreciable:

$$ds \approx ds_e \tag{2.125}$$

En consecuencia parece que la condición limitante real implica entropía (como es usual). Podemos seguir añadiendo calor hasta que el líquido llegue a un estado de máxima entropía. Puede ser que este punto de entropía máxima se alcanza antes el punto de temperatura máxima, en cuyo caso no sería capaz de alcanzar el punto 3 . Hay que investigar la forma de las líneas de entropía constante en el diagrama p-v. Esto puede hacerse fácilmente para el caso de un gas perfecto que servirán para ilustrar la tendencia general.

Para una T = línea constante, se cumple la igualdad mostrada por la ecuación (2.126):

$$pv = RT = const. \tag{2.126}$$

Diferenciando la ecuación (2.126), se obtiene la ecuación (2.127):

$$p dv + v dp = 0 \tag{2.127}$$

Así, la ecuación anterior queda expresada en la ecuación (2.128):

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{p}{v} \tag{2.128}$$

La ecuación (2.129) representa, un línea para S = constante:

$$pv^k = const. \tag{2.129}$$

Diferenciando, la ecuación anterior se obtiene la ecuación (2.130):

$$v^k dp + p k v^{k-1} dv = 0 \tag{2.130}$$

Luego, de resolver y aplicar antilogaritmo, se obtiene la ecuación (2.131):

$$\frac{dp}{dv} = -k \frac{p}{v} \tag{2.131}$$

Comparando las ecuaciones (2.127) y (2.130) y señalando que (k) es siempre mayor a 1.0, se observa que la línea isoentrópico tiene mayor inclinación negativa por lo tanto estas líneas serán como se muestra en la figura 2.12.

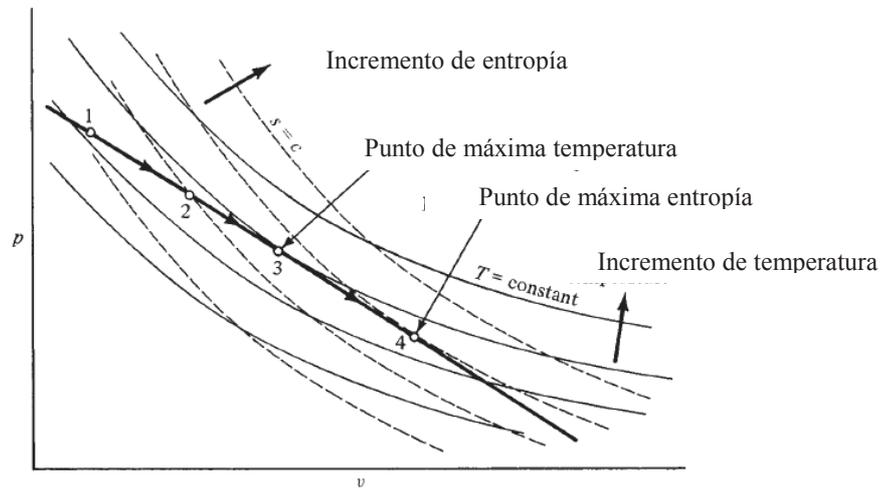


Figura 2.12 Líneas de Rayleigh en función del volumen específico [1]

Ahora se observa que no sólo se puede llegar al punto de temperatura máxima, pero al agregar más calor se puede avanzar más allá de este punto. Si se desea, se puede mover

(por calentamiento) todo el camino hasta el punto de máxima entropía. Puede parecer extraño que en la región desde el punto 3 a 4, se añade calor al sistema y disminuye su temperatura, como se conoce los efectos de la adición de calor normalmente se considera como causante de la densidad del fluido a disminuir. Esto requiere que la velocidad aumente, ya $\rho V = \text{constante}$ por la continuidad. Este aumento de la velocidad automáticamente aumenta la energía cinética del fluido por una cierta cantidad. Así, la cadena de acontecimientos causados por la adición de calor obliga a un claro aumento en la energía cinética. Parte del calor que se añade al sistema se convierte en este aumento en la energía cinética del fluido, con la energía de calor en exceso de esta cantidad que está disponible para aumentar la entalpía del fluido.

Como se observa la energía cinética es proporcional al cuadrado de la velocidad, a medida que se alcanzan velocidades más altas, la adición de más calor está acompañada por incrementos mucho mayores en energía cinética. Finalmente, se llega a un punto en el que toda la energía de calor añadido se requiere para el aumento de energía cinética. En este punto no hay energía de calor sobrante y el sistema está en un punto de entalpía máxima (temperatura máxima para un gas ideal). Posterior adición de calor hace que la energía cinética aumente en una cantidad mayor que la energía calorífica que se agrega. Así, a partir de este momento, la entalpía debe disminuir para proporcionar el balance energético adecuado.

Tal vez la discusión anterior sería más clara si las líneas de Rayleigh se trazan en el plano H-s. Para cualquier fluido dado esto podría fácilmente ser hecho, y el resultado típico se muestra en la Figura 2.13, junto con las líneas de presión constante.

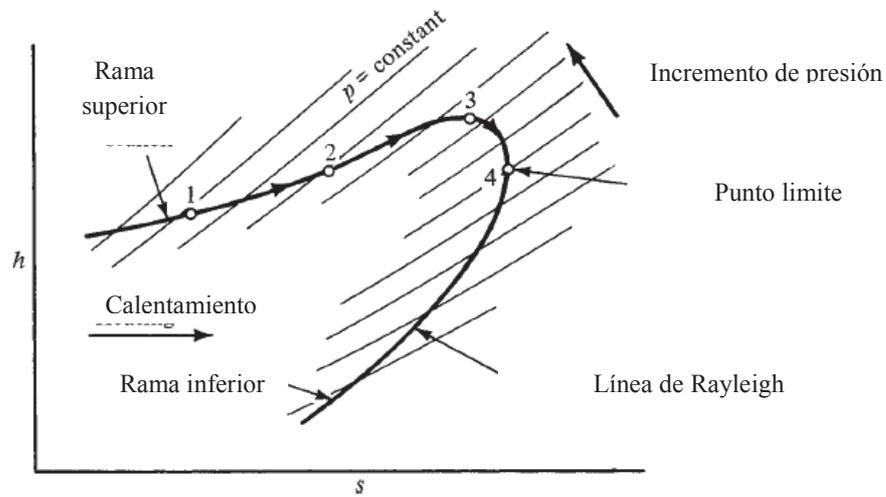


Figura 2.13 Líneas de Rayleigh en función de la entropía [1]

Todos los puntos en esta línea de Rayleigh representan estados con el mismo flujo másico por unidad de área y la misma función impulso. Por adición de calor, la entropía debe incrementar y el flujo moverse a la izquierda. Así esto aparece en la línea de Rayleigh, como en la línea de Fanno, es dividida en dos distintas ramas que son separadas por un punto límite de máxima entropía.

2.6.4 Punto Límite.

Se iniciara con la ecuación de Rayleigh en la forma dada por la ecuación (2.120a):

$$p + \frac{G^2}{\rho} = const. \quad (2.120a)$$

Diferenciando se obtiene la ecuación (2.132):

$$dp + G^2 \left(-\frac{d\rho}{\rho^2} \right) = 0 \quad (2.132)$$

Al introducir la ecuación (2.114), se obtiene la ecuación (2.133):

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{G^2}{\rho^2} = V^2 \quad (2.133)$$

Así se tiene la ecuación (2.134), la cual corresponde para un fluido arbitrario:

$$V^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (2.134)$$

La cual es válida para cualquier lugar a largo de la línea de Rayleigh. Ahora para un diferencial de movimiento en el punto límite de máxima entropía, ($ds = 0$) o ($s = \text{const.}$). Así, en este punto la ecuación (2.134) queda, de la forma de la ecuación (2.135):

$$V^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=c} \quad (\text{en el punto límite}) \quad (2.135)$$

Esto es inmediatamente reconocido como velocidad del sonido. La rama superior de la línea de Rayleigh, donde la variación de las propiedades parece razonable, se ve que es una región de flujo subsónico y la rama inferior es de flujo supersónico. Una vez más se observa que lo sucedido en flujo supersónico es contrario al comportamiento esperado.

Otro dato interesante que se puede demostrar en el punto límite. De la ecuación (2.133) se tiene la ecuación (2.136):

$$dp = V^2 d\rho \quad (2.136)$$

Diferenciando la ecuación (2.116), se obtiene la ecuación (2.137):

$$d\rho = -\rho \frac{dV}{V} \quad (2.137)$$

Combinando las ecuaciones (2.135) y (2.136), se obtiene, la ecuación (2.138):

$$dp = -\rho V dV \quad (2.138)$$

Esa puede ser introducida en la ecuación (2.139):

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (2.139)$$

Como resultado final se obtiene, la ecuación (2.140):

$$T ds = dh + V dV \quad (2.140)$$

En punto límite donde ($M = 1$), ($ds = 0$), y la ecuación (2.140) se convierte, en la ecuación (2.141):

$$0 = dh + V dV \quad (\text{en el punto límite}) \quad (2.141)$$

Si se desprecia la energía potencial, la definición de entalpía de estancamiento, en la ecuación anterior:

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \tag{2.77}$$

La cual se diferencia, y se obtiene la ecuación (2.142):

$$dh_0 = dh + VdV \tag{2.142}$$

Por lo tanto comparando las ecuaciones (2.140) y (2.141), se observa que la ecuación (2.140) en realidad expresa es lo mostrado por la ecuación (2.143):

$$dh_0 = 0 \quad (\text{en el punto límite}) \tag{2.143}$$

Y así el punto límite es señalado a ser el punto de máxima entalpía de estancamiento. Esto es fácilmente confirmado observando la ecuación (2.116). La entalpía de estancamiento incrementa a medida que el calor es agregado. En el punto de máxima entropía, no se puede agregar más calor y así (h_0) será máxima en este punto.

La figura 2.14 muestra la línea de Rayleigh (la cual representa el lugar de los estados estáticos) junto con las correspondientes líneas de estancamiento. Como se recuerda para un gas ideal el diagrama $h - s$ es equivalente al diagrama $T - s$. se observa que hay dos curvas de estancamiento, una para el flujo subsónico y la otra para el supersónico. Para saber como la curva de estancamiento para régimen supersónico es la superior, se inicia mostrando la forma diferencial de la ecuación de energía, dada por la ecuación (2.144):

$$\delta q = dh_0 \tag{2.144}$$

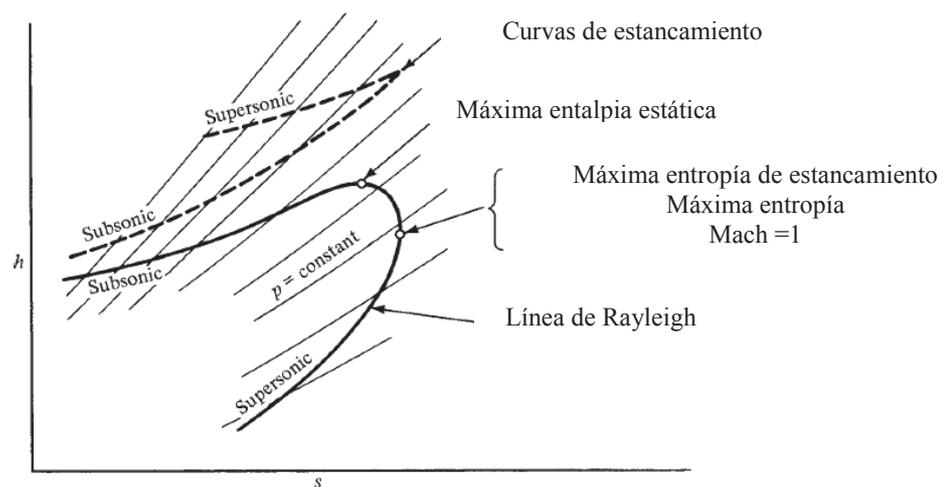


Figura 2.14 Línea de Rayleigh en función de la entropía [1]

A partir de, la ecuación (2.145):

$$\delta q = T ds_e \quad (2.145)$$

Y conociendo la condición de entropía, dada por la ecuación (2.126):

$$ds \approx ds_e \quad (2.126)$$

Se tiene que para el Flujo de Rayleigh, la entalpía viene dada por la ecuación (2.146):

$$dh_0 = T ds_e = T ds \quad (2.146)$$

Otra forma de escribir la ecuación anterior se observa en la ecuación (2.147):

$$\frac{dh_0}{ds} = T \quad (2.147)$$

Se observa que la ecuación (2.146) da la pendiente de la curva de estancamiento en términos de la temperatura estática. Ahora al dibujar una línea de entropía constante en la figura 2.15. Esta línea atravesará la rama subsónica de la línea de Rayleigh (estática) a una temperatura mayor que si cruzase la rama supersónica. Consecuentemente, la pendiente de referencia de la curva subsónica de estancamiento será mayor que la curva de estancamiento supersónica. Dado que ambas curvas de estancamiento deben unirse en el punto de máxima entropía, esto significa que la curva de estancamiento supersónico es una curva separada situada por encima de la subsónica.

2.6.5 Ecuaciones de gobierno para gases ideales.

Recordemos que se puede avanzar a lo largo de la línea de Rayleigh en cualquier dirección, dependiendo de si el calor está siendo removido o adicionado al sistema. Ahora se procede a desarrollar relaciones entre las propiedades en secciones arbitrarias. Recordando que se desea estas ecuaciones de gobierno para ser expresadas en términos del número de mach y la razón de calores específicos. Para obtener relaciones explícitas, se asume que el fluido es un gas ideal.

2.6.5.1 Momento.

Se parte de la ecuación de momento, dada por la ecuación (2.119):

$$p + \rho V^2 = \text{const.} \quad (2.119)$$

Lo anterior puede ser escrito como se observa en la ecuación (2.148):

$$p + \rho V^2 = \text{const.} \quad (2.148)$$

Substituyendo la densidad de la ecuación de estado, como se observa en la ecuación (2.149):

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (2.149)$$

Y para la velocidad de las ecuaciones (2.20) y (2.17), resulta la ecuación (2.150):

$$V^2 = M^2 c^2 = M^2 kRT \quad (2.150)$$

Ahora la ecuación (2.147) se transforma en la ecuación (2.151):

$$p(1 + kM^2) = \text{const.} \quad (2.151)$$

Si se aplica esta ecuación entre dos puntos arbitrarios, resulta la ecuación (2.152):

$$p_1(1 + kM_1^2) = p_2(1 + kM_2^2) \quad (2.152)$$

La cual puede ser escrita como, se observa en la ecuación (2.153):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \quad (2.153)$$

2.6.5.2 Continuidad.

Recordando, la expresión de continuidad dada por la ecuación (2.154):

$$\rho V = G = \text{const.} \quad (2.154)$$

Igualmente, si se introduce la ecuación de estado para un gas perfecto junto con la definición de número de Mach y la velocidad del sonido la ecuación (2.154) puede ser expresada como, lo muestra la ecuación (2.155):

$$\frac{pM}{\sqrt{T}} = \text{const.} \quad (2.155)$$

Escrita entre dos puntos arbitrarios, resulta la ecuación (2.156):

$$\frac{p_1 M_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2 M_2}{\sqrt{T_2}} \quad (2.156)$$

La cual puede ser resulta para las razones de temperatura, como se observa en la ecuación (2.157):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2^2 M_2^2}{p_1^2 M_1^2} \quad (2.157)$$

Al introducir la razón de presiones de la ecuación (2.152), resulta la ecuación (2.158) de trabajo para temperatura estática:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right)^2 \frac{M_2^2}{M_1^2} \quad (2.158)$$

La relación de densidades puede ser fácilmente obtenida de las ecuaciones (2.153) y (2.157) y de la ecuación de estado para un gas perfecto, obteniéndose la ecuación (2.159):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1^2}{M_2^2} \left(\frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2} \right) \quad (2.159)$$

2.6.5.3 Condiciones de estancamiento.

Este es el primer caso en el que se estudia un fluido en el cual la entalpía de estancamiento no permanece constante. Así que se debe buscar una razón de temperaturas de estancamiento para usar con gases ideales. A partir de la relación de temperaturas dada por la ecuación (2.31):

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \quad (2.31)$$

Si se escribe esto para cada ubicación y se divide una ecuación entre la otra, se obtendría la ecuación (2.160):

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_2^2}{1 + [(k-1)/2]M_1^2} \right) \quad (2.160)$$

Como ya se tiene una solución para la razón de temperaturas estáticas, lo anterior puede ser escrito como se muestra en la ecuación (2.161):

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right)^2 \frac{M_2^2}{M_1^2} \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_2^2}{1 + [(k-1)/2]M_1^2} \right) \quad (2.161)$$

De igual forma se puede obtener la expresión para la razón de presiones de estancamiento:

$$p_0 = p \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.34)$$

Obteniéndose la ecuación (2.162):

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_2^2}{1 + [(k-1)/2]M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.162)$$

Substituyendo por la razón de presiones de la ecuación (2.152), se obtiene la ecuación (2.163):

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \left(\frac{1 + [(k-1)/2]M_2^2}{1 + [(k-1)/2]M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.163)$$

2.6.5.4 Energía.

Recordando, el balance de energía, en la ecuación (2.116) y teniendo en cuenta que para un gas ideal, la entalpía viene dada por la ecuación (2.164):

$$h = c_p T \quad (2.164)$$

La cual también es aplicable a condiciones de estancamiento, como se muestra en la ecuación (2.165):

$$h_0 = c_p T_0 \quad (2.165)$$

Así la ecuación de energía puede ser escrita como, lo muestra la ecuación (2.166):

$$c_p T_{01} + q = c_p T_{02} \quad (2.166)$$

Despejando el calor de la ecuación anterior queda la ecuación (2.167):

$$q = c_p (T_{02} - T_{01}) \quad (2.167)$$

Una acotación importante esta dada por la ecuación (2.168):

$$q = c_p \Delta T_0 \neq c_p \Delta T \quad (2.168)$$

En todos los hechos anteriormente mencionados no sólo se ha introducido la ecuación de estado para un gas perfecto, sino también se han hecho habitual la suposición de calores específicos constantes. En algunos casos donde las tasas de transferencia de calor son extremadamente altas y el resultado son grandes cambios de temperatura, (cp) puede variar

suficiente para garantizar el uso de un valor medio de (c_p) . Si, además, variaciones significativas ocurren con (k) , será necesario volver a las ecuaciones básicas y derivar nuevas relaciones de trabajo mediante el tratamiento de (k) como una variable.

Luego de analizar el flujo estable unidimensional en un ducto de área constante con transferencia de calor pero con fricción despreciable. Las propiedades del fluido pueden variar de diferentes formas dependiendo del régimen de flujo (subsónico o supersónico) además de la dirección de la transferencia de calor. Estas variaciones están expresadas en la tabla 2.3. La variación de las propiedades que ocurren flujo de Rayleigh subsónico sigue un patrón intuitivo, siendo para flujo supersónico un tanto diferente. Se observa que en la ausencia fricción, el calentamiento genera que la presión de estancamiento baje, del otro lado un proceso de enfriamiento predice un incremento en la misma. Esto es difícil de lograr en la práctica debido a la presencia de efectos de la fricción que están inevitablemente presentes.

Tabla 2.3 Variación de las propiedades para flujo de Rayleigh [1]

Propiedad	Calentamiento		Enfriamiento	
	M < 1	M > 1	M < 1	M > 1
Velocidad	Incrementa	Disminuye	Disminuye	Incrementa
Número de Mach	Incrementa	Disminuye	Disminuye	Incrementa
Entalpía	Incrementa/ Disminuye	Incrementa	Incrementa/ Disminuye	Disminuye
Entalpía de estancamiento	Incrementa	Incrementa	Disminuye	Disminuye
Presión	Disminuye	Incrementa	Incrementa	Disminuye
Densidad	Disminuye	Incrementa	Incrementa	Disminuye
Entropía	Incrementa	Incrementa	Disminuye	Disminuye

2.7 Dinámica de fluidos computacional [2].

La historia de la dinámica de fluidos computacional, abreviado CFD en inglés, se inicia en los años 60. CFD es un sinónimo de combinación de física, métodos numéricos e informática cuyo objetivo es la resolución de flujos. Por ello, el desarrollo del CFD es desencadenado por los progresos realizados en la tecnología informática y todavía hoy en día su avance está ligado a los progresos en ese campo.

A mediados de los años 80, el interés del CFD comienza a centrarse en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos viscosos. Junto a este interés aparecen modelos

numéricos para la resolución de flujos turbulentos como el *Direct Numerical Simulation* (DNS) y el *Large Eddy Simulation* (LES), aunque todavía se está muy lejos de las aplicaciones en el campo de la ingeniería.

Posteriormente, la demanda de soluciones para casos con geometrías complejas hace que el desarrollo del CFD se vea acompañado no sólo por la aparición de nuevas de métodos numéricos y modelos de turbulencia, como el modelo k- ϵ , sino también por nuevas técnicas para la generación de los mallados de la geometría.

Una problemática que se encuentran los ingenieros en la fase de diseño es el trabajo con información empírica ya que está muy limitada para ciertos rangos de velocidad, temperatura y dimensiones, de forma que para un rango diferente, es necesario recurrir a la experimentación en laboratorio además de hacer uso de una experiencia que no siempre existe. Los códigos de resolución de CFD suponen una herramienta de diseño que ofrece exactitud científica al mismo tiempo que un costo en dinero y en tiempo inferior al de la experimentación.

Actualmente, la investigación en CFD se centra fundamentalmente en modelización de la combustión y la turbulencia. Además, los procesos de cambio de fase como puede ser la condensación del vapor de agua en turbinas son también una problemática importante a resolver. Las soluciones de los códigos de CFD se aplican en campos como la aeronáutica, las turbomáquinas, la meteorología e incluso la medicina.

No obstante, no es una disciplina tan madura como pueden ser los Elementos Finitos para la resolución de problemas de estructuras y su interacción con otras disciplinas como la Transferencia de Calor requiere todavía una profunda investigación.

2.7.1 Tipos de mallado empleados en los códigos CFD.

El objetivo de un código de CFD es la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo con unas características determinadas y para una geometría concreta. El código de CFD resuelve dichas ecuaciones en una serie de puntos de la geometría en cuestión mediante métodos numéricos que transforman las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, proceso que se denomina *discretización espacial*. Por tanto, el primer paso que se da en la resolución de las ecuaciones es la selección de los puntos en los que se llevará a cabo la discretización, proceso que se denomina *generación del mallado*.

Seleccionados los puntos, se unen mediante líneas dando lugar a lo que se denominan celdas que pueden tener forma de triángulos y cuadriláteros en el caso de dominios bidimensionales y de tetraedros, hexaedros, prismas y pirámides en el caso de dominios tridimensionales. El mallado generado puede ser de dos tipos según los ejes coordenados que utilice:

2.7.1.1 Mallado body-fitted.

Donde los puntos del mallado coinciden con la frontera física. En la figura 2.15 se observa este tipo de mallado

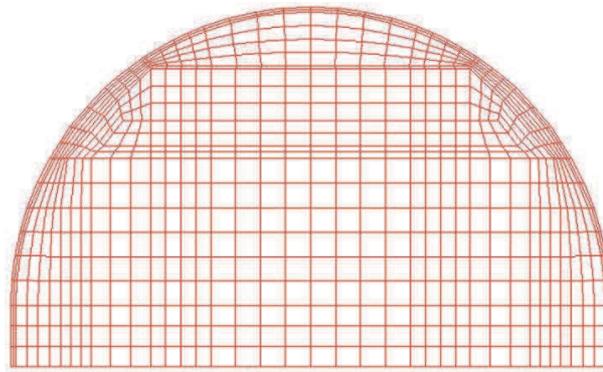


Figura 2.15 Mallado "Body-Fitted"[3]

2.7.1.2 Mallado en coordenadas cartesianas.

Donde las líneas del mallado son paralelas a los ejes cartesianos, independientemente de la forma de la frontera física. En la figura 2.16 se observa este tipo de mallado

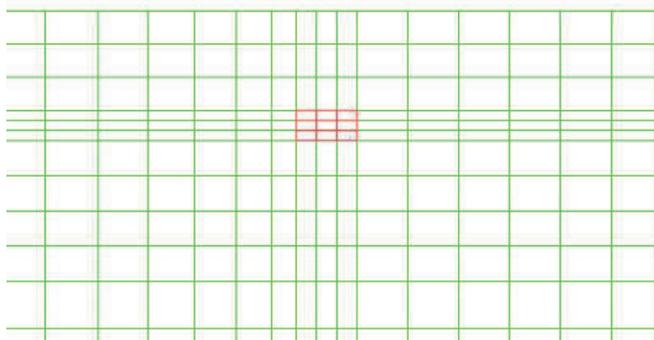


Figura 2.16 Mallado en Coordenadas Cartesianas [3]

La principal ventaja del mallado body-fitted es que permite soluciones muy exactas del flujo cerca de la frontera en el caso de geometrías muy complicadas a pesar de que requiere técnicas de construcción muy complejas. Por el contrario, el mallado en coordenadas cartesianas si bien se construye muy fácilmente, es aplicable únicamente a geometrías muy sencillas. Su principal ventaja es la simplicidad en la construcción del mallado además de una mayor simplicidad en la resolución del flujo, aunque es aplicable solamente en el caso de geometrías muy sencillas ya que no permite un buen tratamiento de las condiciones de frontera. Por tanto, debido a las importantes limitaciones de los mallados cartesianos, es el mallado body-fitted el más usado dentro del mundo de la industria, donde abundan geometrías y condiciones de contorno muy complejas.

Como se comentó anteriormente, la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes se realiza según lo que se conoce como discretización. Las diferentes técnicas de discretización requieren siempre uno de los siguientes tipos de mallado:

2.7.1.3 Mallado estructurado.

Cada punto del mallado se identifica de manera exclusiva con los índices i, j, k del sistema de coordenadas cartesianas. Las celdas serán cuadriláteros en el caso de 2D y hexaedros en el caso de 3D.

2.7.1.4 Mallado no-estructurado.

Ni las celdas ni los nodos del mallado siguen un orden particular, es decir, las celdas vecinas no pueden identificarse por sus índices cartesianos (por ejemplo, la celda 6 estaría junto a la celda 128). Las celdas serán triángulos y cuadriláteros en el caso de 2D y tetraedros, prismas, hexaedros y pirámides en el caso de 3D.

El mallado estructurado ofrece su mayor ventaja en el menor coste computacional que presenta dado que a la posición de memoria en que se almacena la información correspondiente a un nodo le sigue la información correspondiente al nodo adyacente, lo que permite una mayor rapidez en la realización del cálculo. No obstante, este tipo de mallado no es muy sencillo adaptarlo a geometrías complejas. Sin embargo, existe una solución que permite en geometrías complejas aprovechar la gran ventaja del mallado estructurado y que se denomina *mallado en multibloques*. Este mallado consiste dividir en la geometría en diferentes bloques, cada uno de ellos con una finura de mallado según las

exigencias; así, los bloques más próximos a la frontera tendrán mallados muy finos mientras que los bloques más alejados tendrán mallados menos finos. Sin embargo, ofrece la desventaja de requerir un código más complejo ya que será necesario pasar la información de los nodos de un bloque a los nodos de otro bloque diferente.

A su vez, los mallados estructurados multibloques pueden ser *conformes* o *no conformes*.

Los mallados no-conformes son aquellos en los que los nodos de un bloque no tienen por qué coincidir con los nodos de otro bloque adyacente, por lo que el número de líneas de los bloques no tienen por qué ser iguales añadiendo mayor flexibilidad al mallado en multibloques. No obstante, también será requerido un mayor tiempo en la elaboración del mallado.

Respecto al mallado no estructurado, su ventaja principal es la posibilidad de la realización de un mallado automático por lo que es muy recomendable para casos de geometrías muy complejas. Además, el tiempo necesario para construir este tipo de mallados es considerablemente inferior al necesario para construir un mallado estructurado en multibloques. No obstante, dada la forma de almacenar la información en memoria, se requieren computadoras con mejores características que las que se podrían utilizar en un mallado estructurado o bien un mayor tiempo de cálculo.

En el mundo de la industria, la elección de un mallado adecuado es fundamental a la hora de obtener una solución lo más exacta posible y sobre todo, en términos de ahorro de tiempo, ya que no sólo importa el tiempo empleado en la construcción del mallado sino también el tiempo necesario para realizar el cálculo que como hemos visto depende de forma importante del tipo de mallado seleccionado. Actualmente, la mayor parte de los códigos emplean bien mallados no-estructurados o bien mallados híbridos que utilizan elementos rectangulares en 2D y hexaédricos en 3D y suponen una buena solución de compromiso entre exactitud, rapidez y requerimientos para la computadora.

En el presente proyecto, los mallados empleados en todas las salas han sido mallados no-estructurados con elementos hexaédricos. Se podría haber elegido también un mallado estructurado de un solo bloque pero la solución ofrecería poca exactitud en determinadas zonas del dominio como pueden ser las entradas/salidas de aire. Otra posibilidad sería un

mallado estructurado multibloques pero la geometría es relativamente compleja por lo que el mallado se realiza más rápidamente mediante el mallado no-estructurado. Por último, las características de las computadoras permitían desarrollar el cálculo en un tiempo dentro de lo habitual a pesar de que el mallado no estructurado requiere tiempos de computación mayores que para un mallado estructurado.

2.7.2 Discretización de Ecuaciones.

2.7.2.1 Método de los volúmenes finitos.

El método de los volúmenes finitos emplea directamente las ecuaciones de conservación en su forma integral. Este método fue utilizado por primera vez por McDonald para la simulación de un problema 2-D no viscoso.

Este método discretiza las ecuaciones en cada uno de los poliedros del dominio, en los que previamente se realiza una discretización espacial. La integral de superficie que aparece en el término de la derecha de la ecuación de Navier-Stokes completa (en su forma integral) es aproximada por la suma de los flujos que atraviesan cada una de caras del poliedro.

La principal ventaja del método de los volúmenes finitos es que la discretización espacial se lleva a cabo directamente en el espacio físico del problema. Por lo tanto, no hay problemas con la transformación entre sistemas de coordenadas, como ocurre en el método de las diferencias finitas.

Comparado con el método de las diferencias finitas, este método es muchísimo más flexible (puede implementarse en mallas estructuradas y no estructuradas); por este motivo, el método de los volúmenes finitos es el más empleado para la resolución de flujos con geometrías complejas. El método de los volúmenes finitos se basa en la discretización directa de las ecuaciones de conservación de la masa, cantidad de movimiento y la energía. Esto lleva a otra característica importante de este método, que es la obtención de soluciones "débiles" de las ecuaciones. Sin embargo, en este caso, en las ecuaciones de Euler, es necesario añadir una ecuación más, llamada ecuación de la entropía. Es interesante resaltar que bajo unas ciertas condiciones, el método de los volúmenes finitos es equivalente al método de las diferencias finitas. Por todo esto, hoy en día, es el método más popular.

2.7.2.2 Método de los elementos finitos.

El método de los elementos finitos, introducido por Tener, en 1956, se empleó en principio, para el análisis estructural y fue diez años después cuando comenzó su utilización para la resolución de las ecuaciones de campo en medios continuos. Sin embargo, fue a principios de los 90 cuando el método de los volúmenes finitos adquirió una gran popularidad en la solución de las ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes. El método de los elementos finitos, como método general para la resolución de las ecuaciones de Euler/Navier-Stokes, comienza con una división del dominio en elementos triangulares (en 2-D) o tetraédricos (en 3-D), generando una malla no estructurada. Dependiendo del tipo de elemento y de la precisión que se quiera, se tendrá que definir una malla más o menos fina de elementos. El número total de nodos multiplicado por el número de variables del problema es el número de grados de libertad del problema.

Además, tienen que definirse las llamadas funciones de forma que representan la variación de la solución en el interior de los elementos. En la práctica, se emplean normalmente funciones de forma lineales, que emplean únicamente los nodos pertenecientes a la malla. Las funciones de forma son distribuciones lineales de valor cero fuera del elemento correspondiente a la función. Esto da lugar, a una aproximación de segundo orden en la representación de los resultados.

Este método resulta muy atractivo por el uso de mallas no estructuradas (ampliamente empleadas para la formulación de problemas con geometrías complejas). Además es empleado para el caso particular de fluidos no newtonianos. El método de los elementos finitos tiene una base matemática muy rígida, particularmente en problemas elípticos y parabólicos. Sin embargo, en ciertos casos, el método es matemáticamente equivalente al método de los volúmenes finitos, siendo el esfuerzo matemático mucho mayor. Esto explica por qué el método de los volúmenes finitos se ha hecho tan popular. Sin embargo, ambos métodos se combinan en ocasiones (normalmente en mallas estructuradas), como por ejemplo para el tratamiento de las condiciones de contorno y la discretización.

2.8 Modelos de turbulencia [3].

Una propuesta sugiere que la turbulencia consiste en pequeños “remolinos” los cuales se forman y disipan continuamente, y en los cuales el valor de Reynolds es asumido

proporcional a los gradientes de velocidad. Esto define a un “modelo de viscosidad Turbulenta”

La hipótesis de viscosidad turbulenta asume que el valor de Reynolds puede ser relacionado con los gradientes de velocidad media y la viscosidad de torbellinos (turbulenta) a través de la hipótesis del gradiente de difusión, de una forma análoga la relación entre los esfuerzos y los tensores de deformación en un flujo laminar Newtoniano, viene dado por la ecuación (2.169):

$$-\rho \overline{u_i u_j} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\rho k + \mu_t \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.169)$$

Donde (μ_t) es la viscosidad turbulenta.

Análogamente a la hipótesis de la viscosidad turbulenta esta la hipótesis de la difusividad turbulenta la cual establece que los flujos de Reynolds son un escalar lineal esta relacionado con el escalar de la velocidad promedio, como se muestra en la ecuación (2.170):

$$-\rho \overline{u_i \phi} = \Gamma_t \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (2.170)$$

Donde (Γ_t) es la difusividad turbulenta. La difusividad turbulenta puede ser escrita igualmente como, se muestra en la ecuación (2.171):

$$\Gamma_t = \frac{\mu_t}{Pr_t} \quad (2.171)$$

Las ecuaciones anteriores pueden expresar las variaciones de turbulencia en términos del valor promedio de las variables solo si se conoce la viscosidad turbulenta (μ_t). Tanto los modelos ($k - \epsilon$) como ($k - \omega$) usan esta variable. De acuerdo a esta hipótesis, el momento promedio de Reynolds y la ecuación de transporte vendrían dados por la ecuación (2.172):

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + S_M \quad (2.172)$$

Donde (S_M) es la suma de las fuerzas en cuerpo y, (μ_{eff}) es la viscosidad efectiva definida por a ecuación (2.173):

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t \quad (2.173)$$

Y (p') es la presión modificada definida por la ecuación (2.174):

$$p' = p + \frac{2}{3}\rho k + \frac{2}{3}\mu_{eff} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \quad (2.174)$$

2.8.1 Modelo de turbulencia $k - \varepsilon$.

K es la energía cinética de turbulencia y esta definida como la varianza en de las fluctuaciones de velocidad. Y tiene dimensiones de (longitud², tiempo²) por ejemplo (m²/s²). (ε) es la disipación turbulenta (la razón a la cual las variaciones de velocidad desaparecen), y tiene dimensiones de (k) por unidad de tiempo (longitud², tiempo³), por ejemplo (m²/s³). El modelo (k- ε) introduce dos nuevas variables en el sistema de ecuaciones. Entonces la ecuación de continuidad quedaría, como la ecuación (2.175):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j) = 0 \quad (2.175)$$

Y la expresión de momento dada por la ecuación (2.176):

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + S_M \quad (2.176)$$

Donde (S_M) es la suma de las fuerzas en cuerpo y, (μ_{eff}) es la viscosidad efectiva y (p') es la presión modificada cuya expresión es la ecuación (2.171). El modelo (k- ε) asume que la viscosidad turbulenta esta asociada a la energía cinética turbulenta mediante la ecuación (2.117):

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.177)$$

Donde (C_μ) tiene un valor de 0,09.

Los valores de (k) y (ε) son obtenidos directamente de las ecuaciones diferenciales de transporte para la energía cinética turbulenta y la disipación turbulenta a partir de las ecuaciones (2.178) y (2.179):

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + \rho \varepsilon + P_{kb} \quad (2.178)$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon + C_{\varepsilon 1} P_{\varepsilon b}) \quad (2.179)$$

Donde ($C_{\varepsilon 1} = 1,44$), ($C_{\varepsilon 2} = 1,92$), ($\sigma_k = 1,0$) y ($\sigma_\varepsilon = 1,3$)

2.8.2 Modelo k- ω .

Una de las ventajas de la formulación (k- ω) es el tratamiento para bajos valores de Reynolds cercanos a la pared. El modelo no involucra la resolución de complejas funciones no lineales requeridas para (k- ε) es además más preciso y más robusto. El modelo (k- ω) asume que la viscosidad turbulenta esta relacionada con la energía cinética de turbulencia y la frecuencia turbulenta mediante la ecuación (2.180):

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (2.180)$$

El modelo (k- ω) presenta diversas variaciones siendo una de las más difundidas la formulación desarrollada por Wilcox, en la misma, se propone la resolución de dos ecuaciones de transporte una para la energía cinética turbulenta (k), y otra para la frecuencia turbulenta (ω). El tensor de esfuerzos es computado a partir del concepto de viscosidad turbulenta

La ecuación (2.181) representa la expresión matemática para (k):

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \beta' \rho k \omega + P_{kb} \quad (2.181)$$

La ecuación (2.182) representa la expresión matemática para (ω):

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j \omega) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 + P_{\omega b} \quad (2.182)$$

Es importante acotar que la variables independientes, la densidad (ρ), y el vector velocidad (U), son manejados como valores conocidos del método Navier – Stokes. P_k es razón de producción de turbulencia, la cual es calculada a través de la ecuación (2.183):

$$P_k = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \left(3\mu_t \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \rho k \right) \quad (2.183)$$

2.8.3 Modelo “Shear Stress Transport” (SST).

El modelo SST basado en (k- ω) es valido para el transporte de esfuerzos cortantes en régimen turbulento, además de brindar una alta precisión de la predicción del inicio y la cantidad de separación de flujo bajo gradientes de presión adversos. La propiedad de transporte de esfuerzos de corte puede ser obtenida a partir de la ecuación (2.184):

$$v_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)} \quad (2.184)$$

Donde (v_t) viene dado por la ecuación (2.185):

$$v_t = \frac{\mu_t}{\rho} \quad (2.185)$$

Siendo (F_2) una función de mezcla, la cual es un limitador que restringe la pared de la capa limite. (S) es una medida invariante de la velocidad de deformación. Las funciones de mezcla son críticas para el éxito de este método. Su formulación esta basada en la distancia entre la superficie más cercana y las variables de flujo siendo la ecuación (2.186) la que representa la función (F_1).

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (2.186)$$

Con (\arg_1) dado por la ecuación (2.187):

$$\arg_1 = \min \left(\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta' \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\rho k}{CD_{k\omega} \sigma_{\omega 2} y^2} \right) \quad (2.187)$$

Donde (y) es la distancia a la pared más cercana, (ν) es la viscosidad cinemática y ($CD_{k\omega}$) vendría dado por la ecuación (2.188):

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 1.0 \times 10^{-10} \right) \quad (2.188)$$

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2) \quad (2.189)$$

Con (\arg_2) dado por la ecuación (2.190):

$$\arg_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta' \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \quad (2.190)$$

CAPÍTULO III.

Marco Metodológico.

En este capítulo se explica lo referente a la parte metodológica del estudio, sea el tipo y nivel de investigación así como todas las configuraciones necesarias para la correcta realización de la simulación, pasando desde configuraciones con respecto a la geometría y mallado de la tobera convergente – divergente así como modelos energéticos y criterios de convergencia.

3.1 Nivel de la investigación.

El nivel de la investigación se puede establecer en cuatro tipos de investigación, las cuales son; exploratoria, descriptiva, correlacional o explicativa; esto según el libro “Metodología de la Investigación” por Hernández Sampieri et al., (2006). De acuerdo con los parámetros y variables medidas, la investigación a realizar por este estudio es del tipo descriptiva. Sampieri define la misma de la siguiente forma:

“Los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades importantes de personas, grupos, -comunidades o cualquier otro fenómeno que sea sometido a análisis (Dankhe, 1986). Miden y evalúan diversos aspectos, dimensiones o componentes del fenómeno o fenómenos a investigar. Desde el punto de vista científico, describir es medir. Esto es, en un estudio descriptivo se selecciona una serie de cuestiones y se mide cada una de ellas independientemente, para así -y valga la redundancia- describir lo que se investiga.”

De acuerdo a lo anterior se confirma que esta investigación es de carácter descriptivo ya que se busca estudiar el comportamiento del flujo compresible que pasa a través de una tobera convergente – divergente al manipular de terminadas variables y como éstas afectan el comportamiento de las mismas, todo esto mediante la aproximación a través del uso de la dinámica de fluidos computacional.

3.2 Diseño de la investigación.

Según Sabino (2000) su objeto es proporcionar un modelo de verificación que permita contrastar hechos con teorías, y su forma es la de una estrategia o plan general que determina las operaciones necesarias para hacerla. El diseño de la investigación se refiere a la manera, como se dará respuesta a las interrogantes formuladas en la investigación. Por supuesto que estas maneras están relacionadas con la definición de estrategias a seguir en la búsqueda de soluciones al problema planteado.

De tal manera que las estrategias que puede asumir un investigador son:

- a) Documental
- b) De campo

3.2.1 Investigación Documental.

Para la Universidad Santa María (2001), la investigación documental, se ocupa del estudio de problemas planteados a nivel teóricos.

Según la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (1998), la investigación Documental, es estudio de problemas con el propósito de ampliar y profundizar el conocimiento de su naturaleza, con apoyo, principalmente, en trabajos previos, información y datos divulgados por medios impresos, audiovisuales o electrónicos.

Tomando en cuenta, lo anterior, es importante destacar, que toda investigación documental debe tener, obligatoriamente, antecedentes, por lo tanto, el estudiante no debe olvidar que cuando su investigación es documental, se le ocurra decir que su investigación no tiene antecedentes.

3.2.2 Investigación de Campo.

En los diseños de campo los datos se obtienen directamente de la realidad, a través de la acción del investigador. Para la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (2001), la investigación de campo es el análisis sistemático de problemas en la realidad, con el propósito bien sea de describirlos, interpretarlos, entender su naturaleza y factores constituyentes, explicar sus causas y efectos, o predecir su ocurrencia, haciendo uso de métodos característicos de cualquiera de los paradigmas o enfoques de investigación conocidos o en desarrollo. Los datos de interés son recogidos en forma directa de la realidad; en este sentido se trata de investigaciones a partir de datos originales o primarios.

Luego de lo expuesto anteriormente se concluye que esta investigación es una investigación de campo debido a que en la misma se realizará el estudio del campo de flujo de una tobera convergente – divergente y los datos serán obtenidos mediante la implementación de un programa de dinámica de fluidos computacional que permita la recolección de datos estudiados.

Es por ello que esta investigación se dividirá en la siguientes fases: una revisión bibliográfica, selección y dibujo de la tobera a estudiar, selección de los valores de rugosidad absoluta y transferencia de calor de acuerdo a la bibliografía estudiada, selección

de los modelos matemáticos y leyes fundamentales que rigen dicho estudio, así como la configuración del dominio computacional y el análisis posterior a la obtención de los datos.

3.2.3 Fase 1: Revisión bibliográfica.

En esta fase de la investigación se realizará la ubicación de trabajos de grados, investigaciones y otro tipo de publicaciones en las cuales se realicen estudios al campo de flujo compresible a una tobera convergente – divergente y así obtener los parámetros involucrados en el estudio a realizar.

3.2.4 Fase 2: Selección de la tobera.

Se selecciona una tobera convergente – divergente del tipo real, considerando como premisa que sea un modelo real o a escala de las toberas usadas en aplicaciones específicas de propulsión para la aviación comercial o militar, dicha tobera también poseerá unos valores de rugosidad absoluta establecidos por el material del cual son elaboradas y cantidades de calor acordes al medio donde se desarrollan. El diseño de la misma se realizará mediante la ayuda de un programa CAD y su posterior procesamiento en el programa de dinámica de fluidos computacional.

3.2.5 Fase 3: Dibujo de la tobera a estudiar mediante programa CAD.

La tobera convergente – divergente a estudiar se realizará mediante el uso del programa de diseño SolidWorks™, el cual es el más indicado para el dibujo de la tobera ya que permite un modelo sencillo y eficaz de las diferentes variables medidas (áreas de entrada y salida ángulos de convergencia y divergencia). En la figura 3.1 se observa el resultado luego de dibujar la tobera. Las dimensiones observadas en la misma son tomadas a partir de modelos de toberas tomados en otras investigaciones como es el caso del estudio realizado por E. Ekanayake et al., (2010).

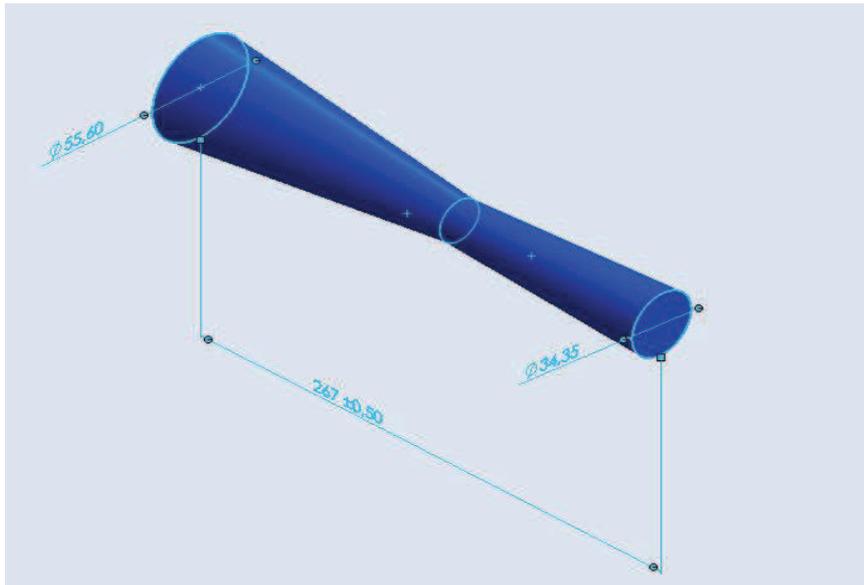


Figura 3.1 Geometría final de la tobera convergente – divergente.

3.2.6 Fase 4: Establecimiento de la geometría y mallado.

Luego de la obtención de las geometrías mediante el programa CAD la cual se importa al programa DFC, donde el mismo verificará si ésta cumple con los criterios necesarios para el correcto funcionamiento del diseño y por ende de la simulación, esto se observa en la figura 3.2.

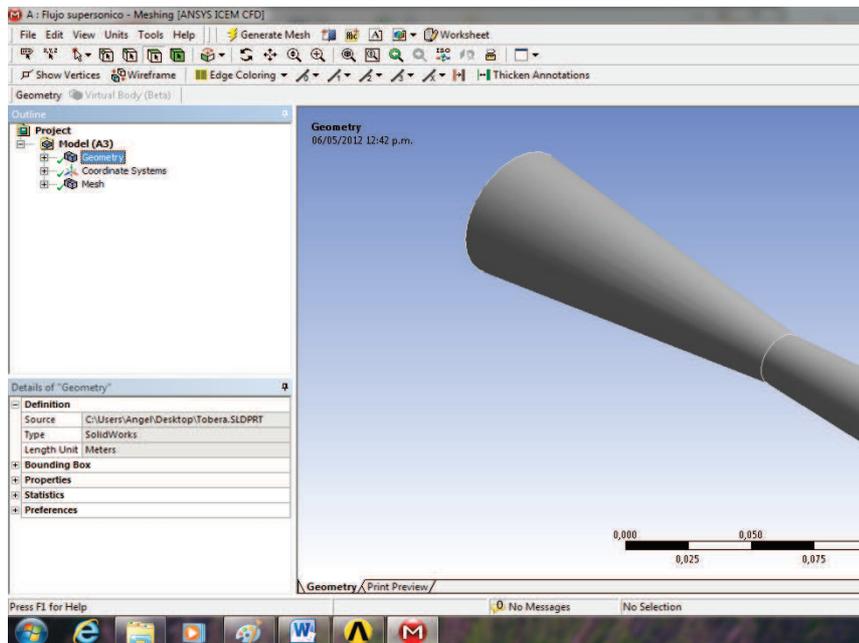


Figura 3.2 Validación de la geometría por parte del programa DFC.

Luego de esto se procederá a la realización del mallado. El programa de acuerdo a la aplicación a estudiar propone lo que sería un mallado “ideal” como punto de partida, a partir de ahí se realizarán cambios de acuerdo a la profundidad en el estudio. Este mallado ideal consiste en una mezcla de diferentes geometrías en los elementos constitutivos de la malla así como un tamaño estándar para dichos elementos.

La primera fase del mallado consiste en la selección de las superficies de entrada y salida de la tobera así como de lo que sería la pared de la misma como se muestra en la figura 3.3.

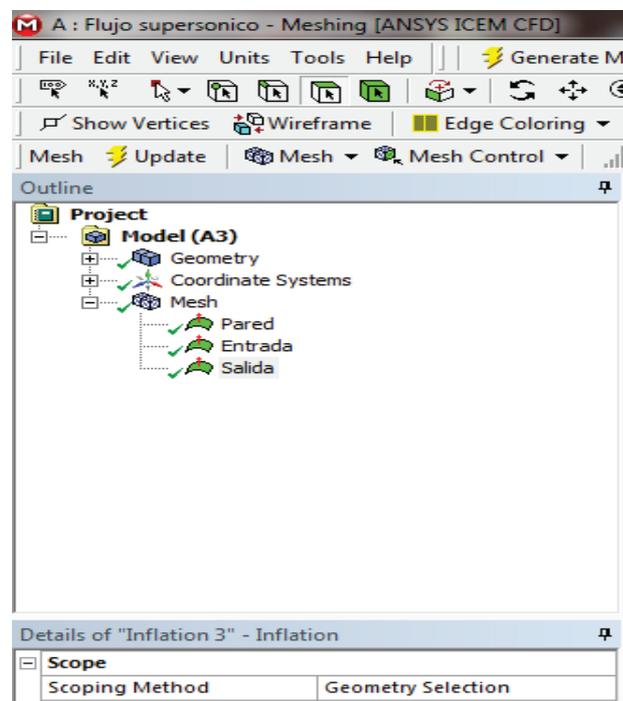


Figura 3.3 Superficies de seleccionadas para la construcción del mallado.

Luego de esto se procede a la generación del mallado “ideal”. A partir de este mallado se modifican diversos factores que de acuerdo al manual del programa son necesarios para obtener un mallado más refinado y así los resultados de la simulación sean más precisos. Estos factores van desde el tamaño del elemento de la malla hasta la calidad de los mismos. (Ver figura 3.4).

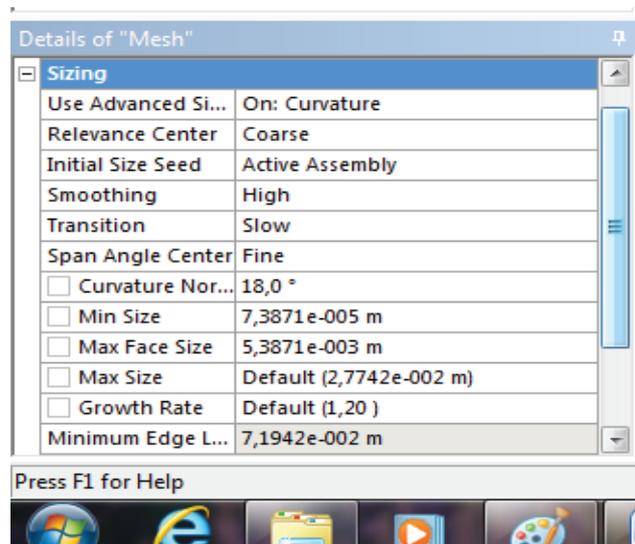


Figura 3.4 Detalles del Mallado.

Se selecciona una intensidad del mallado alta debido a que así se genera el número de elementos necesarios para una simulación correcta y precisa. El resultado de dicha selección se observa en las estadísticas del mallado que se muestran en la figura 3.5.



Figura 3.5 Estadísticas finales del mallado.

Como se observa en la figura 3.5, el número aproximado de elementos es de 27503, un número de elementos que permite una simulación efectiva y que arroje resultados precisos, se dice que este valor es correcto al tomar en cuenta otras simulaciones de diferentes investigaciones en las cuales se consideran geometrías similares y presentan un número de

elementos aproximado al generado. Luego de esto se procede a la generación del mallado, el cual puede ser apreciado en la figura 3.6.

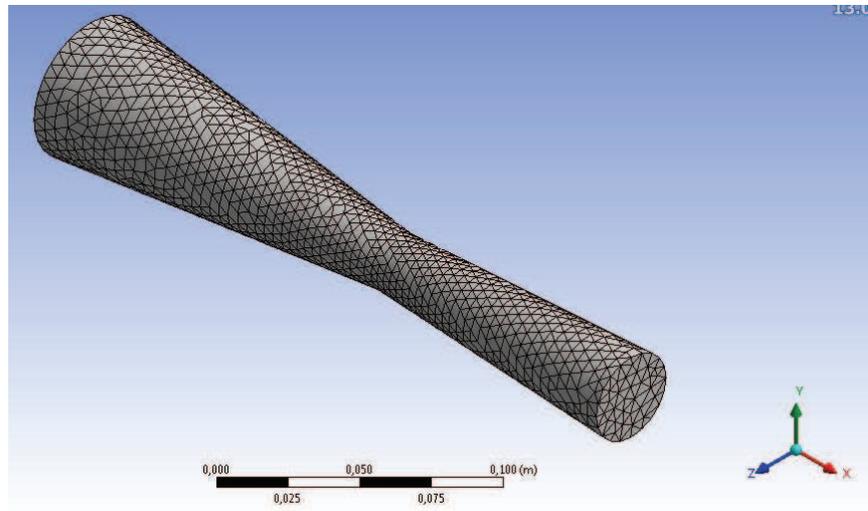


Figura 3.6 Mallado Final para el estudio.

Como se observa en la figura 3.6, es un mallado con la presencia en su mayoría de elementos tetraédricos, los cuales permiten no sólo una más fácil resolución de las ecuaciones de conservación y modelos y turbulencia sino que también permiten una correcta predicción del comportamiento de las variables a ser estudiadas.

3.2.7 Fase 5: Configuración del dominio.

En primer lugar se define cada área de la tobera (entrada, salida entre otras) así como los límites que el flujo debe tener todo esto luego de importar el mallado. Esto se realizará mediante la herramienta CFX-Pre del programa. La figura 3.7 muestra lo que sería el árbol de trabajo del programa y desde el cual se coordinará todo lo referente al dominio y otros factores de la simulación

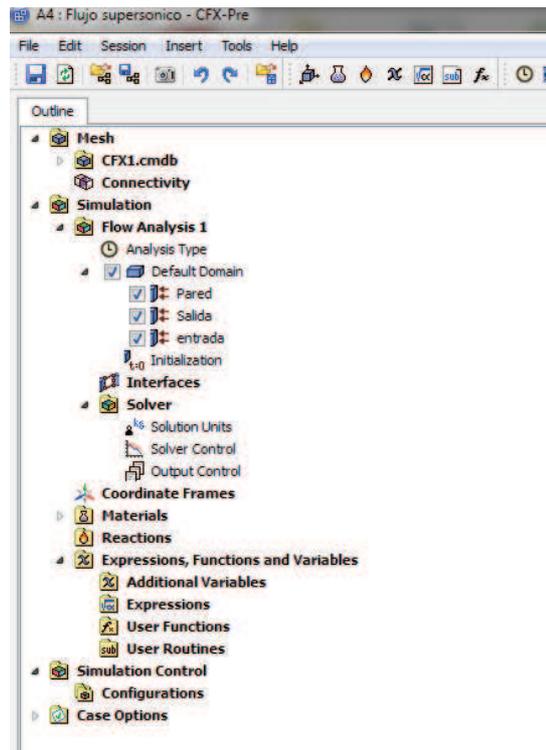


Figura 3.7 Árbol de trabajo del “CFX-Pre”.

La primera área a configurar es el área de entrada. En la figura 3.8, se observa como se define el tipo de frontera así como la ubicación en el mallado.

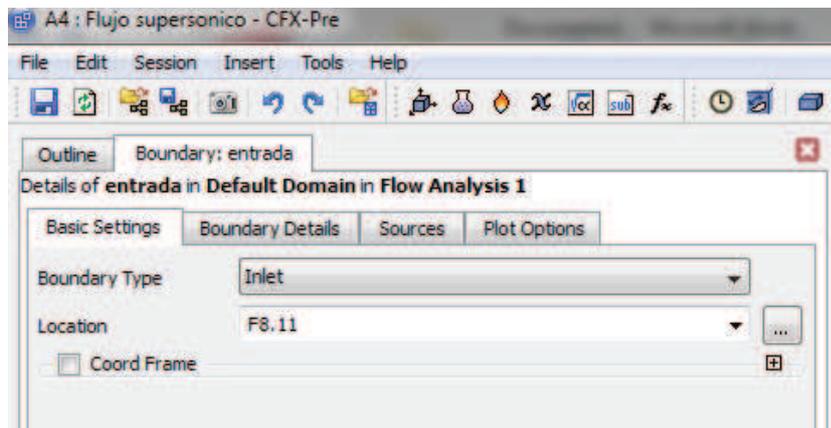


Figura 3.8 Panel de selección tipo de frontera “Entrada”.

Luego de esto se configura los detalles de frontera en ellos se especificaran la presión de entrada, dirección del flujo, modelo de turbulencia así como la temperatura y el régimen del flujo. Ver figura 3.9.

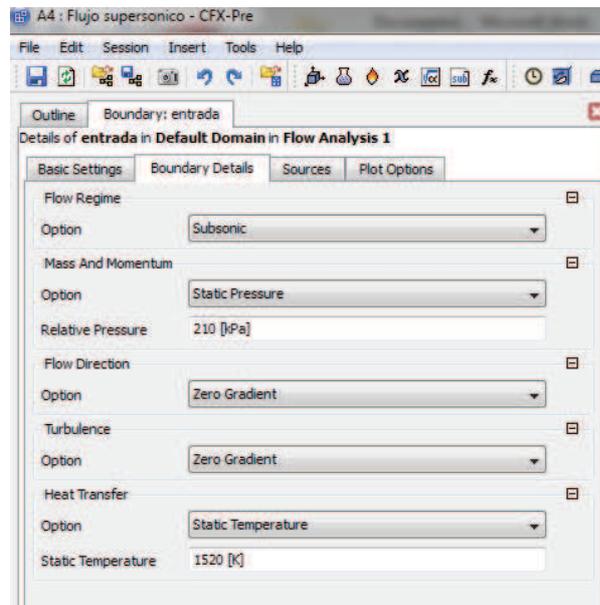


Figura 3.9 Selección de condiciones frontera “Entrada”.

A partir de aquí se realizara la misma operación para cada una de las áreas establecidas en el mallado, en este caso seria la salida de la tobera, igualmente primero se establece las el tipo de frontera y la ubicación de la misma en el mallado. Ver figura 3.10.

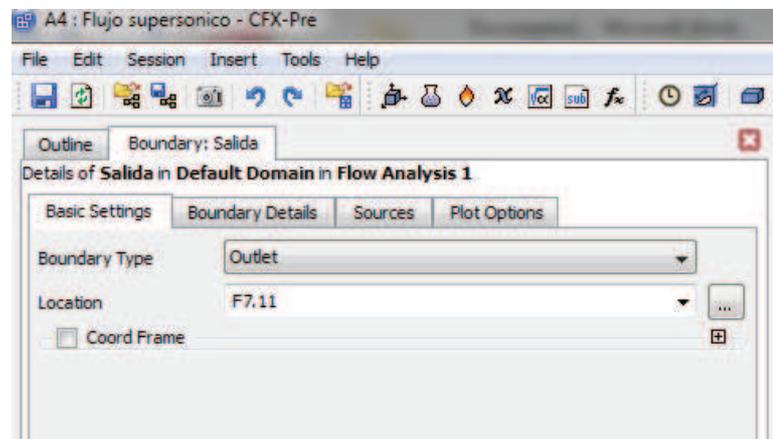


Figura 3.10 Etiqueta de selección de tipo de frontera para “salida”.

Luego se establece las condiciones de salida, al igual que en la condición de entrada se fija presión de salida dirección de flujo como se muestra en la figura 3.11.

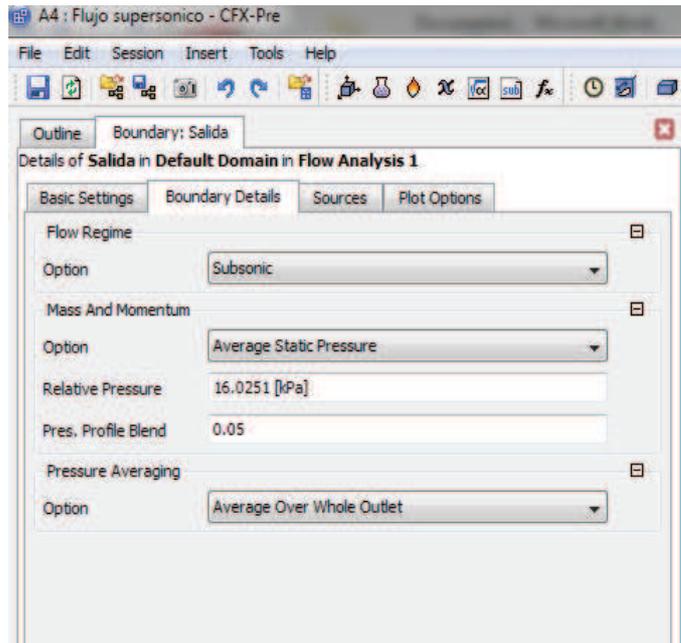


Figura 3.11 Selección de la condiciones de frontera “Salida”.

De igual manera se realiza el mismo procedimiento con el área de la pared de la tobera en la figura 3.12 se muestra el tipo de frontera y la ubicación.

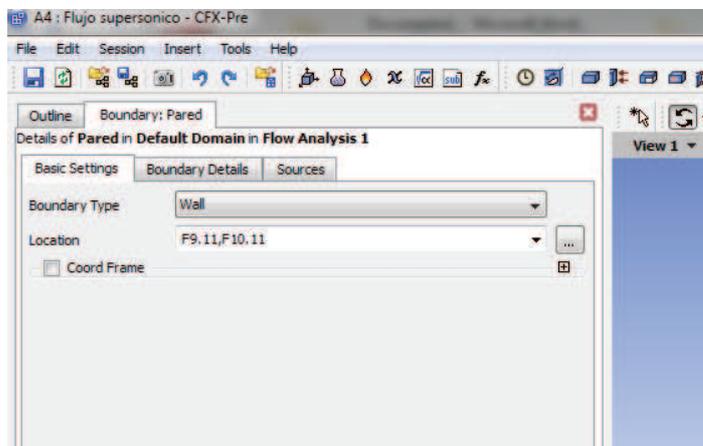


Figura 3.12 Panel de selección para el tipo de frontera “Pared”.

Después se fijan las condiciones frontera correspondientes; en este caso por ser un frontera tipo pared existen las opciones tanto de rugosidad absoluto como flujo de calor, como se observa en la figura 3.13.

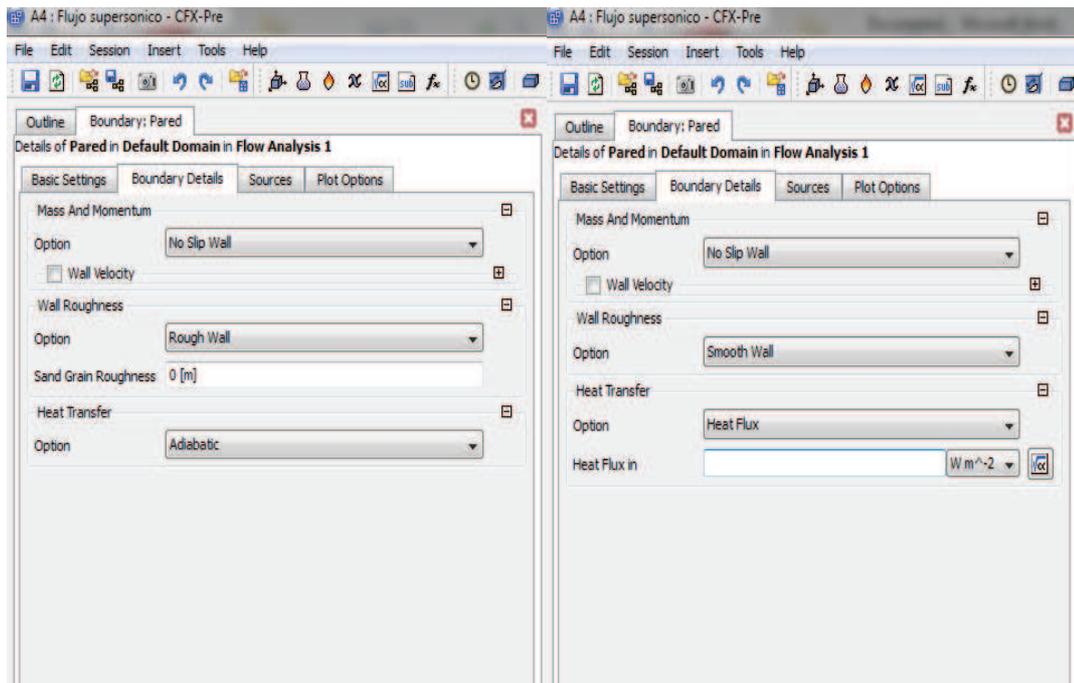


Figura 3.13 Selección de la condición frontera en la pared de la tobera.

Luego de la configuración de todos elementos correspondientes a la geometría y condiciones fronteras de la tobera se establecen las condiciones físicas que regirán el estudio como lo son: tipo de fluido, presión de referencia, modelos de fluidos, modelos de turbulencia e inicialización de la simulación esto puede ser observado en las figuras 3.14 y 3.15.

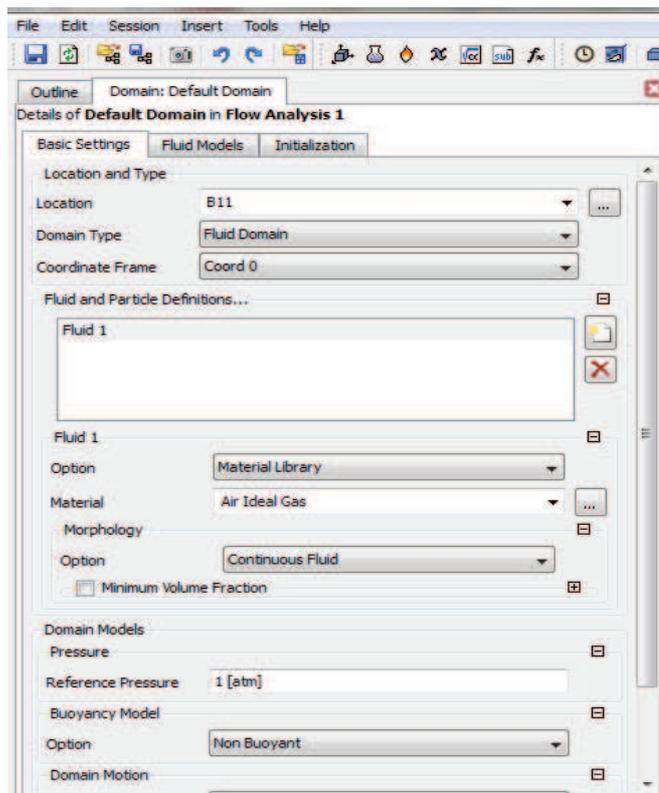


Figura 3.14 Panel de selección del entorno.

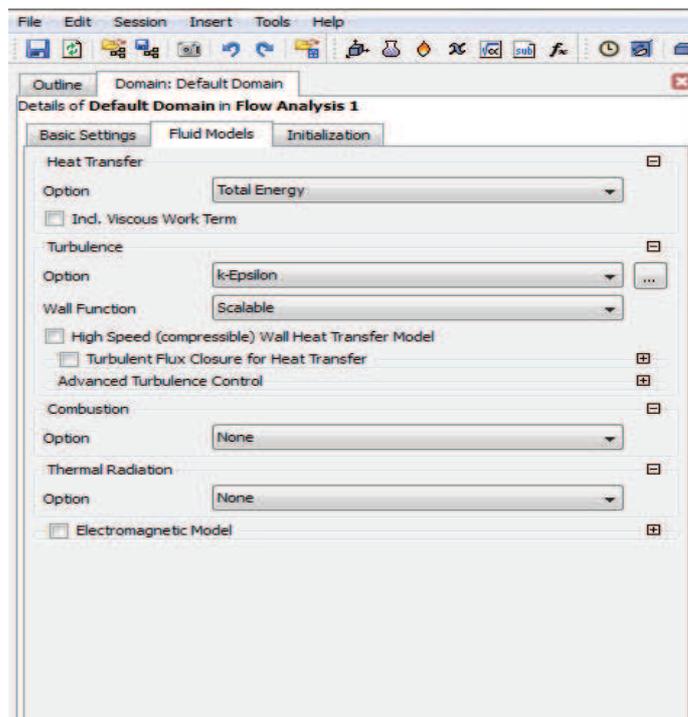


Figura 3.15 Etiqueta de los modelos de turbulencia y modelos de energía.

Luego de todo el procedimiento anteriormente descrito el programa que listo para continuar con la simulación, el resultado se observa en la figura 3.16.

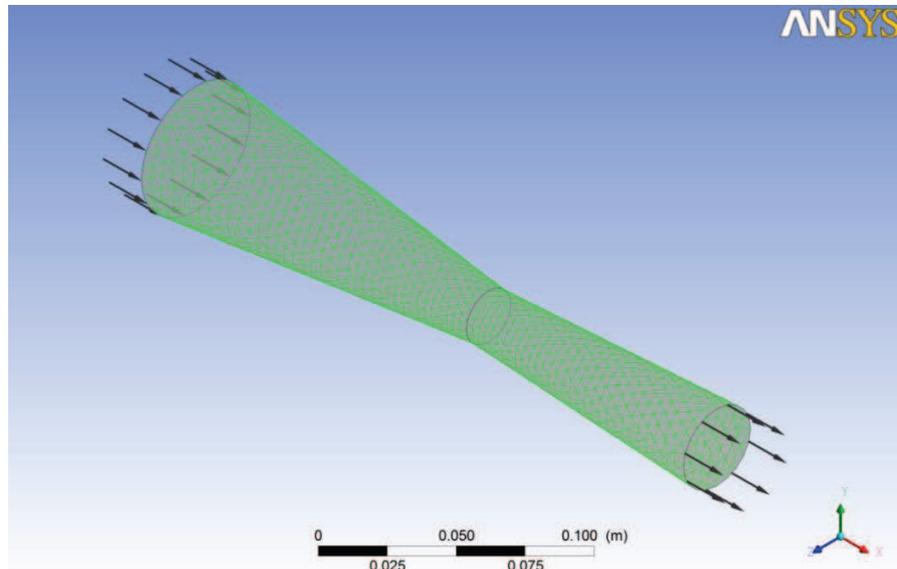


Figura 3.16 Dominio resultante luego de la puesta punto.

3.2.8 Fase 6: Configuración de la herramienta de análisis y solución de ecuaciones.

La configuración de la herramienta de solución de ecuaciones o “solver”, es en donde se establecen todos los criterios correspondientes a la convergencia de la simulación, y aquellos que tendrá en cuenta el programa a la hora de realizar los cálculos. Para esto se ingresa en el panel de control del Pre-CFX. En el mismo se especificará el número de iteraciones máximas a realizar así como en el valor mínimo residual o RMS que fue mencionado anteriormente. La simulación entonces convergerá al momento de cumplirse primero cualquiera de las dos premisas mencionadas anteriormente. En la figura 3.17 se observa el panel.

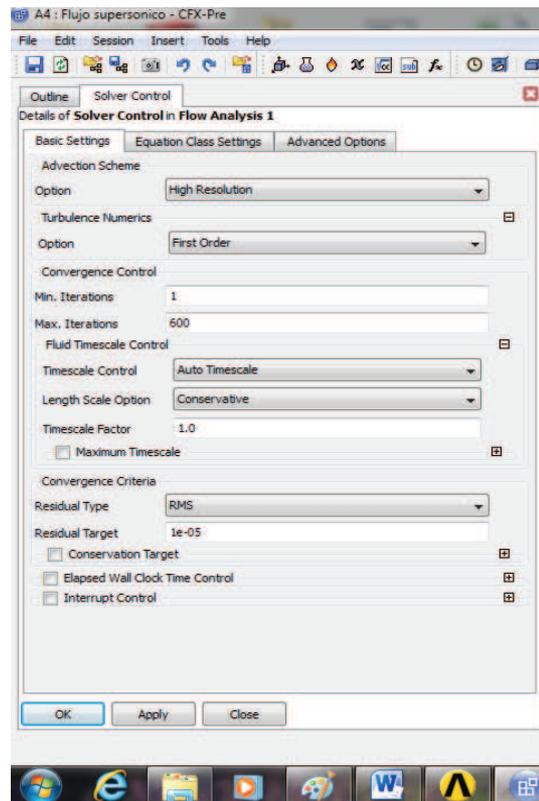


Figura 3.17 Control de la herramienta de solución de ecuaciones.

3.2.9 Fase 7: Convergencia de la simulación.

Mediante el uso de un procesador de ecuaciones incluido en el programa DFC se procede a la resolución de las ecuaciones, se fija un valor de RMS de 0,00001 como criterio de convergencia, valor tomado de el manual del programa y que es un valor recomendado cuando se requiera alta precisión en los resultados de una simulación; mientras que se selecciona un número de 600 iteraciones esto en virtud de diversos ensayos realizados en los cuales se observó que este número de iteraciones era suficiente para lograr la convergencia de la simulación.

3.2.10 Fase 8: Obtención de los resultados.

Los datos obtenidos serán arrojados por el programa en forma de gráficos los cuales representan el comportamiento de las curvas de conservación de masa y momento así como los modelos de turbulencia. Luego esta información será presenta principalmente de la siguiente forma:

- Curvas del número de mach del fluido en la dirección del flujo
- Curvas de la velocidad del fluido en la dirección del flujo
- Curvas de la temperatura del fluido en la dirección del flujo
- Curvas de la presión del fluido en la dirección del flujo

3.2.11 FASE 9: Análisis de Resultados.

Luego de la obtención de resultados mediante la implementación de los conocimientos obtenidos de la revisión bibliográfica se procede a establecer que significan cada uno de los resultados obtenidos y el porqué de dichos resultados.

3.3 Técnicas de recolección de datos

La recolección de datos se realizara mediante la investigación y el uso de material bibliográfico, libros investigaciones revistas, manuales y tutoriales explicativos del uso del software DFC. Así como libros especializados en el comportamiento y estudios de fluidos compresibles.

3.3.1 Recursos Técnicos

- Computador
- Manuales
- Tutoriales

3.3.2 Recursos Humanos

- Tutor académico
- Profesores conocedores de la materia

CAPÍTULO IV.

Desarrollo.

4.1 Generación del Dominio.

4.1.1 Establecimiento de las condiciones de trabajo.

Se establece como presión de entrada para la tobera una presión de 210 kPa ya que dicho valor se encuentra dentro del rango de trabajo de una tobera convergente divergente con aplicaciones aeronáuticas, mientras se estable una presión de salida de 16,025 kPa ya que la misma garantiza un flujo supersónico en la zona divergente de la misma y se previene la aparición de ondas de choque. El fluido de trabajo será aire, debido a su condición de gas ideal facilita la realización del estudio, además de ser un fluido compresible

El área de estudio estará establecida para una sola tobera convergente divergente a la cual se le variarán determinadas condiciones. Estas variaciones serán estudios para rugosidades absolutas ($\varepsilon = 0,275\mu\text{m}$; $\varepsilon = 0,55\mu\text{m}$; $\varepsilon = 0,825\mu\text{m}$; $\varepsilon = 1,1\mu\text{m}$), las cuales corresponden a rugosidades presentes en aleaciones níquel – cromo usadas para la elaboración de dichas toberas; dichos los valores de rugosidades se obtuvieron a partir de las investigaciones realizadas por Folea, M. et al., (2007) a dicho tipo de aleaciones. La otra variación será un estudio para 4 cantidades calor ($Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$; $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$; $Q = 3,765 \text{ MW/m}^2$; $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$), estas cantidades de calor van en función de cálculos realizados a partir de la investigación por Matarazzo, S. y Laget, H. (2011) realizada en la cual establecen las condiciones de salida del gas de la cámara de combustión. Ver Apéndice B.

Con estas variaciones se podrá estudiar de manera completa el comportamiento del fluido cuando pasa a través de la tobera convergente divergente.

4.2 Selección del Modelo de turbulencia

La selección del modelo de turbulencia es de vital importancia debido a que el mismo no sólo será el encargado de la resolución de las ecuaciones sino también en la forma como se presentan los resultados, por lo tanto la elección de un modelo adecuado cobra tanto interés. Además que un modelo de turbulencia correcto permitirá tener una precisión más acertada además de un tiempo de resolución menor.

Los modelos a comparar serán el modelo k-Épsilon ($k-\epsilon$), el cual posee un amplio campo de aplicación en la mecánica de fluidos computacional, además de ser uno de los más robustos para la resolución de ecuaciones en flujo compresible. El segundo modelo será el modelo k-Omega ($k-\omega$) que es un modelo que ha presentado grandes avances a través de los últimos años y está ganando gran aceptación dentro de la dinámica de fluidos computacional. Y por último el tercer modelo será el “Shear Stress Transport” (SST) un modelo basado en las ecuaciones de k-Omega, pero que representa una buena opción por su precisión y exactitud en la predicción en zonas geométricas de área reducida.

Aunque los tres modelos teóricamente presenten configuraciones y ecuaciones similares el método de resolución por parte del programa es distinto para cada uno. Un factor importante que se usará para realizar la selección del modelo adecuado será el “Imbalance” que se refiere al error porcentual que existe en las ecuaciones de momento y continuidad en la entrada y salida de un flujo del dominio. La teoría indica que una simulación confiable y que arroje valores precisos será aquella cuyo valor del imbalance este por debajo del 0,5% [3].

Para realizar el estudio comparativo se tomará como estudio de referencia la tobera en su caso mas critico; es decir, cuando la transferencia de calor es máxima, esto corresponde a un flujo de transferencia de calor correspondiente a $5,02 \text{ MW/m}^2$.

Como se observa en la figura 4.1 la convergencia de las curvas de “imbalance” se produce en la iteración número 130, esto para el modelo k-Épsilon lo que indica que la simulación esta convergiendo y se están cumpliendo las leyes de conservación de la masa, energía y momento.

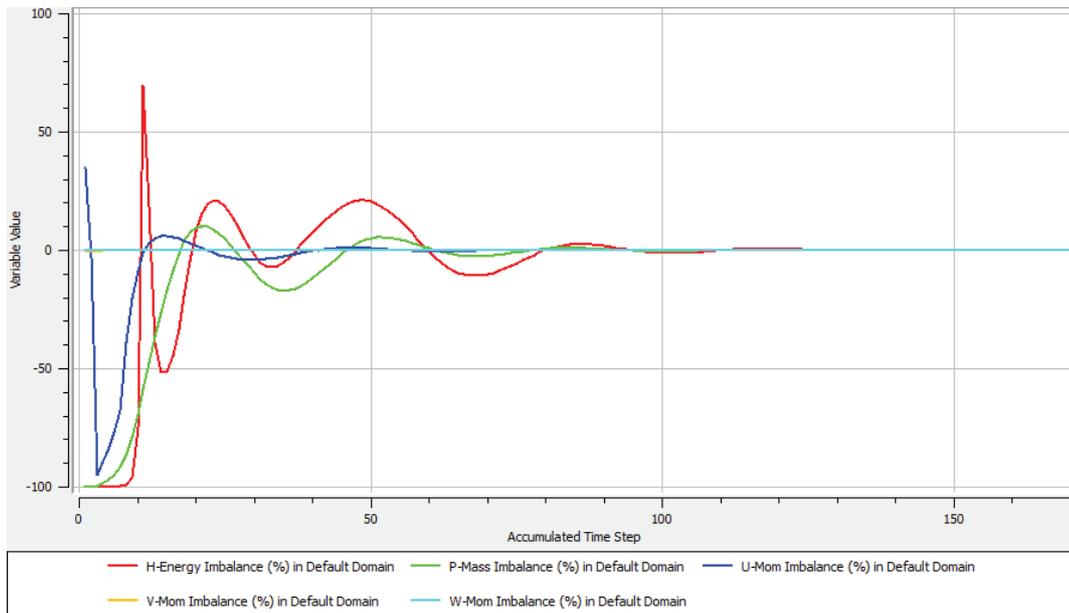


Figura 4.1 Grafica Imbalance para modelo de turbulencia k-Épsilon.

El la figura 4.2 se observa que para el modelo k-Omega también se presenta convergencia de las ecuaciones de conservación de la masa, momento y energía, aunque en este caso la convergencia se presenta a partir de la iteración 150, lo que indica que para este modelo la simulación tarde un poco mas de tiempo.

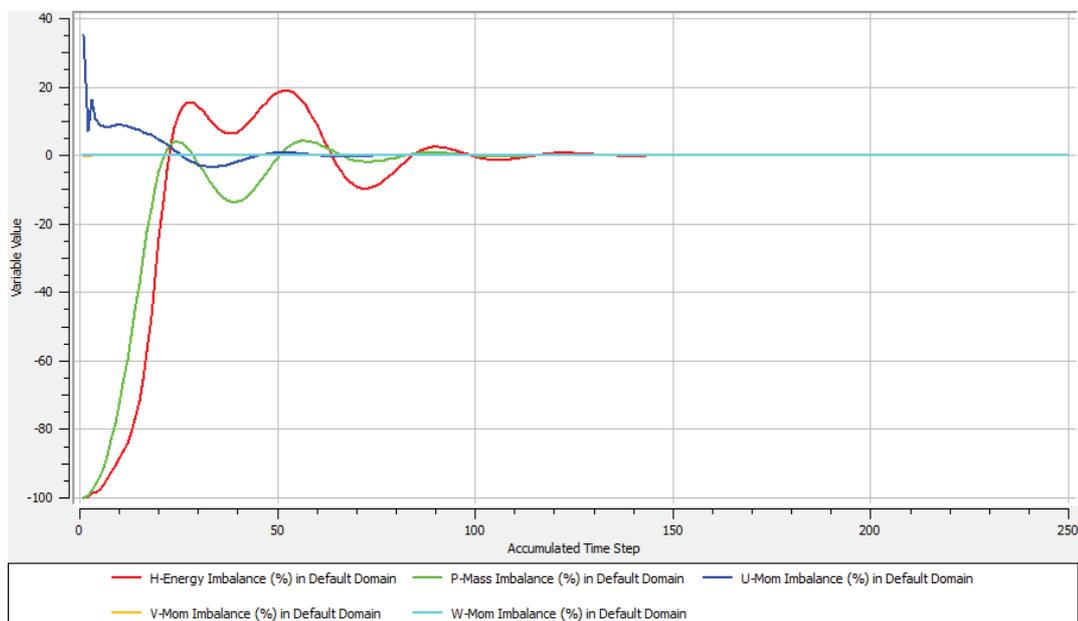


Figura 4.2 Grafica Imbalance para modelo de turbulencia k-Omega.

Mientras que en la figura 4.3 se observa que para el modelo SST la convergencia se presenta a partir de la iteración número 145, lo cual indica un comportamiento similar al modelo k-Omega confirmando así que el modelo SST está basado en el k-Omega.

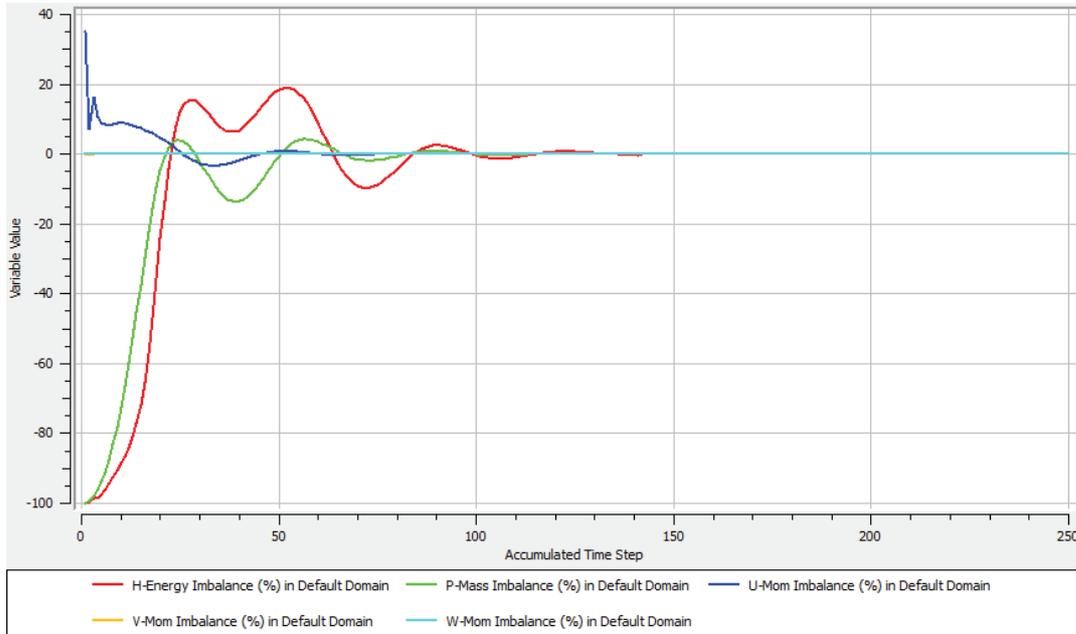


Figura 4.3 Imbalance para modelo de turbulencia k-Épsilon.

Otro factor importante a tener en cuenta al momento de la selección del mejor modelo de turbulencia son los tiempos computacionales que no es más que el tiempo que tarda la simulación numérica en converger completamente. En la tabla 4.1 se observa una comparación entre los tiempos computacionales y el número de iteraciones necesaria para que cada modelo convergiera.

Tabla 1.1 Resultados para cada modelo de turbulencia.

Dominio	Número de Iteraciones			Tiempo computacional		
	k-ε	k-ω	SST	k-ε	k-ω	SST
Q = 5,02 MW/m²	170	250	250	0:02:55	0:04:17	0:04:30

Como se observa tanto para la comparación del “imbalance” así como la comparación de los tiempos computacionales el modelo que mejor se adapta al estudio a realizar es el modelo k-épsilon que no solo garantiza un tiempo y un número de iteraciones menor sino también una mayor precisión y confiabilidad en los resultados arrojados. Es por ello que el

modelo k-Épsilon será el usado para realizar la simulación de la tobera convergente para rugosidades absolutas de ($\epsilon = 0,275$, $\epsilon = 0,55$, $\epsilon = 0,825$, $\epsilon = 1,10$) y para flujos de calor ($Q = 1,255 \text{ MW/m}^2$, $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$, $Q = 3,675 \text{ MW/m}^2$ y $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$); arrojando los resultados mostrados a continuación.

4.3 Convergencia de la simulación.

En este segmento se presenta el resultado de la simulación referido al comportamiento de las curvas de convergencia tanto para las leyes de conservación de masa y momento así como como las ecuaciones de turbulencia, para los casos en los que el flujo a través una tobera convergente – divergente presente las siguientes condiciones para rugosidades absolutas de ($\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0,55 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0,825 \mu\text{m}$, $\epsilon = 1,10 \mu\text{m}$) y para flujos de calor ($Q = 1,255 \text{ MW/m}^2$, $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$, $Q = 3,675 \text{ MW/m}^2$ y $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$).

4.3.1 Convergencia de la simulación para una rugosidades absolutas de $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0,55 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0,825 \mu\text{m}$ y $\epsilon = 1,10 \mu\text{m}$.

En la figuras 4.4 y 4.5 se expone la convergencia para la simulación numérica correspondiente para una rugosidad absoluta de $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$.

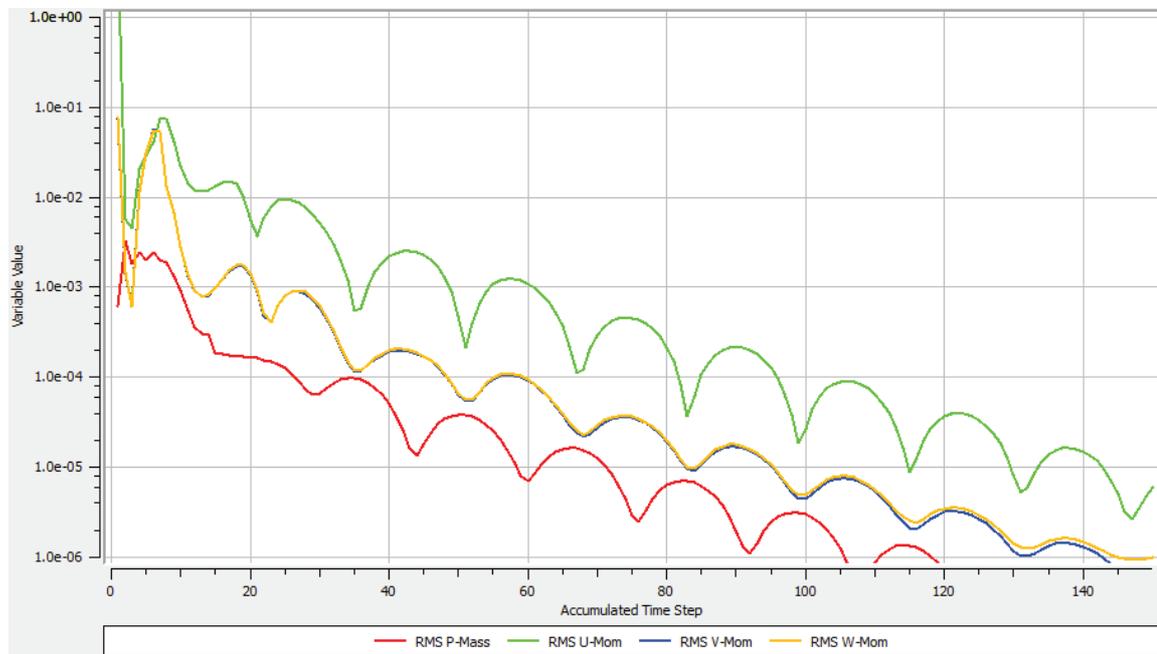


Figura 4.4 Convergencia de Masa y Momento para $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$.

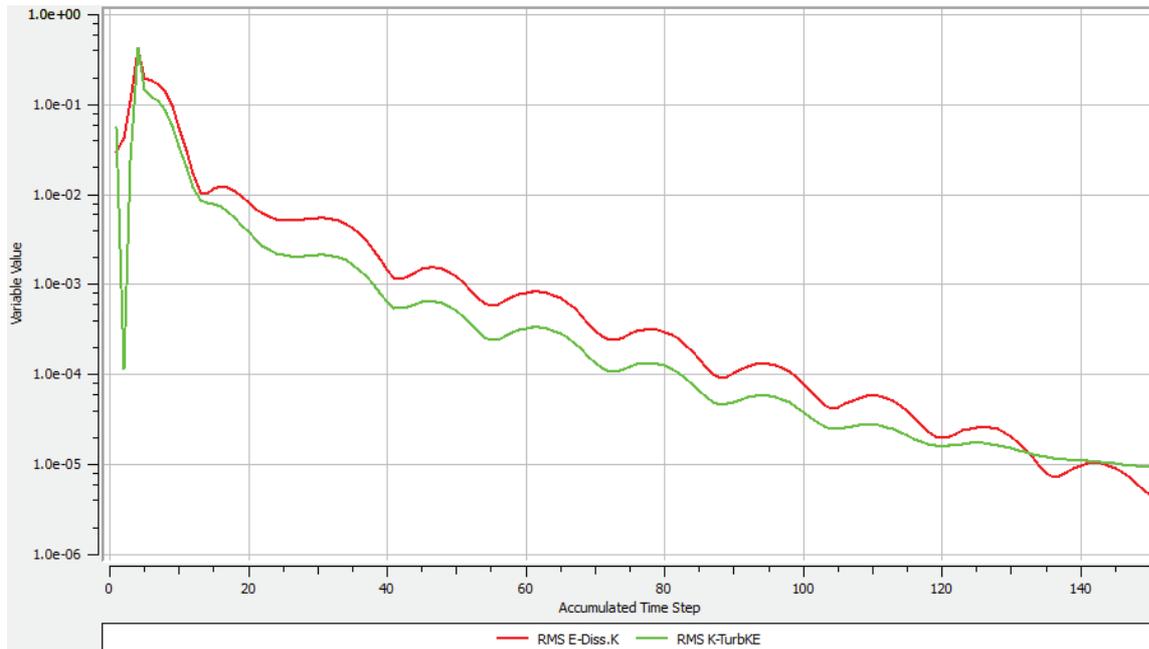


Figura 4.5 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $\varepsilon = 0,275 \mu\text{m}$.

Como se observa en ambas figuras las iteraciones culminan al momento de alcanzar un valor de RMS o valor residual correspondiente a $1 \cdot 10^{-5}$ valor establecido anteriormente como criterio de convergencia de la simulación.

4.3.2 Convergencia de la simulación para una rugosidad absoluta de $\varepsilon = 0,55 \mu\text{m}$.

En las figuras 4.6 y 4.7 se observa al igual las curvas de convergencia tanto de masa y momento como de el modelo de turbulencia correspondientes a la simulación para una rugosidad absoluta de $\varepsilon = 0,55 \mu\text{m}$. Es de hacer notar como ambas graficas presentan un patrón de comportamiento similar a las correspondientes a la simulación anterior. Este patrón de comportamiento similar se presenta en todas simulaciones realizadas al variar la rugosidad absoluta

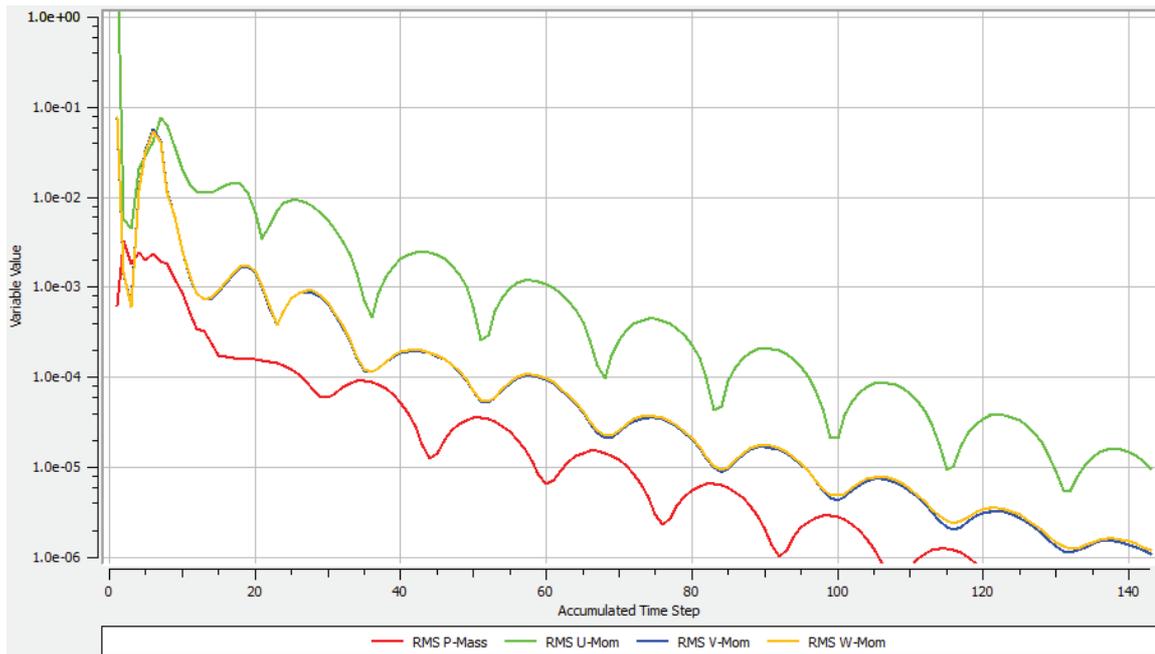


Figura 4.6 Convergencia de Masa y Momento para $\epsilon = 0,55 \mu\text{m}$.

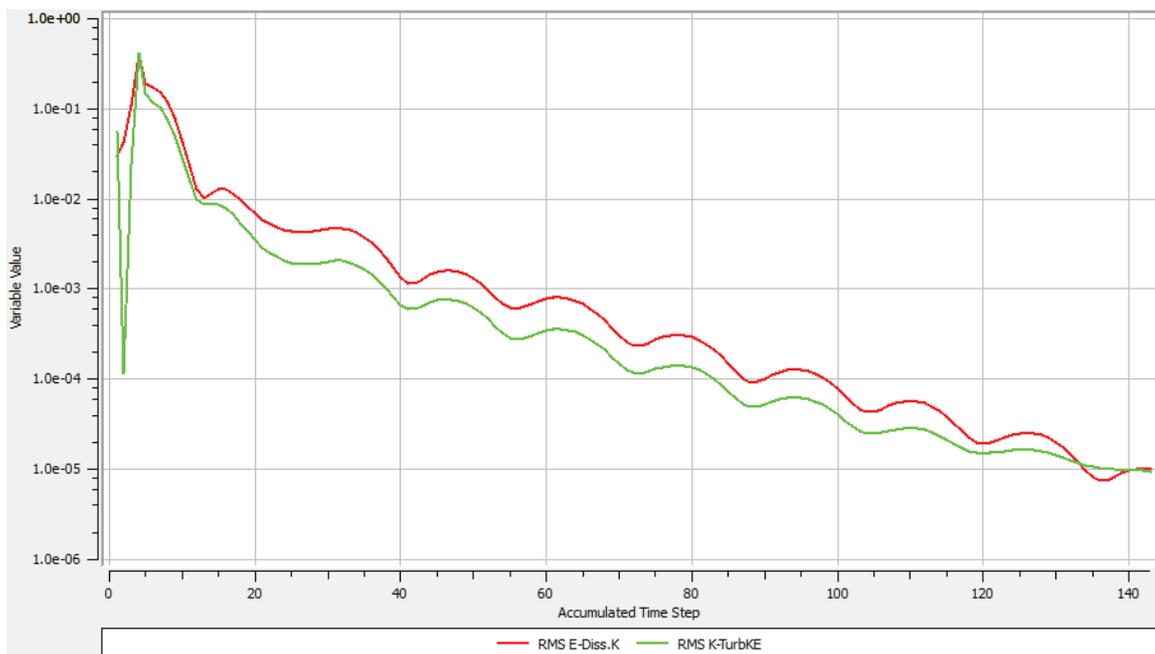


Figura 4.7 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $\epsilon = 0,55 \mu\text{m}$.

4.3.3 Convergencia de la simulación para una rugosidad absoluta de $\epsilon = 0,825 \mu\text{m}$

En las figuras 4.8 y 4.9 se observa como las graficas correspondientes a la simulación de la tobera convergente divergente para una rugosidad absoluta de $\epsilon = 0,825 \mu\text{m}$, logran la convergencia para el valor residual establecido.

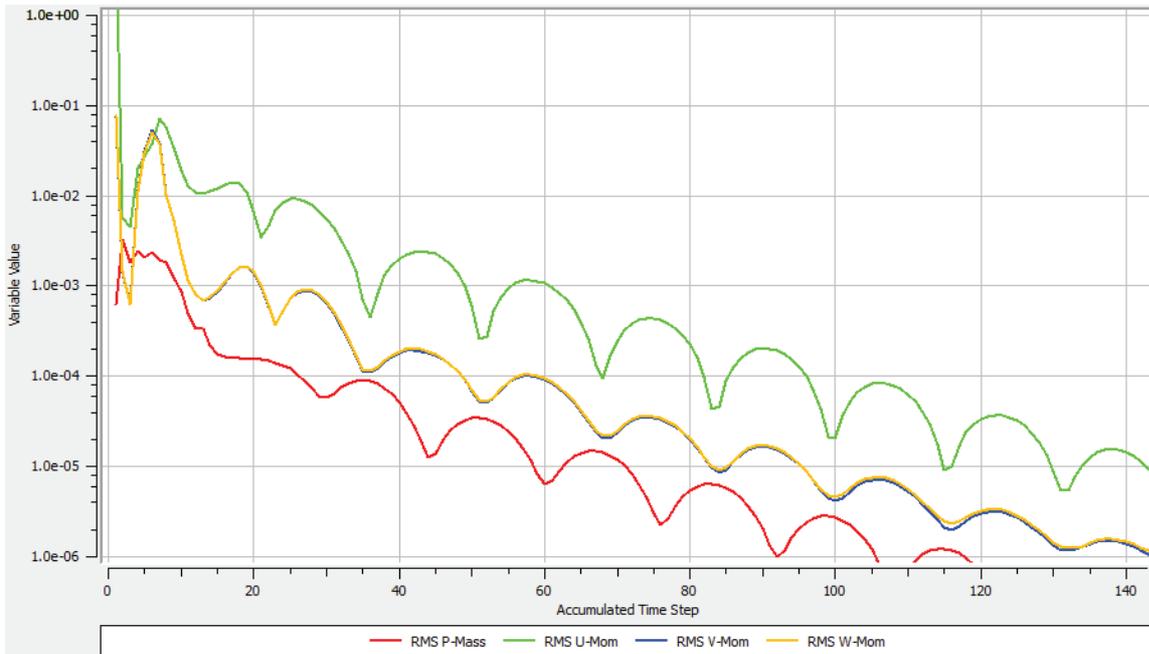


Figura 4.8 Convergencia de Masa y Momento para $\epsilon = 0,825 \mu\text{m}$

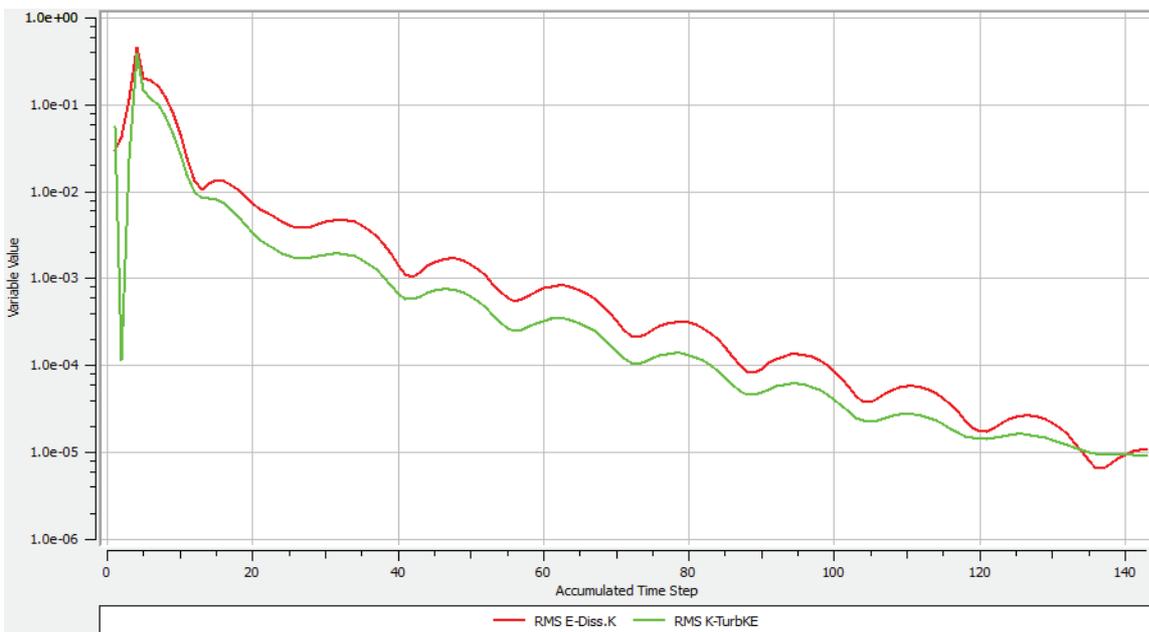


Figura 4.9 Convergencia de ecuaciones de turbulencia $\epsilon = 0,825 \mu\text{m}$

4.3.4 Convergencia de la simulación para una rugosidad absoluta de $\epsilon = 1,10 \mu\text{m}$

En las figuras 4.10 y 4.11 se observa las curvas de convergencia correspondientes a una rugosidad absoluta $\epsilon = 1,10 \mu\text{m}$, y como las mismas convergen al valor de RMS establecido. Es importante acotar como para esta simulación la rugosidad se logro en un número menor de iteraciones. También se observa como al igual que para las rugosidades absolutas anteriores las curvas correspondientes a masa y momento “V” y momento “W” logran valores por debajo del valor residual de $1 \cdot 10^{-5}$, lo que garantiza una mayor precisión en los resultados.

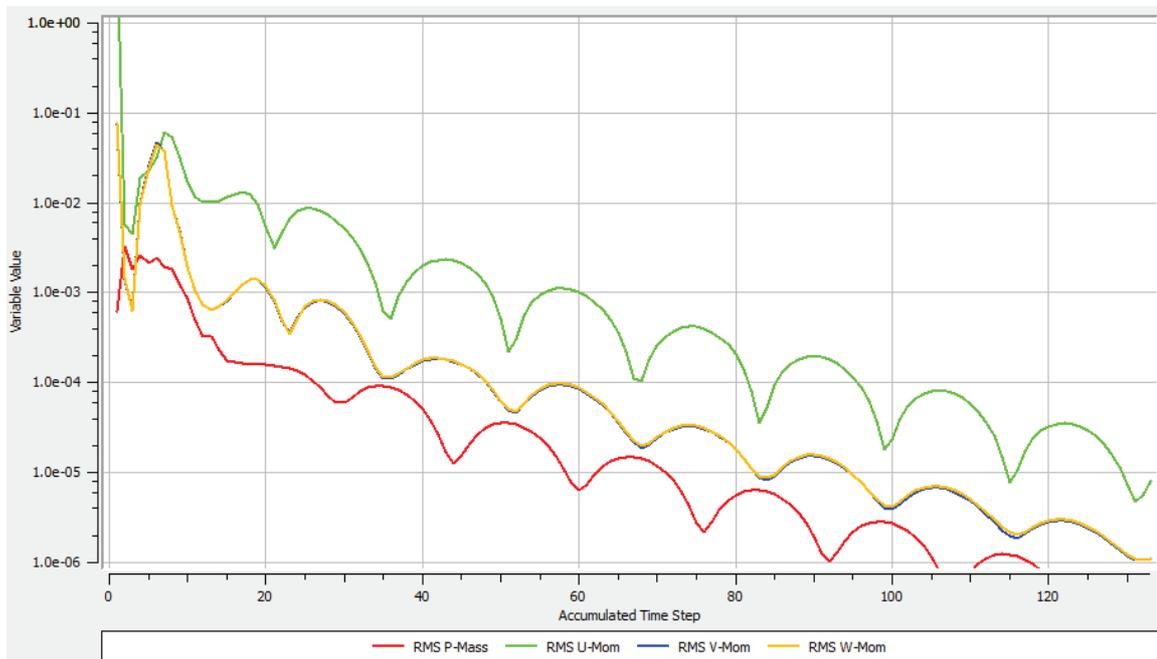


Figura 4.10 Convergencia de Masa y Momento para $\epsilon = 1,1 \mu\text{m}$.

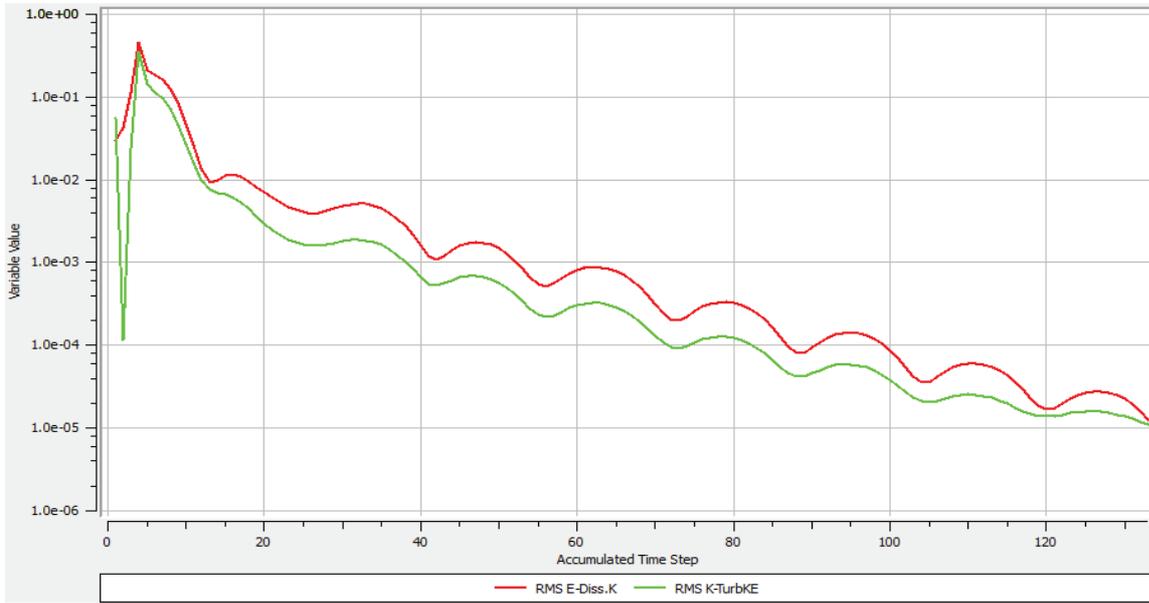


Figura 4.11 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $\epsilon = 1,1 \mu\text{m}$.

4.3.5 Convergencia de la simulación para flujos de calor ($Q = 1,255 \text{ MW/m}^2$, $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$, $Q = 3,675 \text{ MW/m}^2$ y $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$)

En las figuras 4.12 y 4.13 se observa la convergencia de la simulación al momento de suministrarle una cantidad de calor $Q = 1,255 \text{ MW/m}^2$ a la tobera. Las graficas muestran como la simulación logra la convergencia para el valor residual establecido.

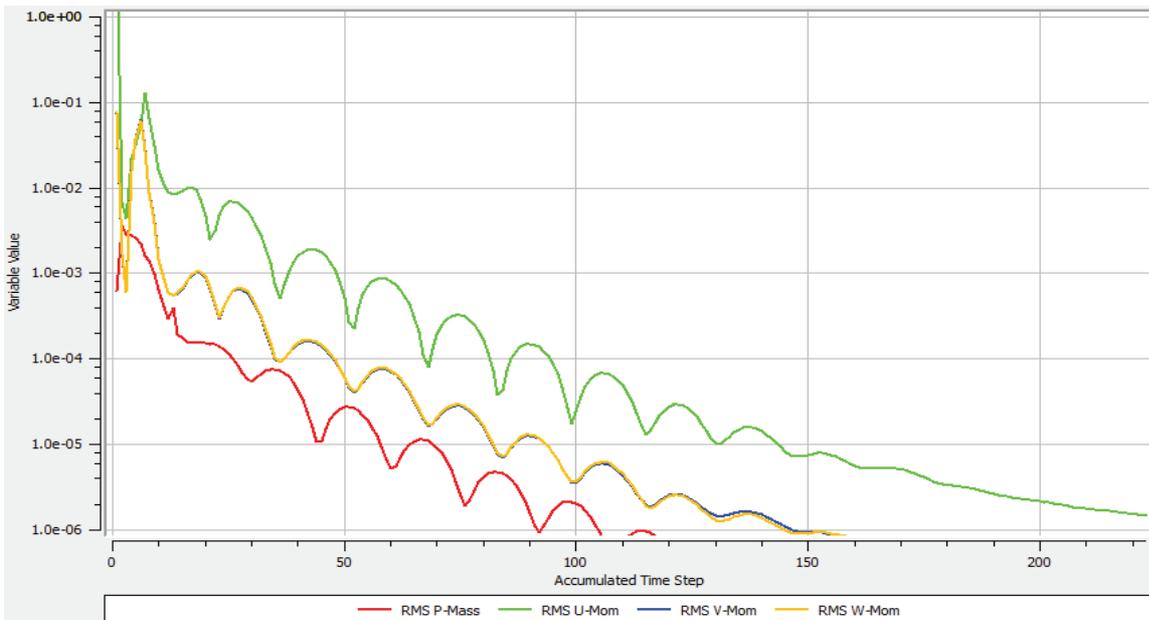


Figura 4.12 Convergencia de masa y momento para $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$.

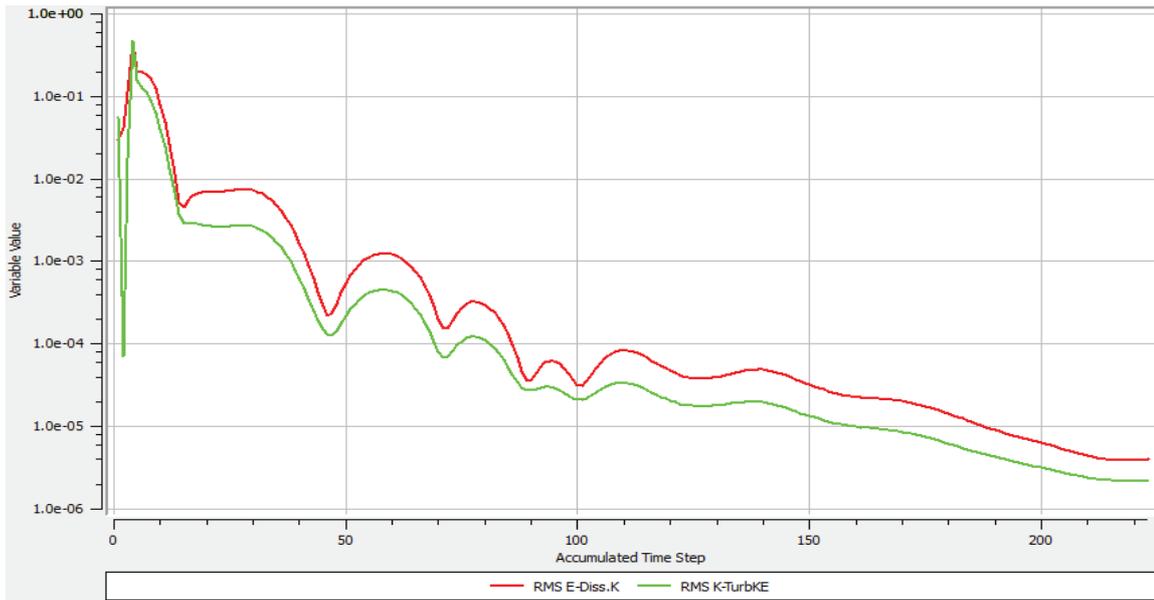


Figura 4.13 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$.

Mientras que las figuras 4.14 y 4.15 exponen la convergencia de la simulacion para una cantidad de calor $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$ y como la misma logra la convergencia para el valor RMS establecido. Es importante acotar como ambas simulaciones presentan un comportamiento similar en sus graficas de momento y masa y modleos de turbulencia, la una diferencia notable es que la simulacion para $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$ logro la convergencia en un número menor de iteraciones.

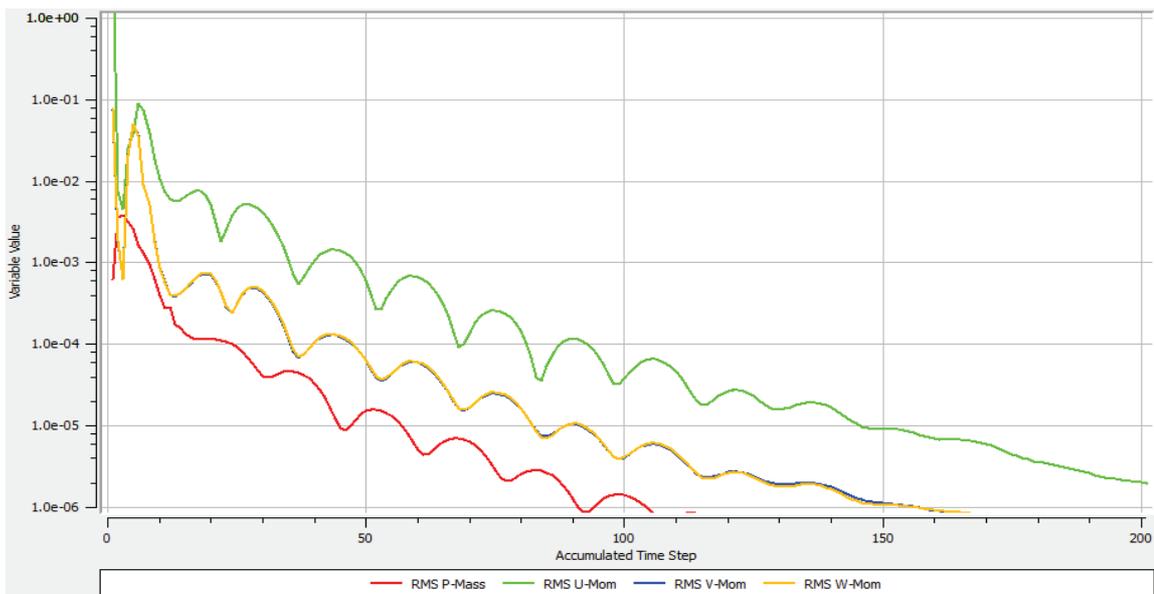


Figura 4.14 Convergencia de masa y momento para $Q = 2.51 \text{ MW/m}^2$.

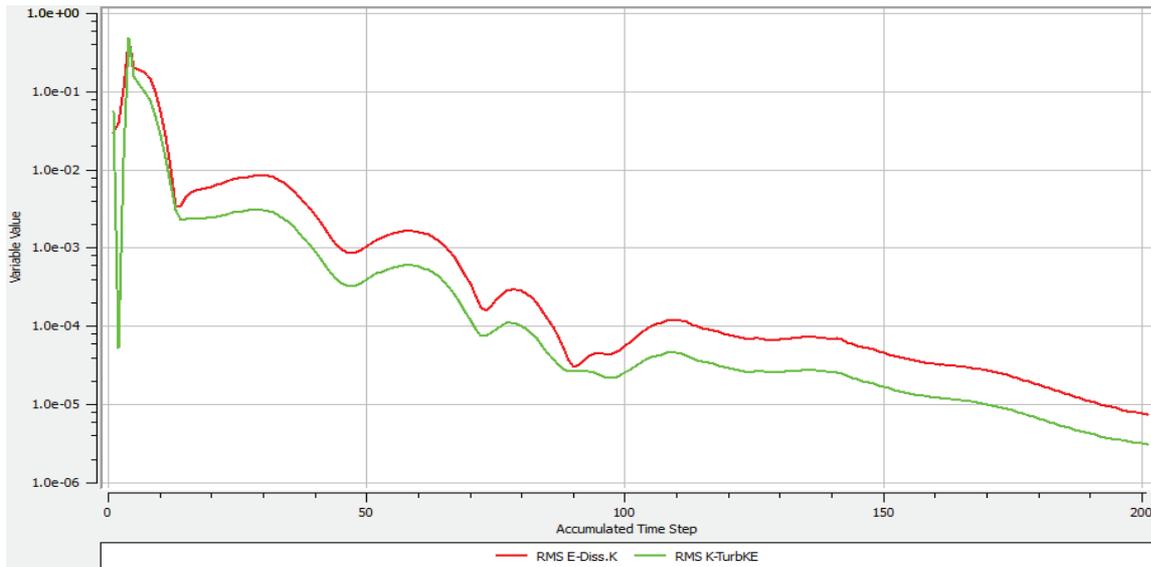


Figura 4.15 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$.

En las figuras 4.16 y 4.17 se muestra las curvas de convergencia correspondientes a la simulación para una cantidad de calor de $Q = 3,675 \text{ MW/m}^2$, se observa como las ecuaciones de masa y momento logran valores por debajo del valor residual establecido lo que genera mejores y mas precisos resultados, también se observa un comportamiento diferente de las graficas de los modelos de turbulencia luego de la iteración 200, sin embargo se logra también una convergencia al valor RMS establecido

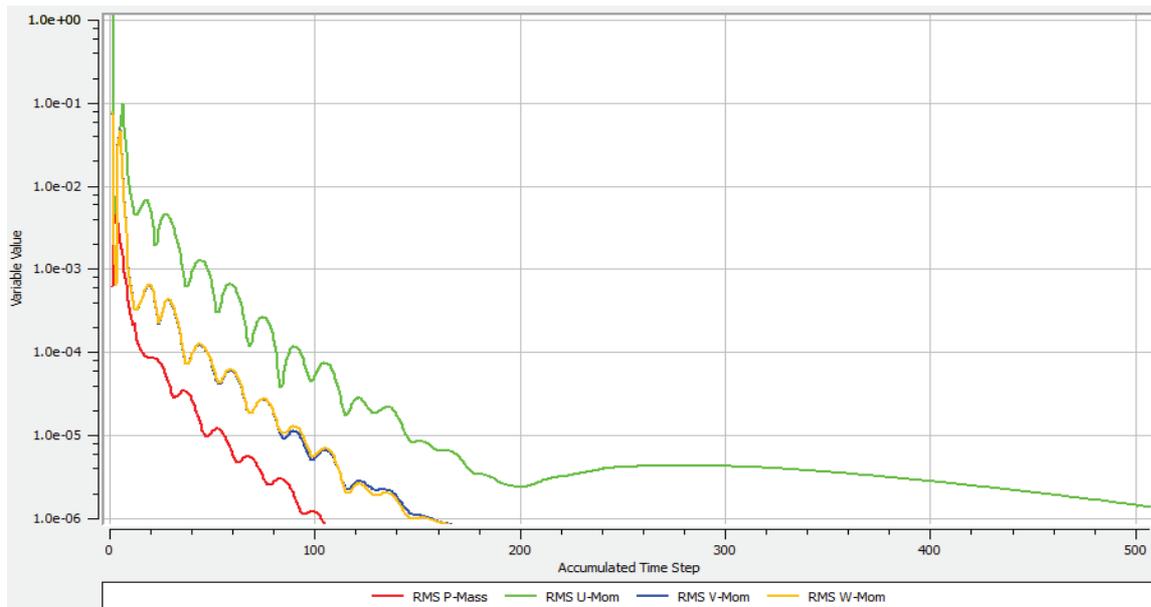


Figura 4.16 Convergencia de masa y momento para $Q = 3,675 \text{ MW/m}^2$.

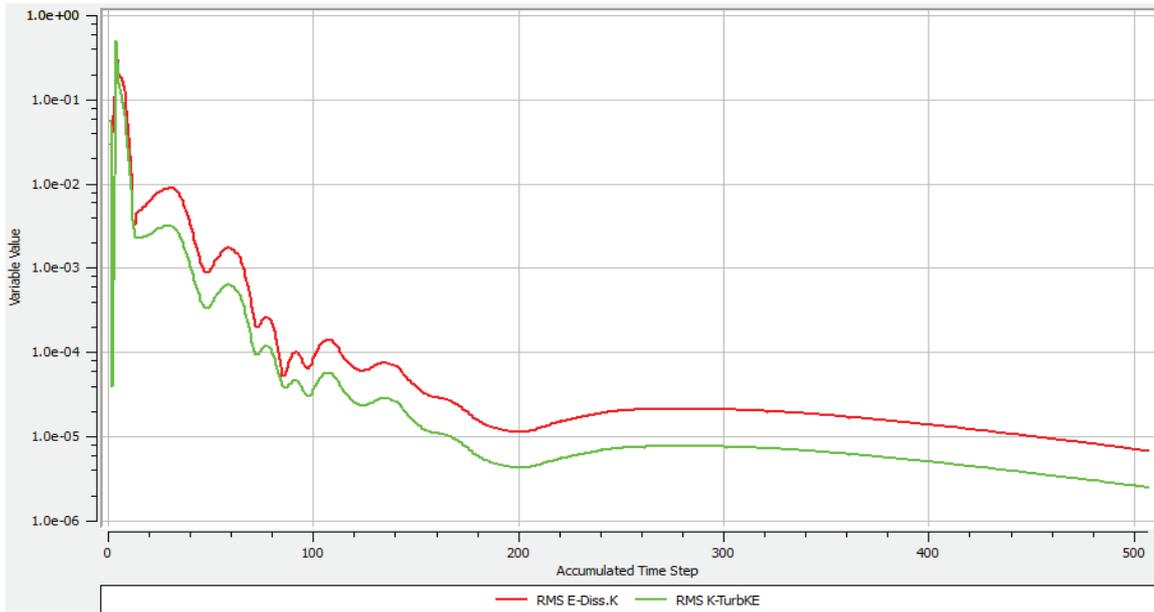


Figura 4.17 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $Q = 3,675 \text{ MW/m}^2$.

En las figuras 4.18 y 4.19 se observa el comportamiento de las graficas de la simulación para una cantidad de calor de $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$, las cuales presentan un patrón de comportamiento similar al de la simulación para $Q = 3,675 \text{ MW/m}^2$; generándose igualmente valores inferior al RMS establecido para las ecuaciones de masa y momento, y que para esta simulación se logro la convergencia en un número inferior de iteraciones.

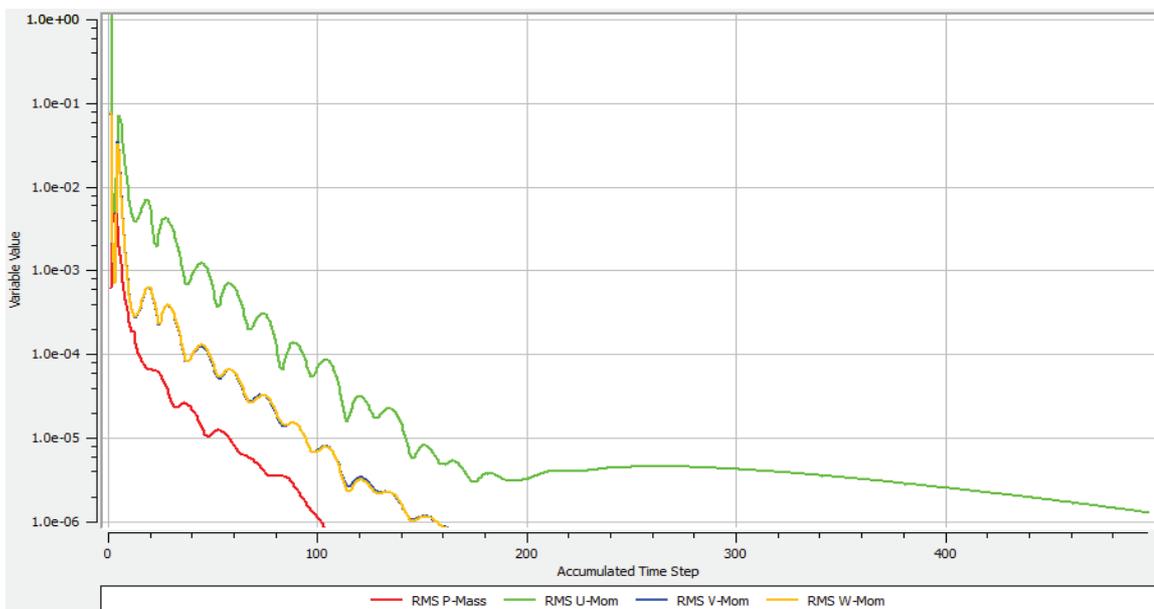


Figura 4.18 Convergencia de masa y momento para $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.

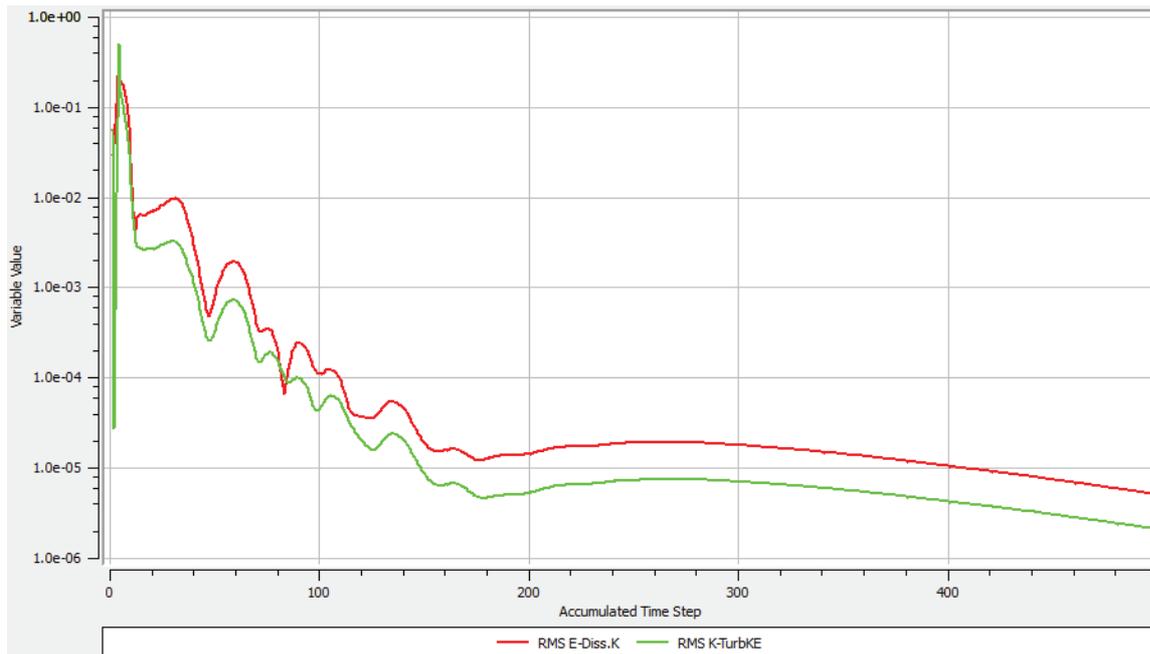


Figura 4.19 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.

4.4 Comportamiento de las líneas de flujo para una tobera convergente – divergente

Para facilitar el estudio del campo de flujo en una tobera convergente divergente, se realiza el mismo variando las condiciones de trabajo de la misma en este caso serian la rugosidad absoluta y la cantidad de calor que ingresa por las paredes de la misma y así observar como se ven afectadas las diversas propiedades del fluido que pasa a través de la misma.

4.4.1 Estudio de la tobera sin rugosidad ni transferencia de calor

La imagen 4.20 muestra la distribución de número de mach para la tobera convergente divergente sin rugosidad ni transferencia de calor en las paredes

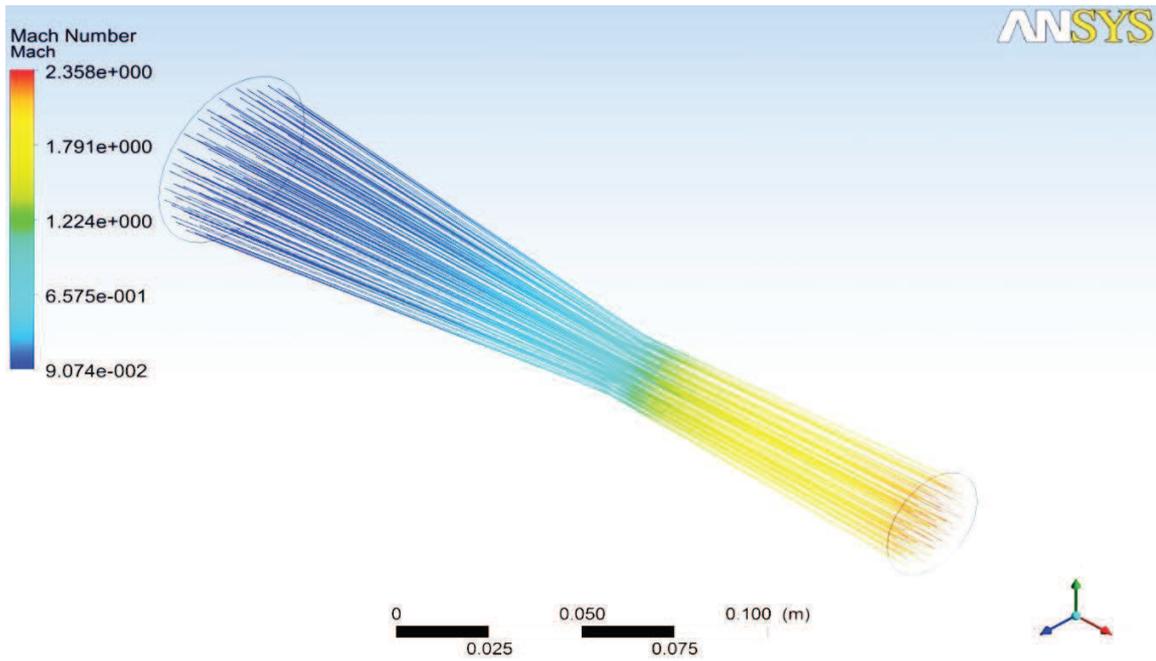


Figura 20 Distribución del Número de mach para $\epsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$.

Con los datos de la figura anterior se procede a la construcción de la grafica número de mach vs. Posición representada en la figura 4.21.

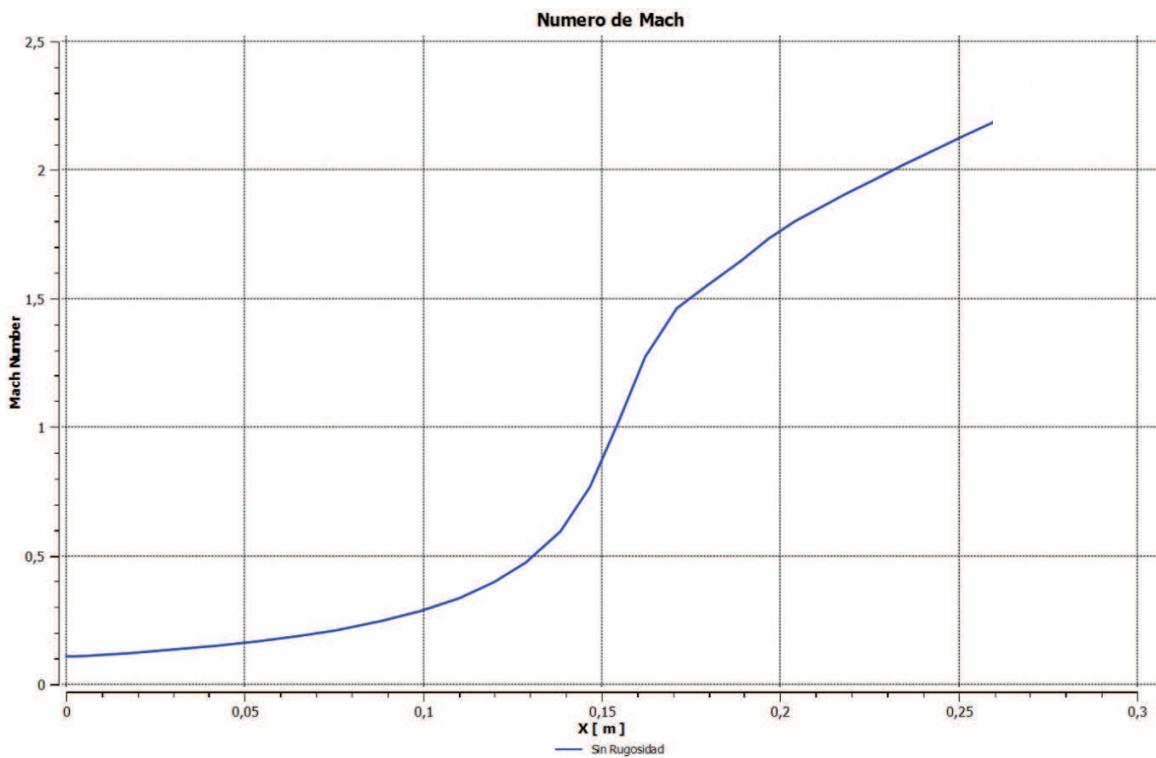


Figura 4.21 Número de Mach vs posición para $\epsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$.

Como se observa en la figura 4.21 el comportamiento de la grafica de numero de mach vs posición va de acuerdo al establecido mediante teoría siendo la principal observación el como el valor del numero de mach = 1 no se produce exactamente en la garganta de la tobera sino unos milímetros aguas abajo. Esto será explicado mas adelante

La figura 4.22 muestra la distribución de velocidades para la tobera convergente divergente sin rugosidad ni transferencia de calor en las paredes.

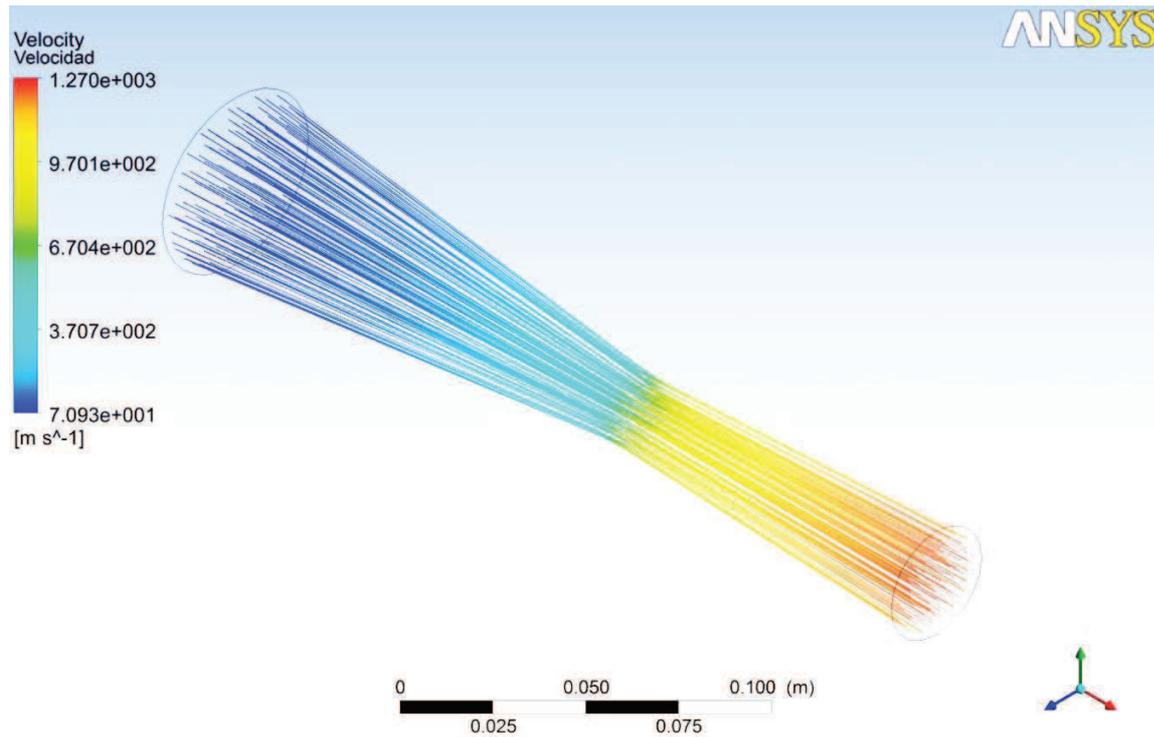


Figura 4.22 Distribución de la velocidad para $\epsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$.

Con los datos obtenidos a partir de la figura 4.22 se construye la grafica velocidad vs posición, representada en la figura 4.23.

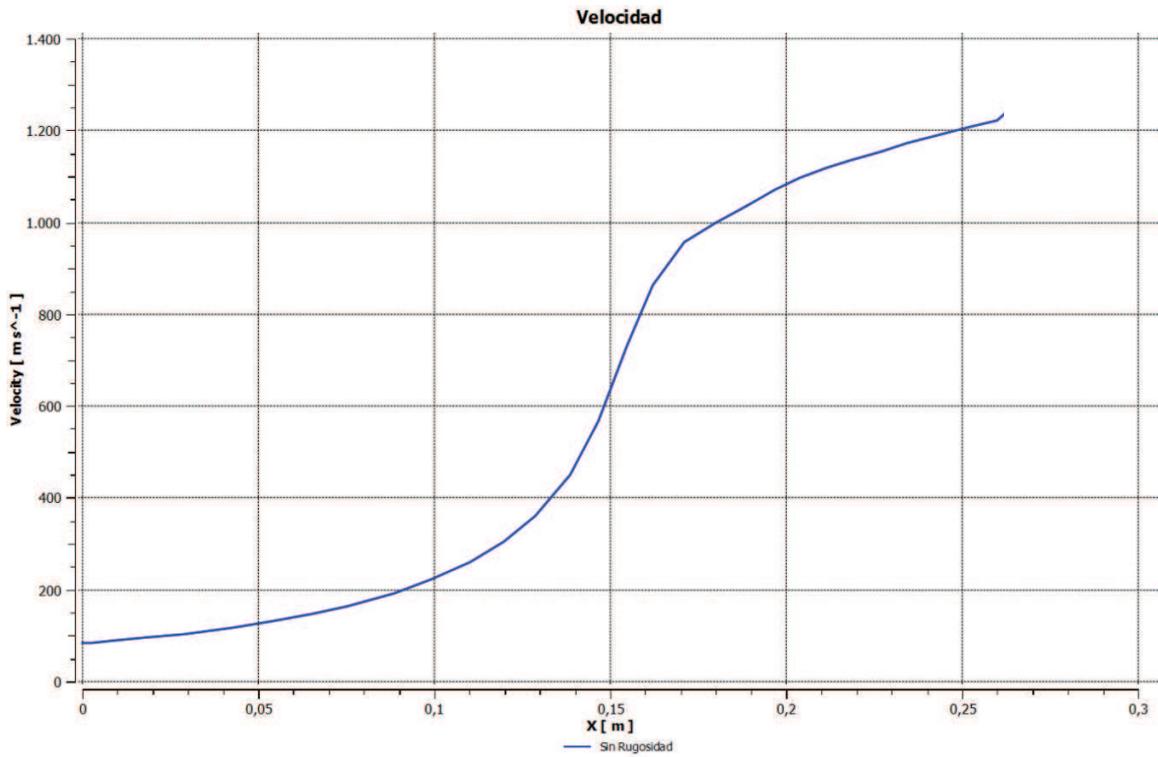


Figura 4.23 Velocidad vs posición para $\epsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$.

La figura 4.23 el comportamiento de la velocidad es similar al de la grafica del numero de mach esto debido a que ambas variables están directamente ligadas tal como lo refleja la ecuación (2.18).

Las líneas de flujo de comportamiento de la temperatura para la tobera sin rugosidad ni transferencia de calor en las paredes vienen representadas en la figura 4.24.

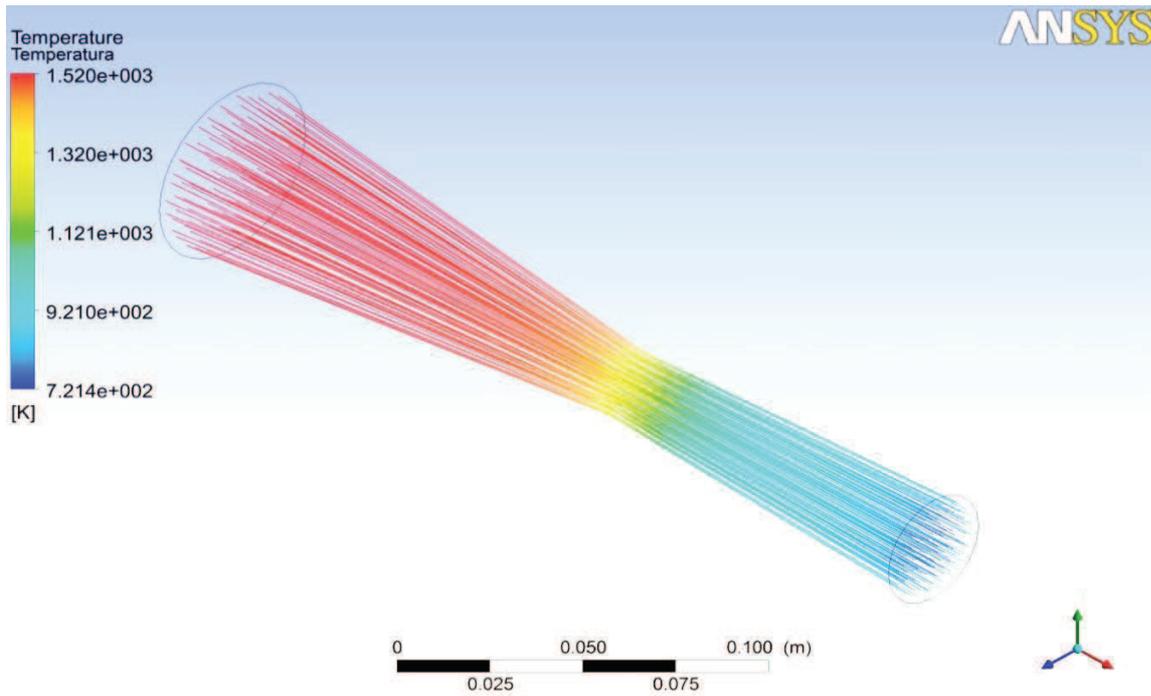


Figura 4.24 Distribución de temperatura para $\varepsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$.

A partir de la figura 4.24 se elabora la grafica temperatura vs posición representada en la figura 4.25, en la misma se observa como la temperatura disminuye a medida que aumenta la velocidad del fluido.

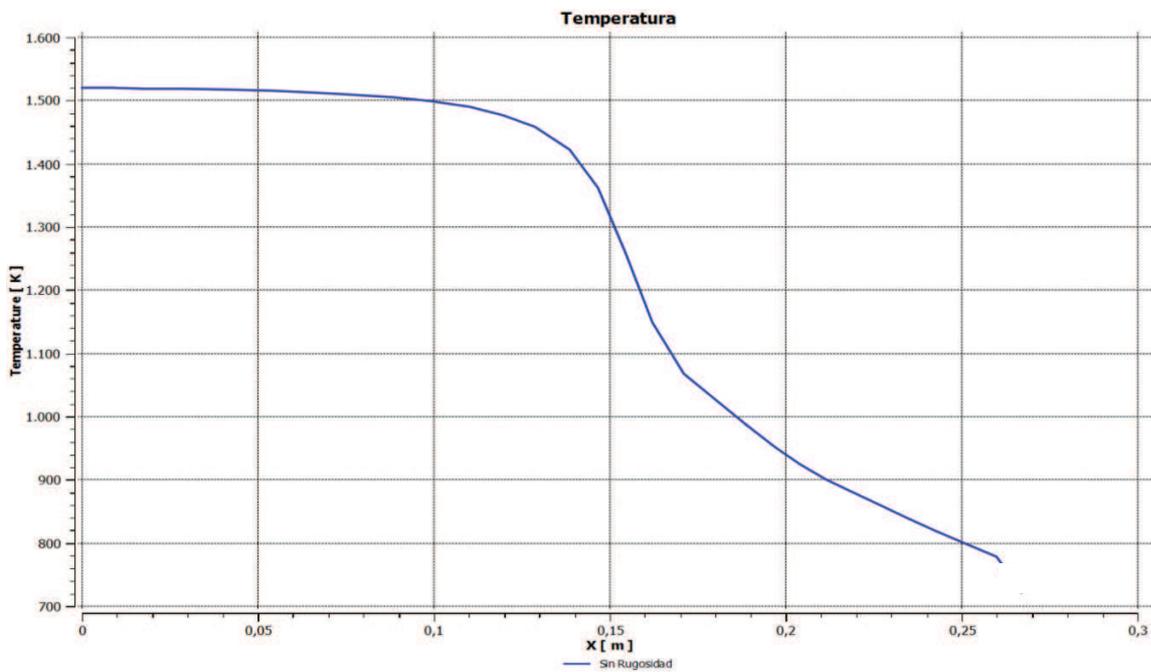


Figura 4.25 Temperatura vs posición para $\varepsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$.

En la figura 4.26 se observa el comportamiento de las líneas de flujo correspondientes a la variación de la presión del flujo que pasa a través de la tobera sin rugosidad ni transferencia de calor en las paredes.

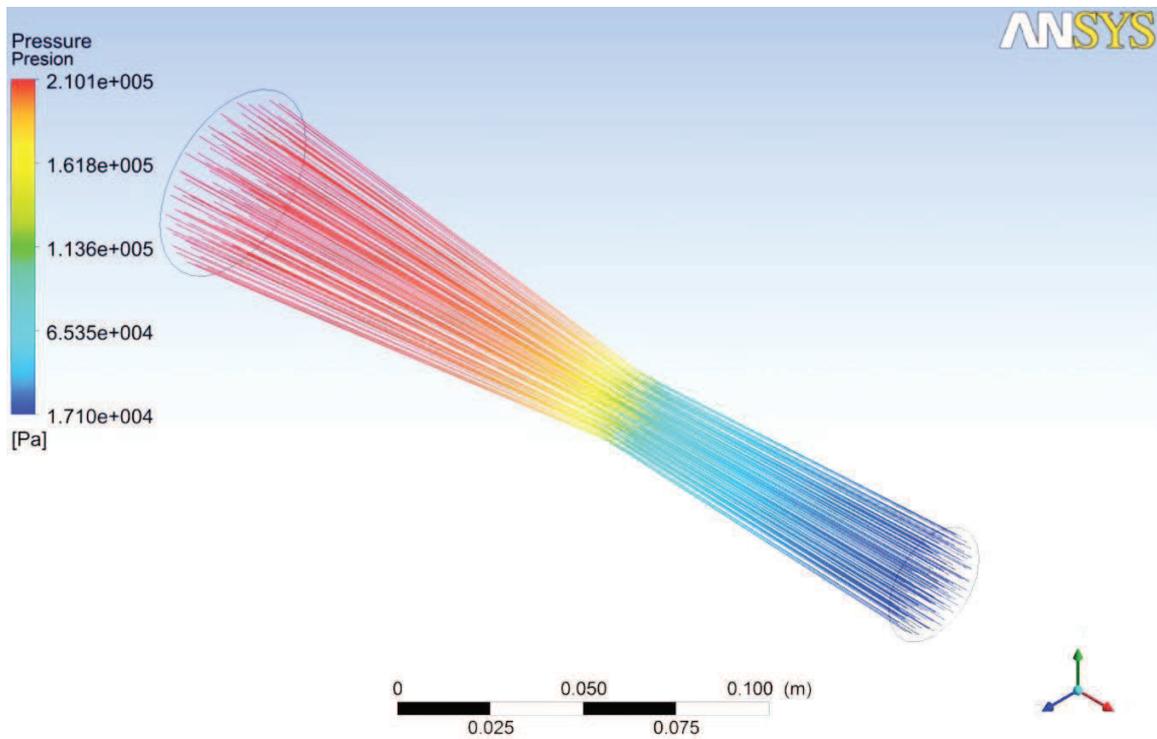


Figura 4.26 Distribución de presión para $\varepsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$

A partir de los datos obtenidos en la figura anterior se elabora la grafica presión vs posición, mostrada en la figura 4.27, se observa como el comportamiento de la misma es el inverso a la velocidad, esto de acuerdo al decremento de presión que sufre el fluido para lograr el aumento de velocidad.

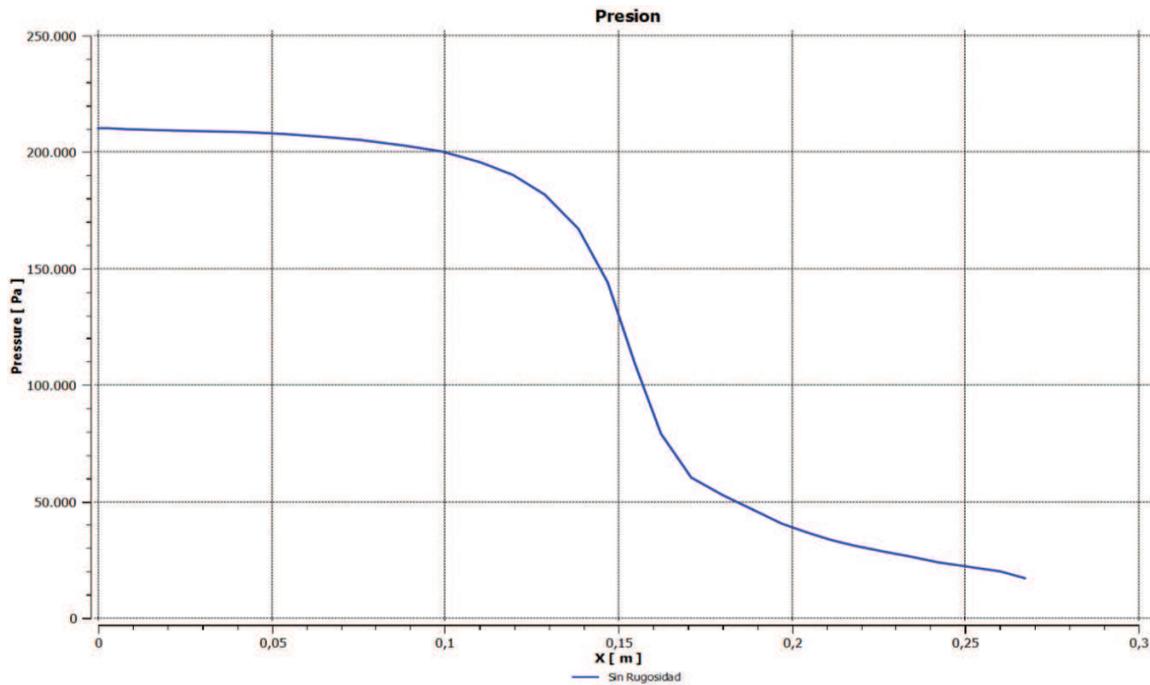


Figura 4.27 Presión vs posición para $\epsilon = 0 \mu\text{m}$ y $Q = 0 \text{ MW/m}^2$.

4.4.2 Estudio de la tobera para una rugosidad absoluta de $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$

La figura 4.28 muestra la distribución del número de Mach en la tobera convergente divergente para una rugosidad absoluta de $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$.

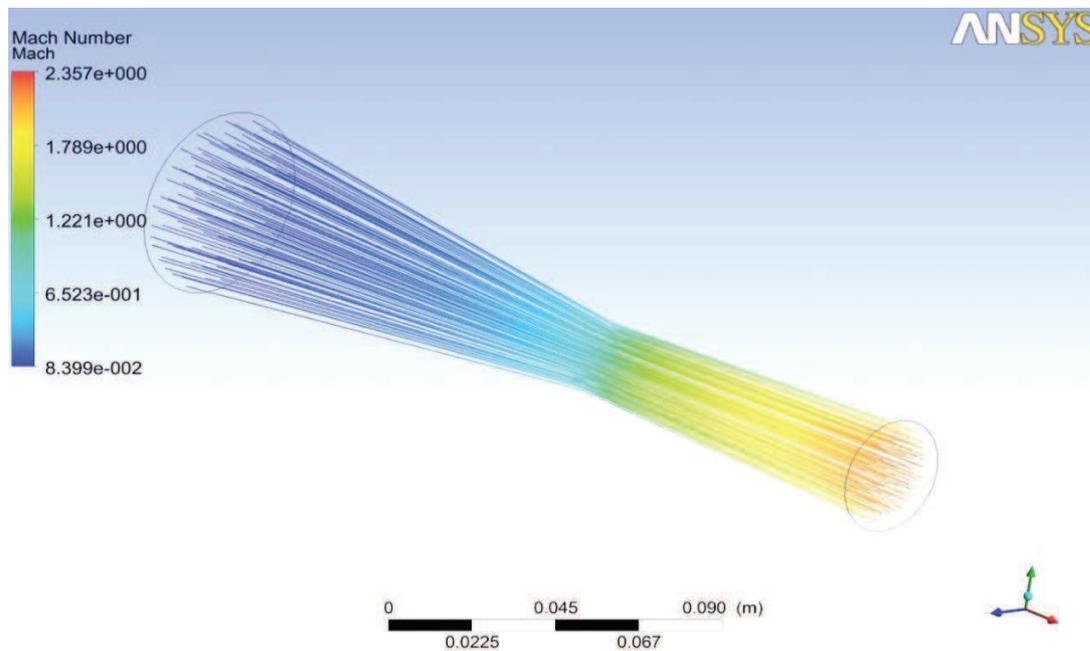


Figura 4.28 Distribución del Número de Mach para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$.

Con los datos de la figura anterior se realiza un gráfico de Número de Mach vs. La posición del fluido dentro de la tobera, esta grafica se muestra en la figura 4.29.

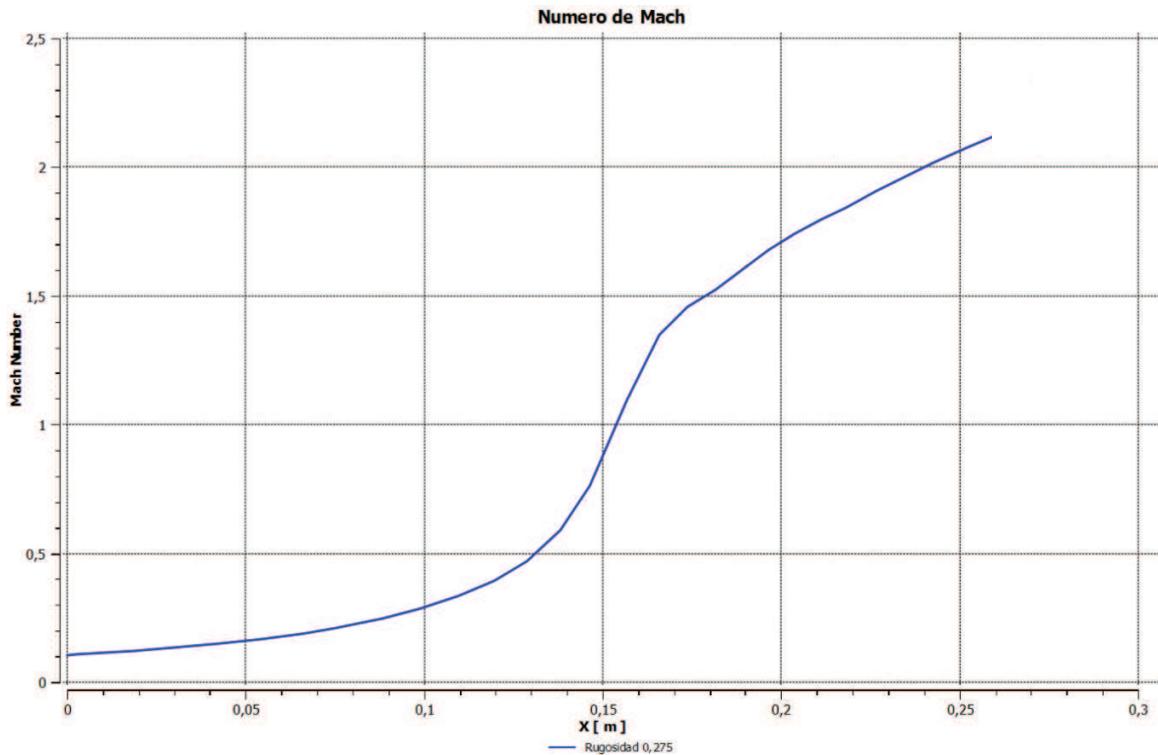


Figura 4.29 Número de Mach vs. Posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$.

A partir de la figura 4.29 se observa como el número de Mach presenta un aumento de su valor a medida que avanza en la tobera lográndose valores supersónicos en la zona divergente de la tobera. También se observa como para lo que se consideraría como la zona crítica o “garganta” en la tobera el valor del número de Mach es aproximadamente 0,9, lográndose el valor de 1 un poco mas aguas abajo de la garganta.

La figura 4.30 muestra la distribución de velocidades para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$.

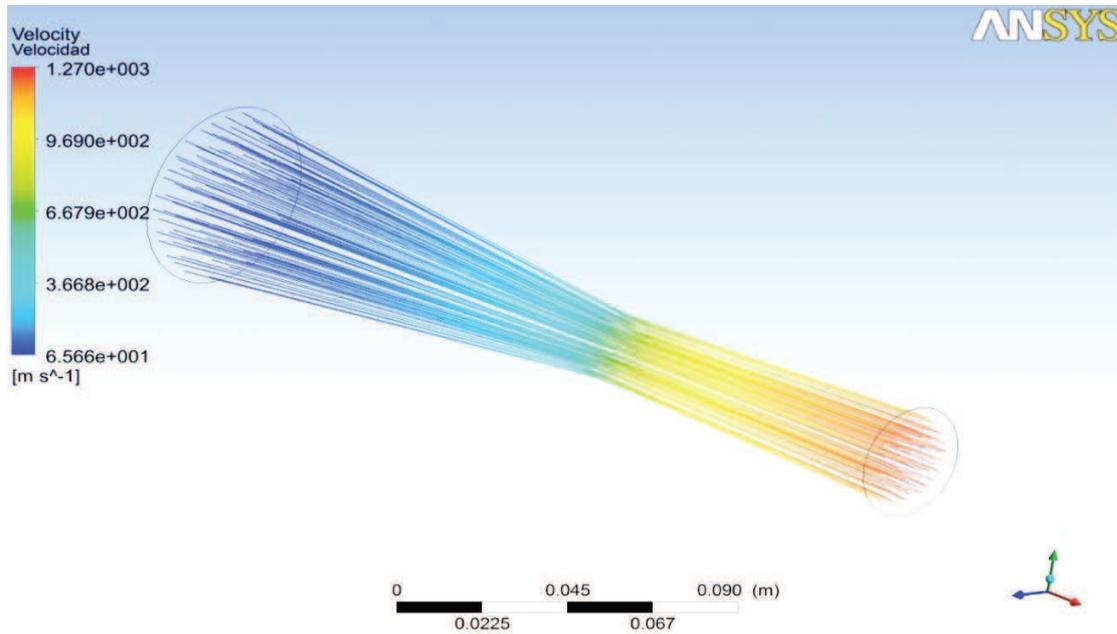


Figura 4.30 Distribución de la velocidad para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$.

Con los datos generados por esta distribución de flujo, se logra la construcción de una gráfica Velocidad vs. Posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$, la cual está representada en la figura 4.31

En la figura 4.31 se observa como la velocidad presenta un comportamiento similar al número de mach, esto en correspondencia a como ambas variables están relacionadas entre si mediante la ecuación (2.18).

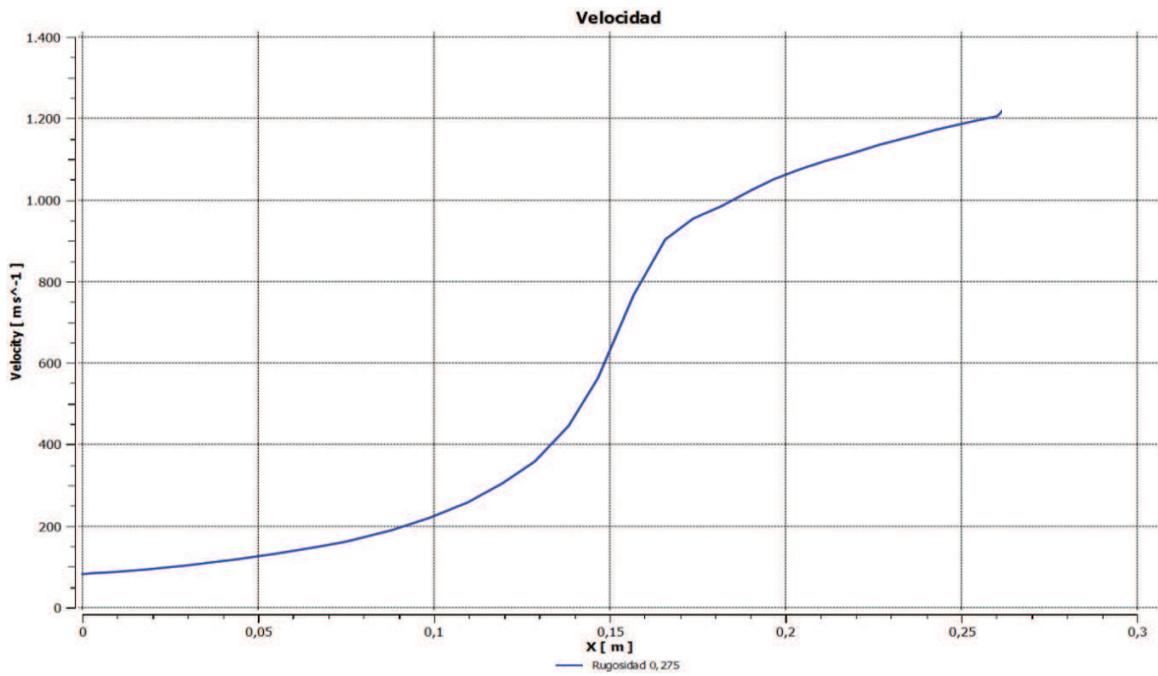


Figura 4.31 Velocidad vs posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$.

La figura 4.32 se expone la distribución de temperatura para la tobera convergente divergente para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$

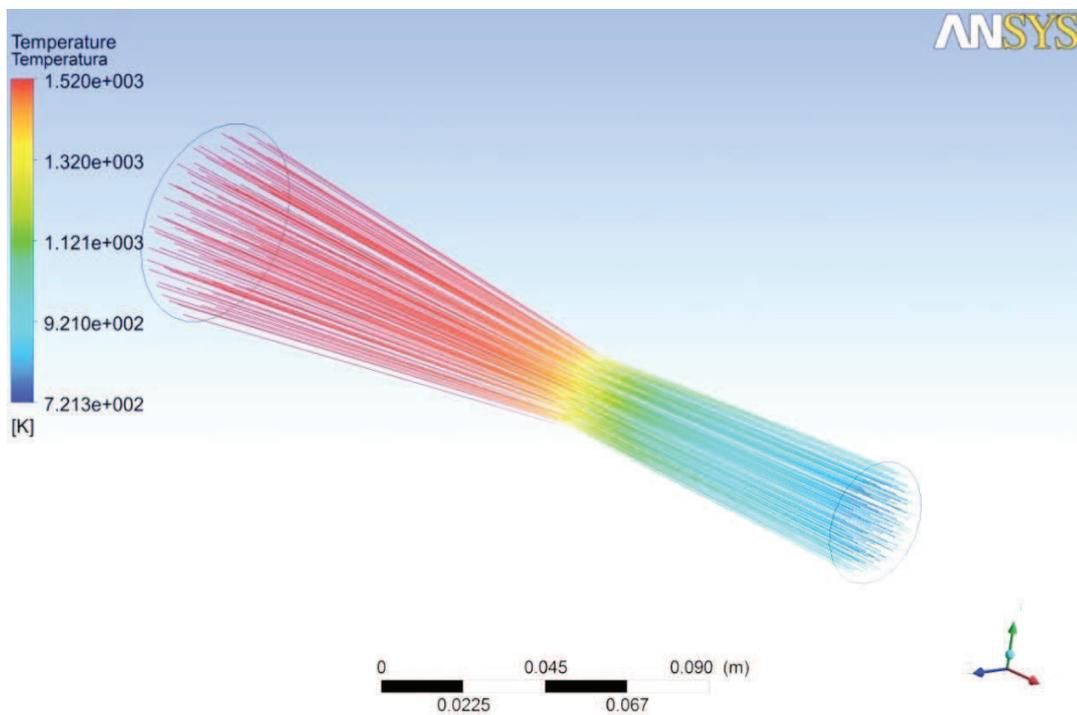


Figura 4.32 Distribución de la Temperatura para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$.

A partir de los datos generados en la figura 4.32 se construye la grafica Temperatura vs. Posición representada en la figura 4.33, en dicha grafica se observa un decremento de la temperatura del fluido esto debido a dicha perdida de temperatura va en función del aumento de energía cinética del fluido.

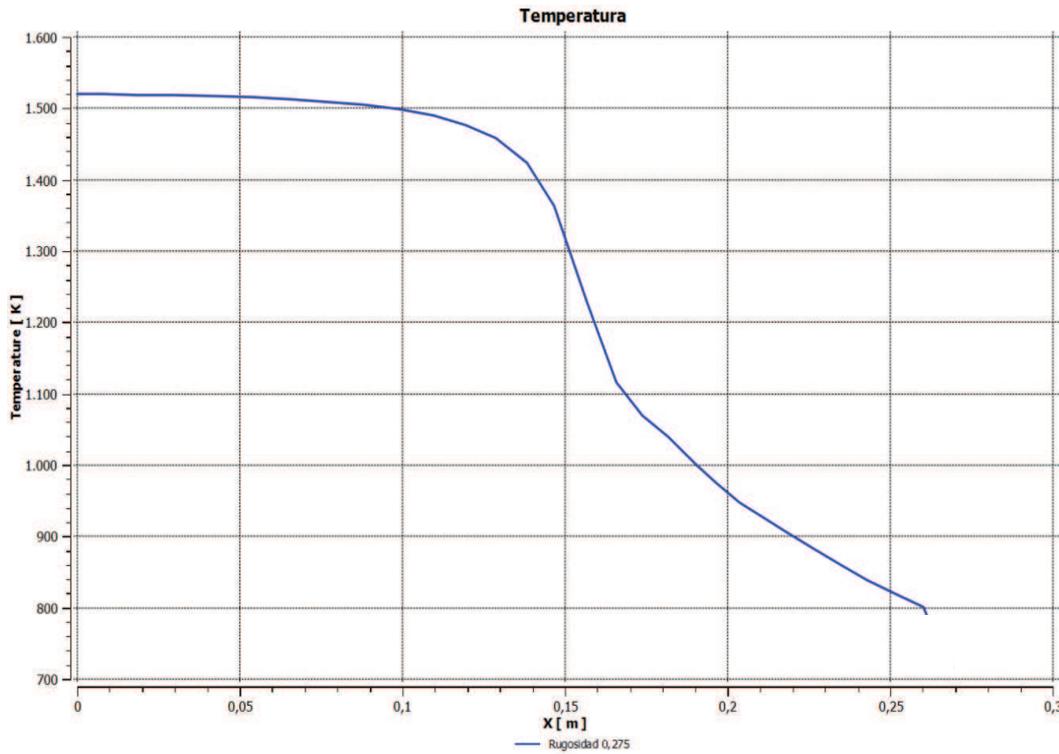


Figura 4.33 Temperatura vs. Posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$

A continuación en la figura 4.34 se presenta la distribución de presión para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$.

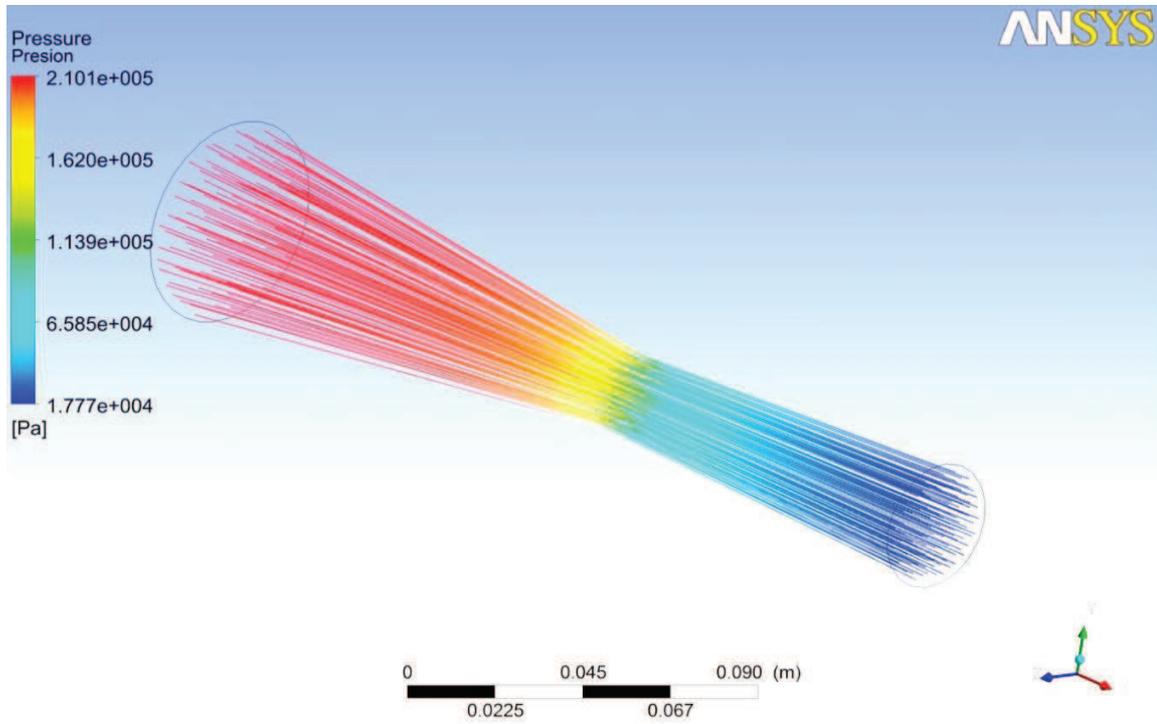


Figura 4.34 Distribución de la presión para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$.

Con la información obtenida de la figura 4.34 se procede a la construcción de la grafica presión vs. Posición representada en la figura 4.35, la cual presenta un comportamiento inverso al del número de Mach.

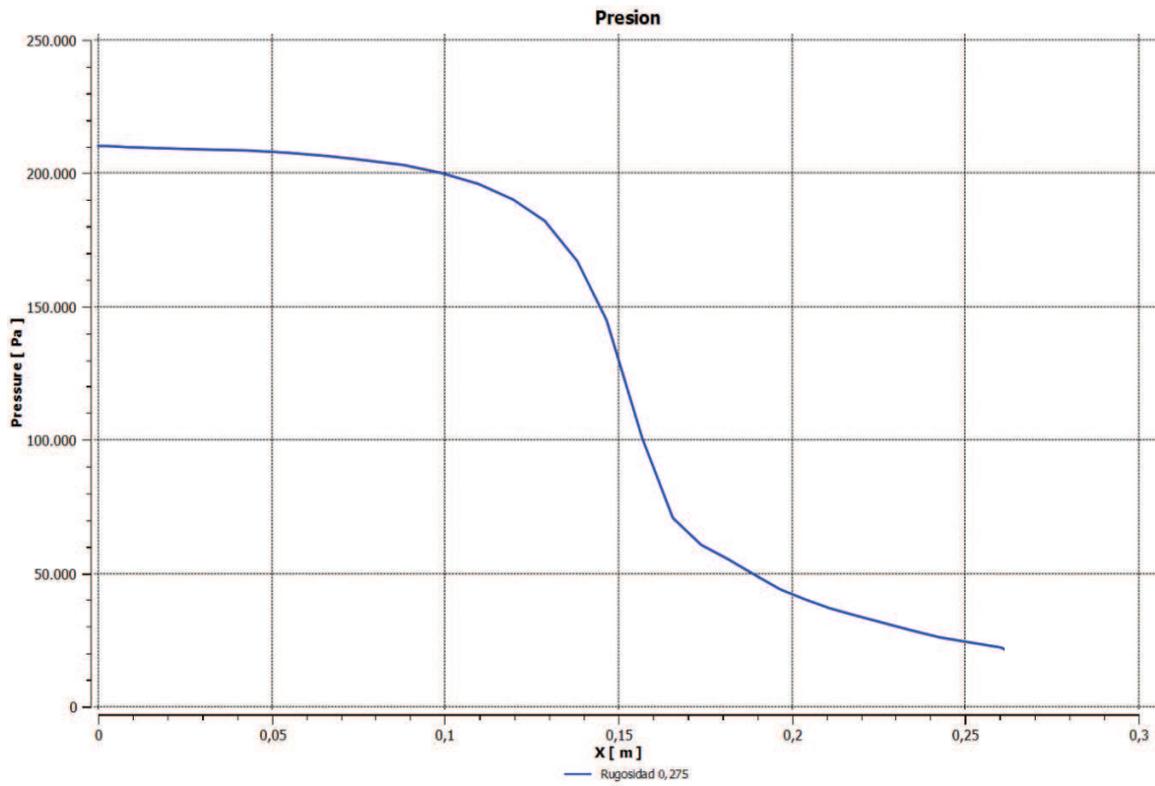


Figura 4.35 Presión vs. Posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,275 \mu\text{m}$.

4.4.3 Estudio de la tobera convergente – divergente para $\varepsilon = 1,1$

En la figura 4.36 presentada a continuación se observa la distribución de número de mach para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 1,1 \mu\text{m}$

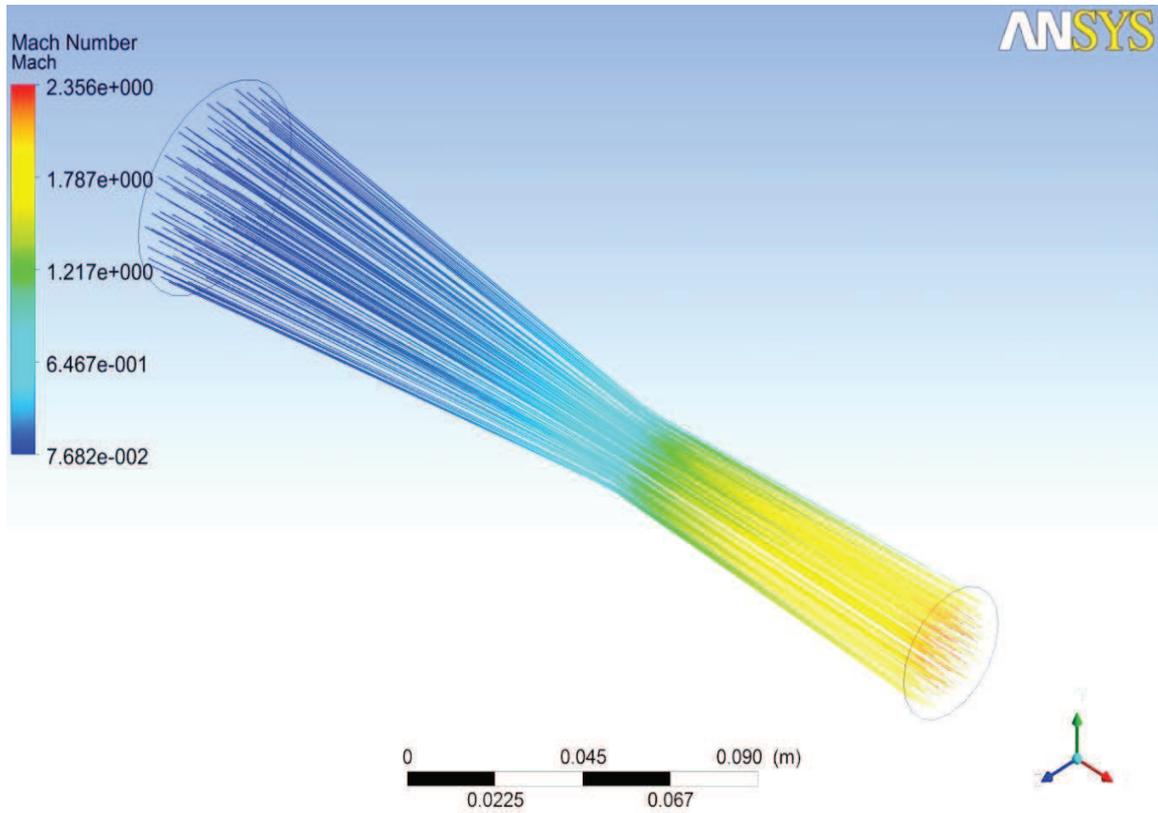


Figura 4.36 Distribución del Número de Mach para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 1,1 \mu\text{m}$

La figura 4.37 corresponde a los datos obtenidos de la figura 4.36 transformados en una gráfica número de Mach vs posición. En dicha figura se observa un incremento en el valor del mismo aunque con valores menores en la zona supersónica que los casos anteriores.

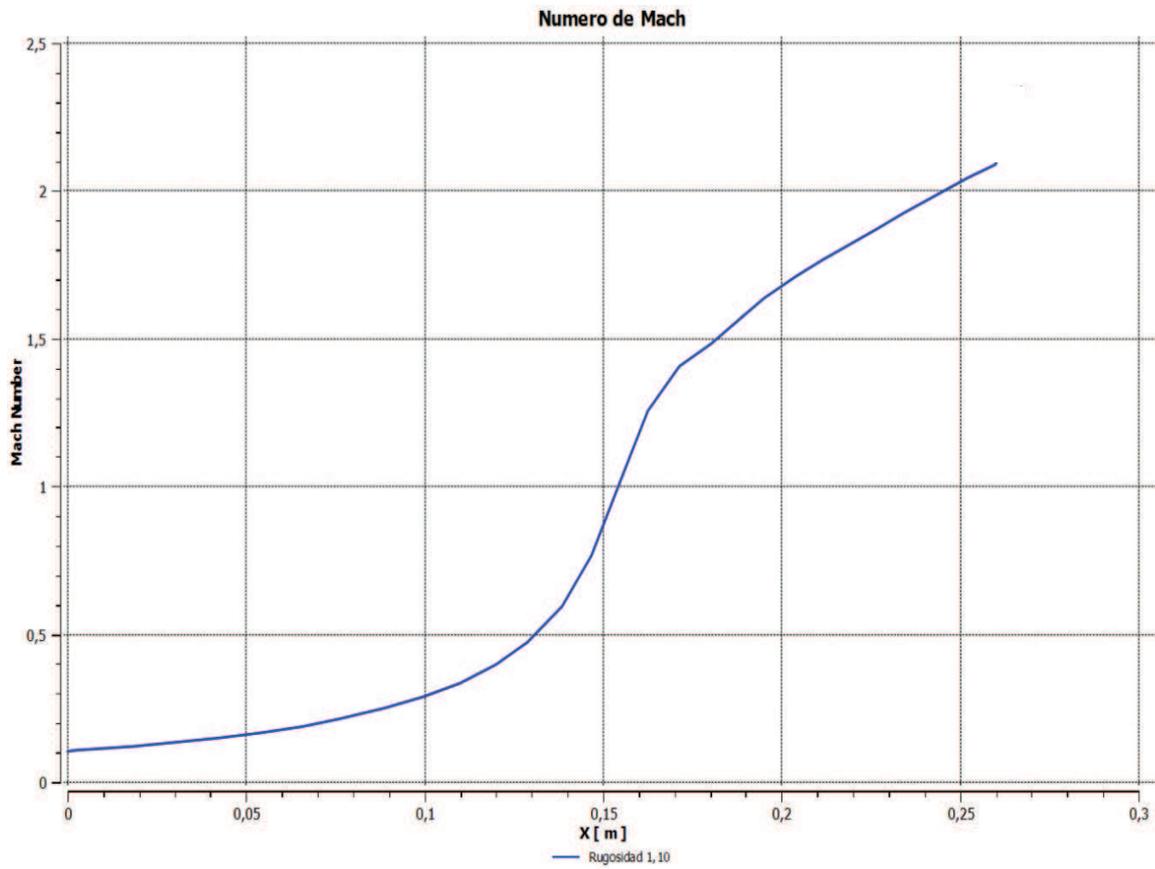


Figura 4.37 Número de Mach vs. Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 1,1 \mu\text{m}$.

La figura 4.38 expone la distribución de velocidades para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 1,1 \mu\text{m}$.

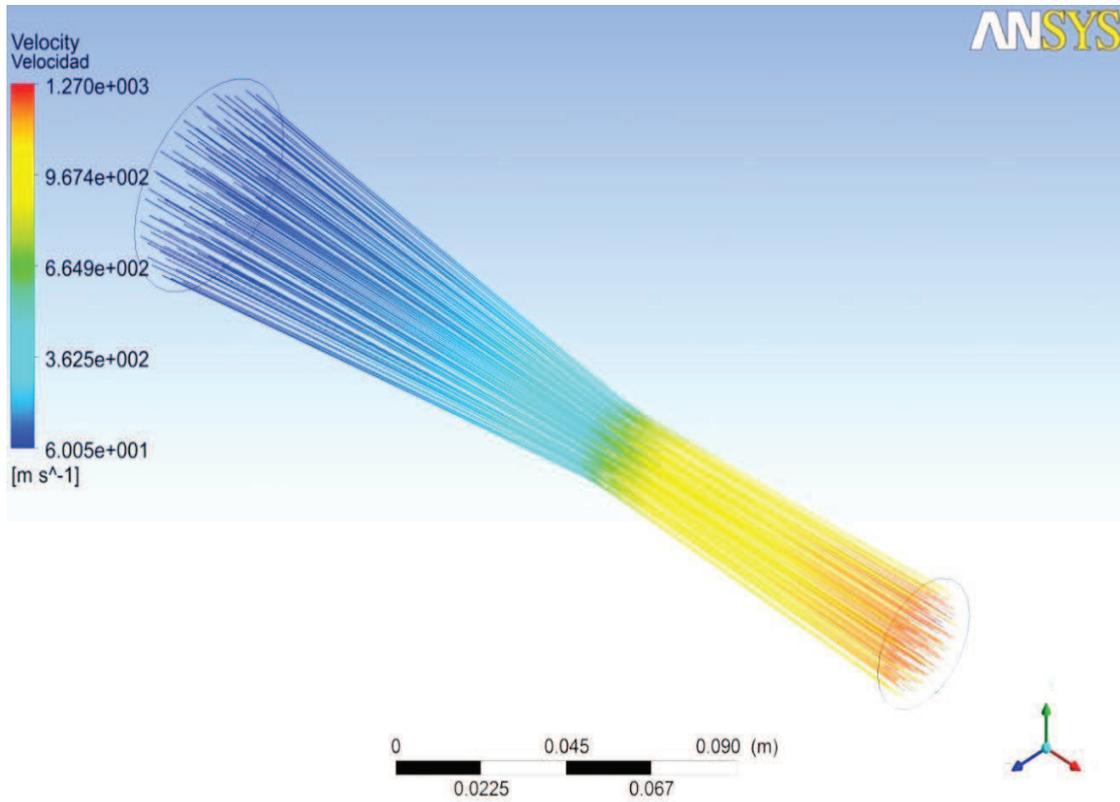


Figura 4.38 Distribución de la velocidad para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 1,1 \mu\text{m}$.

Con los datos suministrados por la figura 4.38 se procede a la elaboración de la gráfica Velocidad vs. Posición representada en la figura 4.39, en la misma se observa un comportamiento similar al número de Mach, es decir, se genera una razón de aumento menor en la zona supersónica de la tobera con respecto en comparación con rugosidades absolutas inferiores

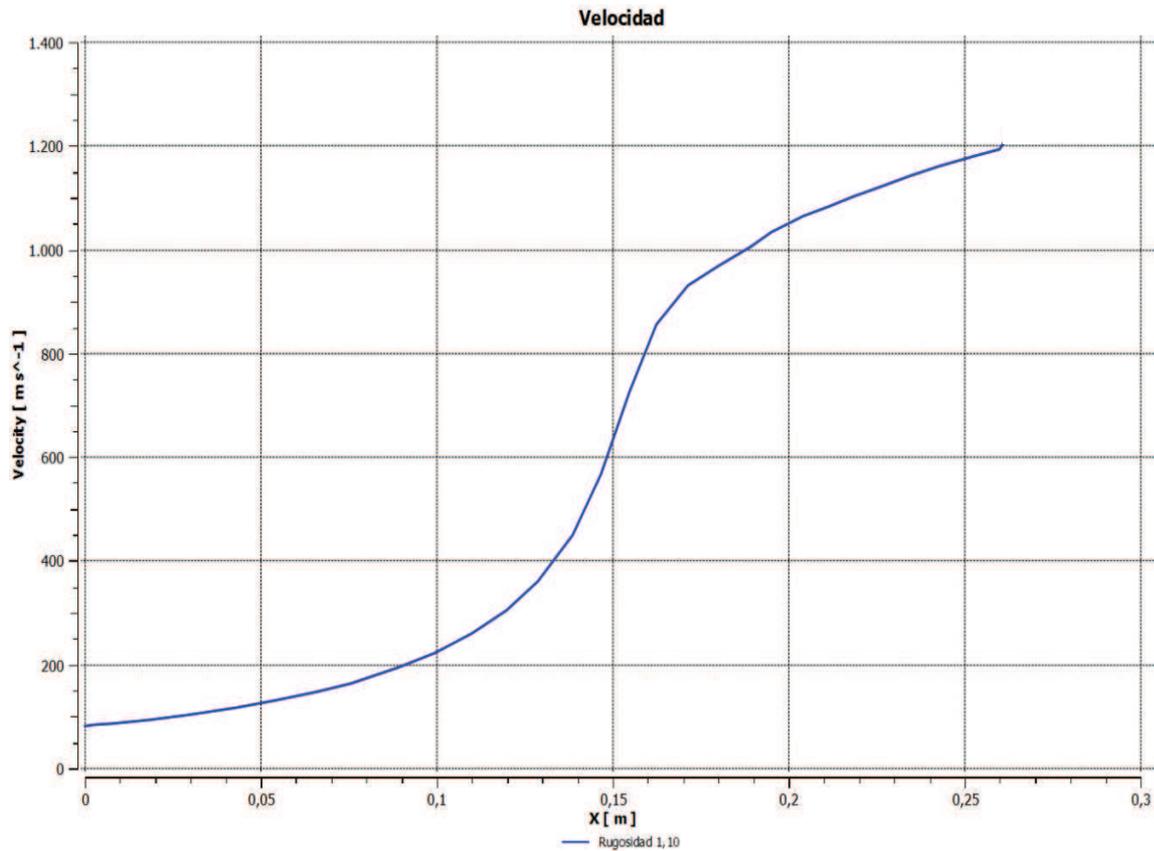


Figura 4.39 Velocidad vs. Posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 1,1 \mu\text{m}$

La distribución de temperatura para una rugosidad absoluta $\epsilon = 1,10 \mu\text{m}$, en la pared interna de la tobera convergente divergente esta representada en la figura 4.40.

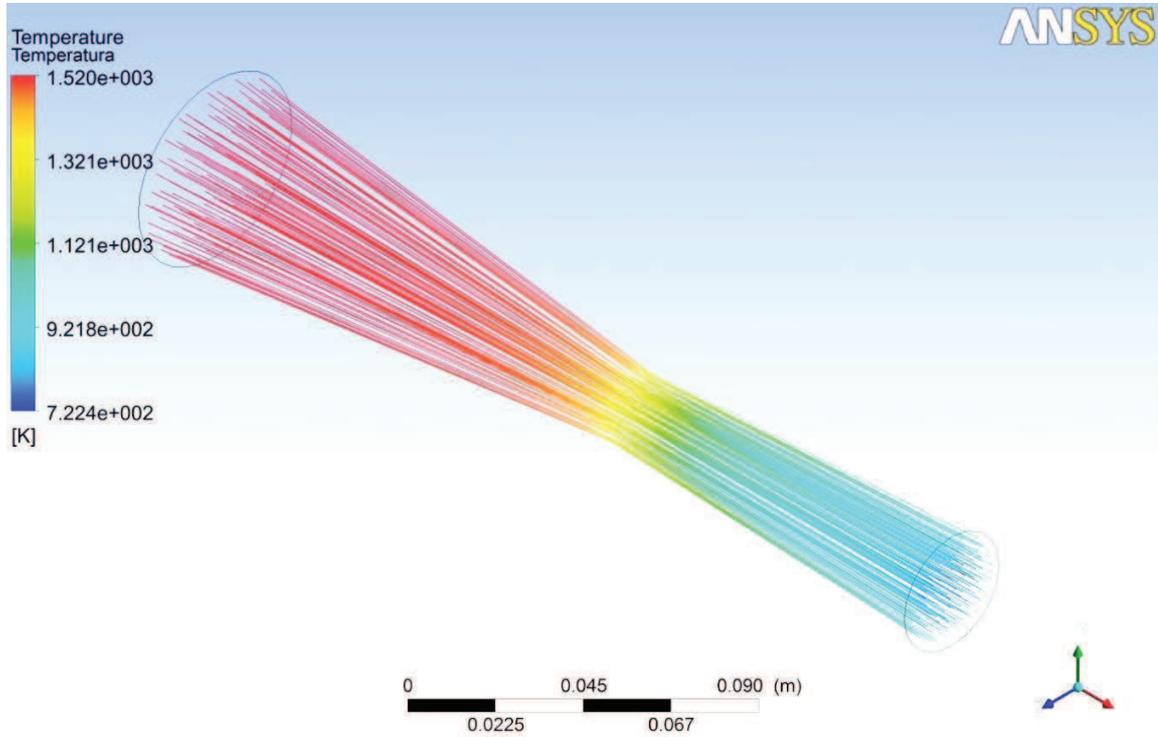


Figura 4.40 Distribución de la temperatura para una rugosidad absoluta $\epsilon = 1,1 \mu\text{m}$.

A partir de los datos obtenidos en la figura 4.40 se construye la gráfica Temperatura vs. Posición, la cual está representada en la figura 4.41, se observa como hay un decremento de la temperatura a medida que el fluido avanza a través de la tobera. Teniendo valores superiores en la zona supersónica en comparación con rugosidades menores.

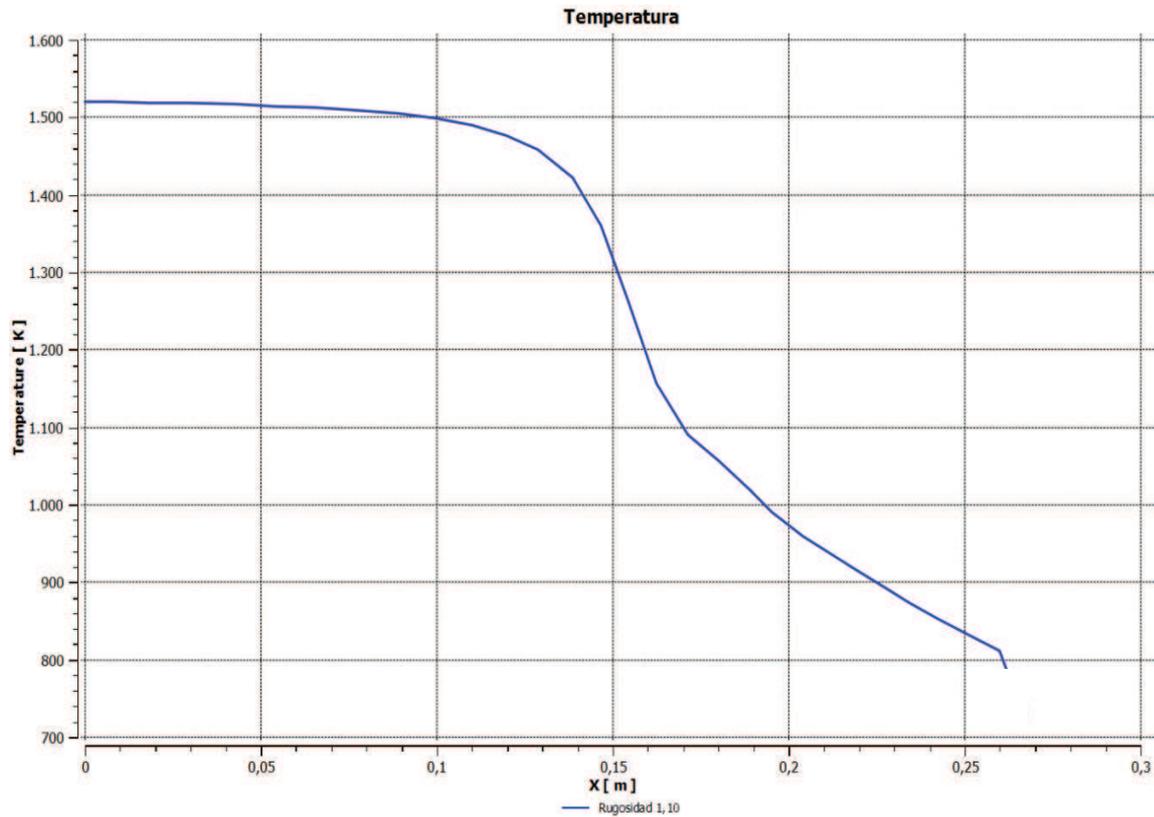


Figura 4.41 Temperatura vs. Posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 1,1 \mu\text{m}$.

A continuación se muestra la figura 4.42 que representa la distribución de presión en la tobera convergente divergente con una rugosidad absoluta $\epsilon = 1,10 \mu\text{m}$.

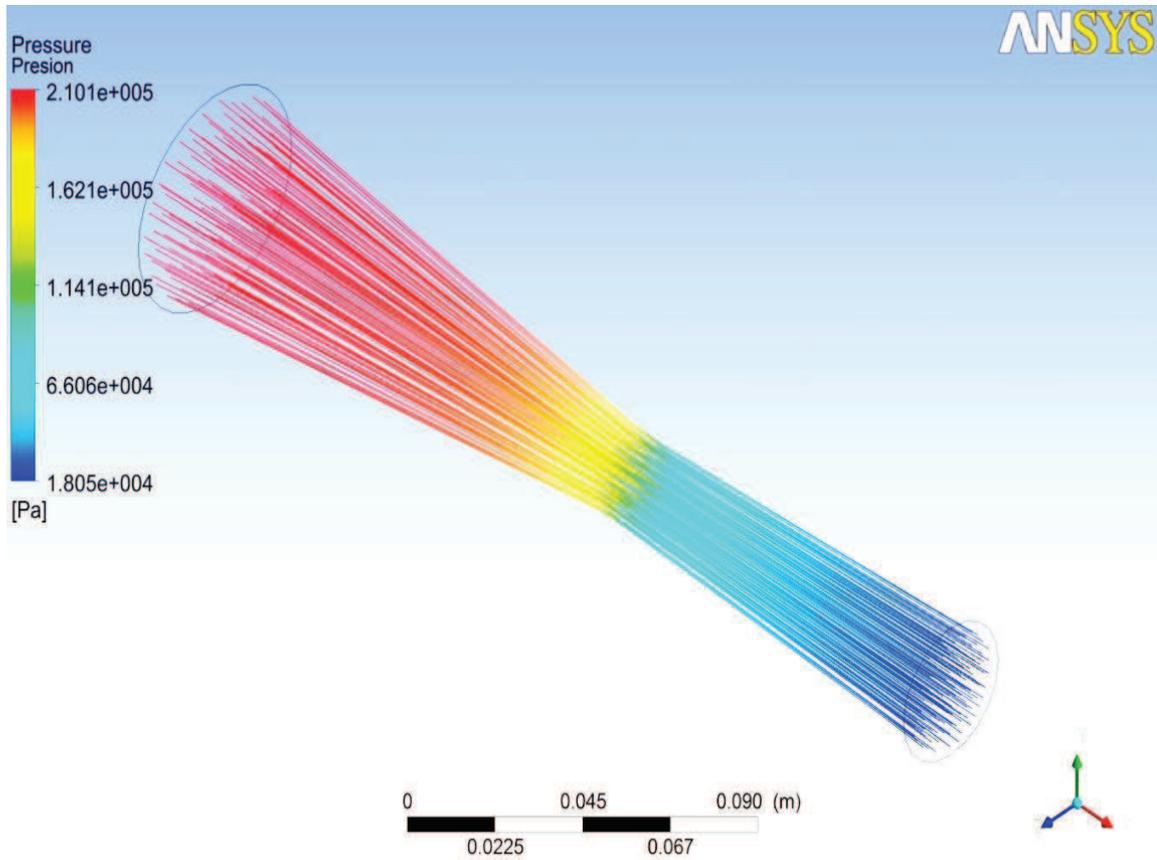


Figura 4.42 Distribución de la presión para una rugosidad absoluta $\epsilon = 1,1 \mu\text{m}$.

Con la información obtenida en la figura 4.42 se construye la grafica Presión vs Posición representada en la figura 4.43, en la cual se como la presión presenta un comportamiento similar a otros valores de rugosidad en su área subsónica; sin embargo presenta valores inferiores de presión respecto a otros valores de rugosidad inferiores.

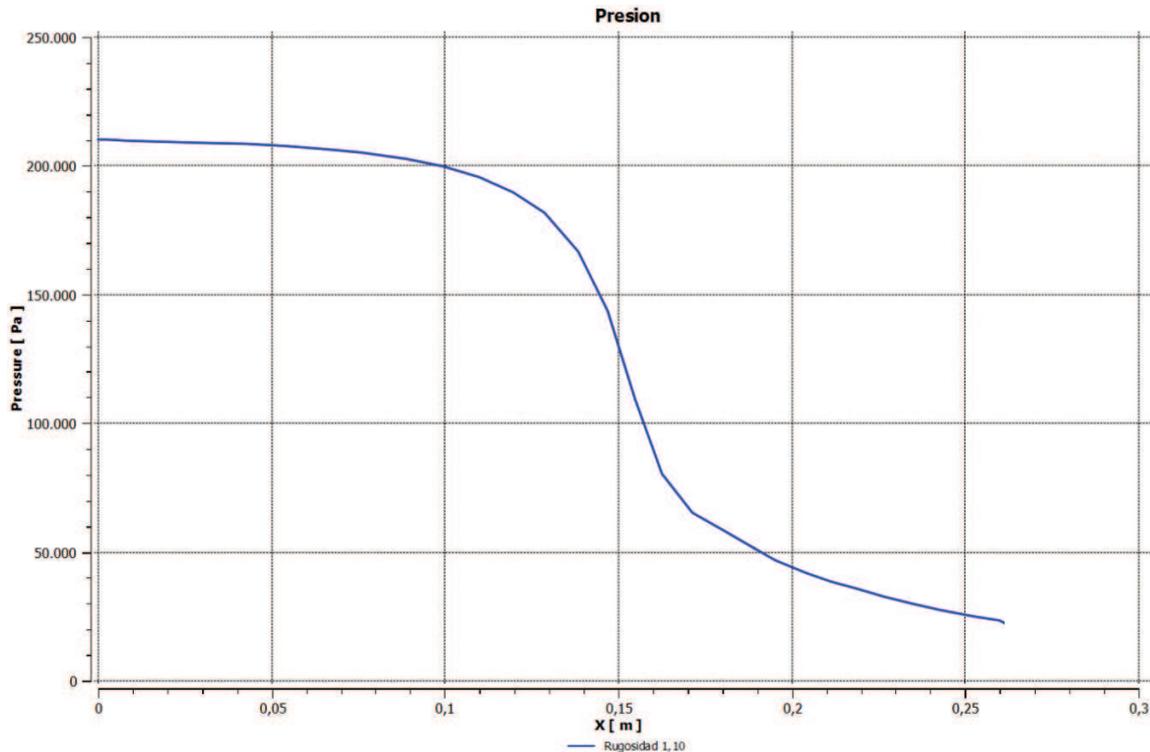


Figura 4.43 Presión vs. Posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 1,1 \mu\text{m}$

4.4.5 Estudio de la tobera convergente divergente para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,55 \mu\text{m}$.

- La curva número de mach vs posición presenta un comportamiento similar a los diferentes casos sólo con variaciones mínimas en el valor de salida de la variable mencionada. (ver figura A.2)
- Se observa un comportamiento similar al del número de Mach en la curva de velocidad, esto en correspondencia con lo explicado anteriormente y las relaciones que ambos comparten. Ver figura A.4
- En la gráfica temperatura vs posición se observa variación en los valores a la salida de la tobera, esto con respecto a valores inferiores de rugosidad absoluta. Ver figura A.6

- La curva de presión presenta un comportamiento inverso al del número de Mach, esto a consecuencia de la variación de la sección transversal así como del régimen de flujo. Ver figura A.8

4.4.6 Estudio de la tobera convergente divergente para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825 \mu\text{m}$.

- En la gráfica número de Mach vs posición, al igual que el caso anterior presenta un comportamiento similar a otros casos. Ver figura A.10
- La curva de velocidad tiene un comportamiento similar al del número de Mach, igualmente con variaciones mínimas en la velocidad de salida de la tobera. Ver figura A.12
- Al observar la gráfica de temperatura vs posición se observa una tendencia a la disminución de la temperatura mencionada como es lo esperado, sin embargo dicha razón de reducción en los valores de temperatura es ligeramente menor con respecto a la tobera sin rugosidad. Ver figura A.14
- La curva presión vs posición presenta el comportamiento contrario al del número de mach. Ver figura A.16

4.4.7 Estudio de la tobera convergente divergente para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$

La figura 4.44 representa la distribución del número de Mach para una cantidad de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$.

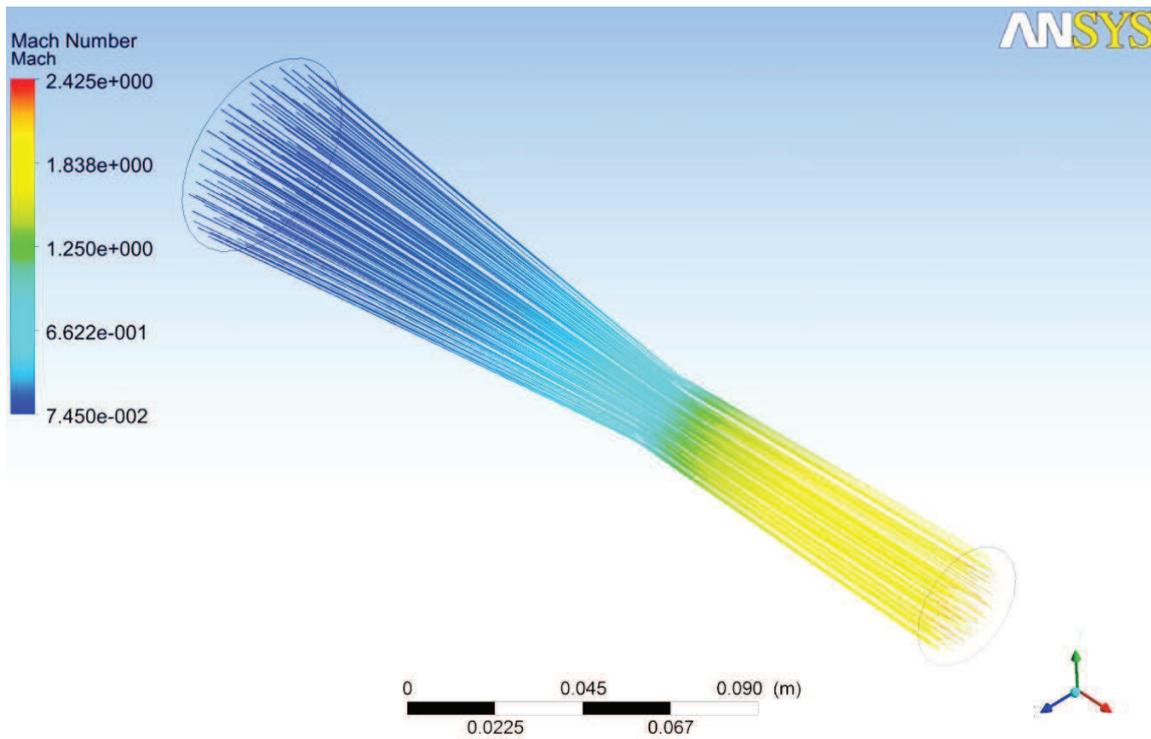


Figura 4.44 Distribución del Número de Mach para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$

Con los datos suministrados en la figura 4.44 se procede a la construcción de la gráfica número de Mach vs. Posición, representada en la figura 4.45, se observa como el mismo presenta un incremento a medida que avanza el fluido en la tobera.

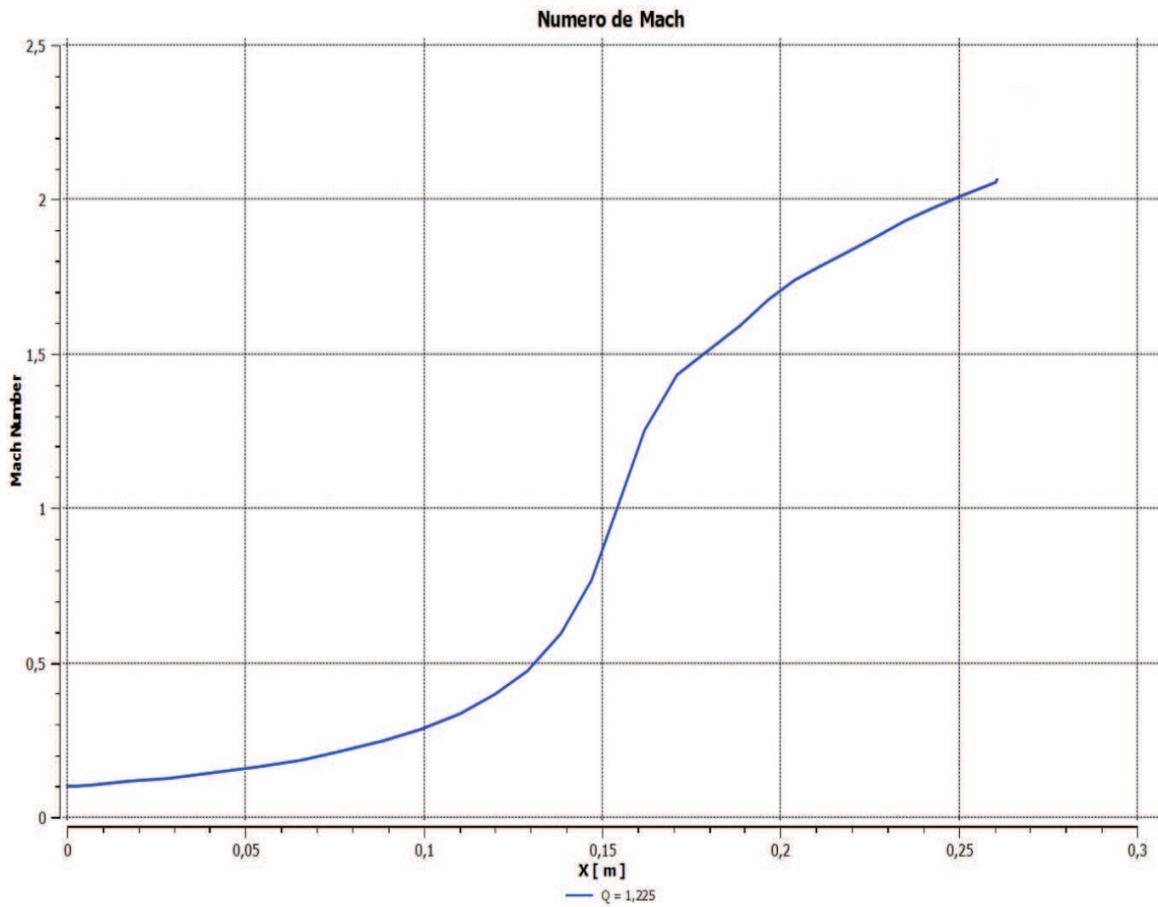


Figura 4.45 Número de Mach vs. Posición para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$

La figura 4.46 representa la distribución de la velocidad en la tobera para una cantidad de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$.

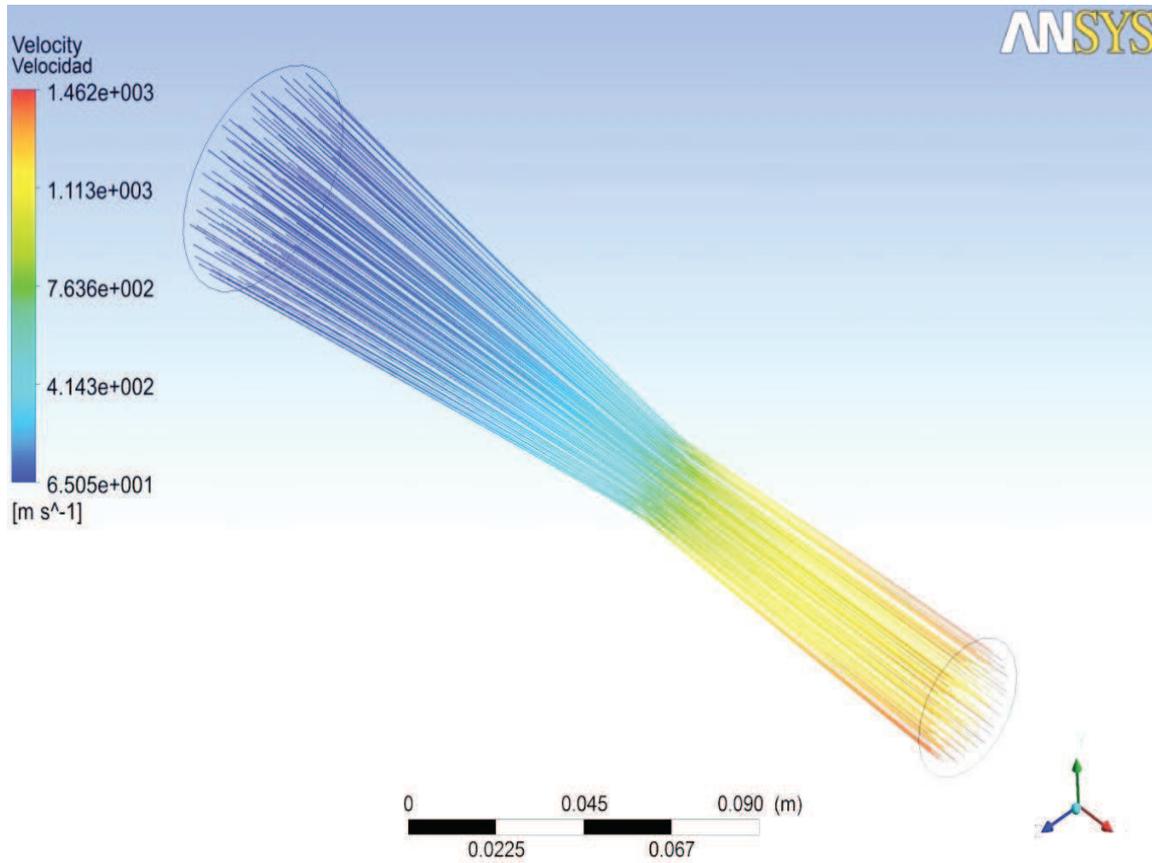


Figura 4.46 Distribución de la velocidad para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$.

A partir de los datos obtenidos en la figura anterior se procede a elaborar la gráfica velocidad vs. Posición, la cual está representada en la figura 4.47, en la misma se observa como la velocidad presenta un comportamiento similar al número de mach, igualmente presentando valores menores que cuando no hay transferencia de calor.

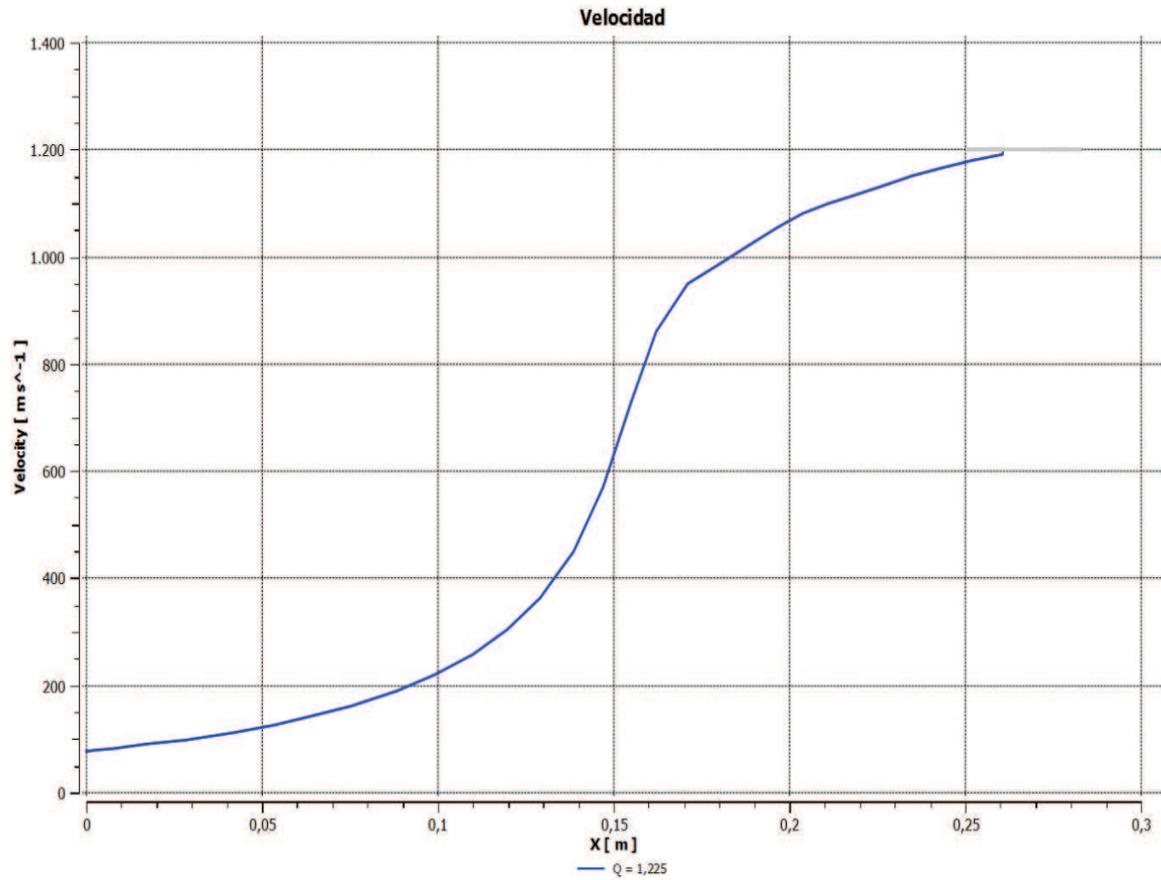


Figura 4.47 Velocidad vs. Posición para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$

A continuación se presenta la distribución de temperatura en la tobera convergente – divergente para una cantidad de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$. Ver figura 4.48.

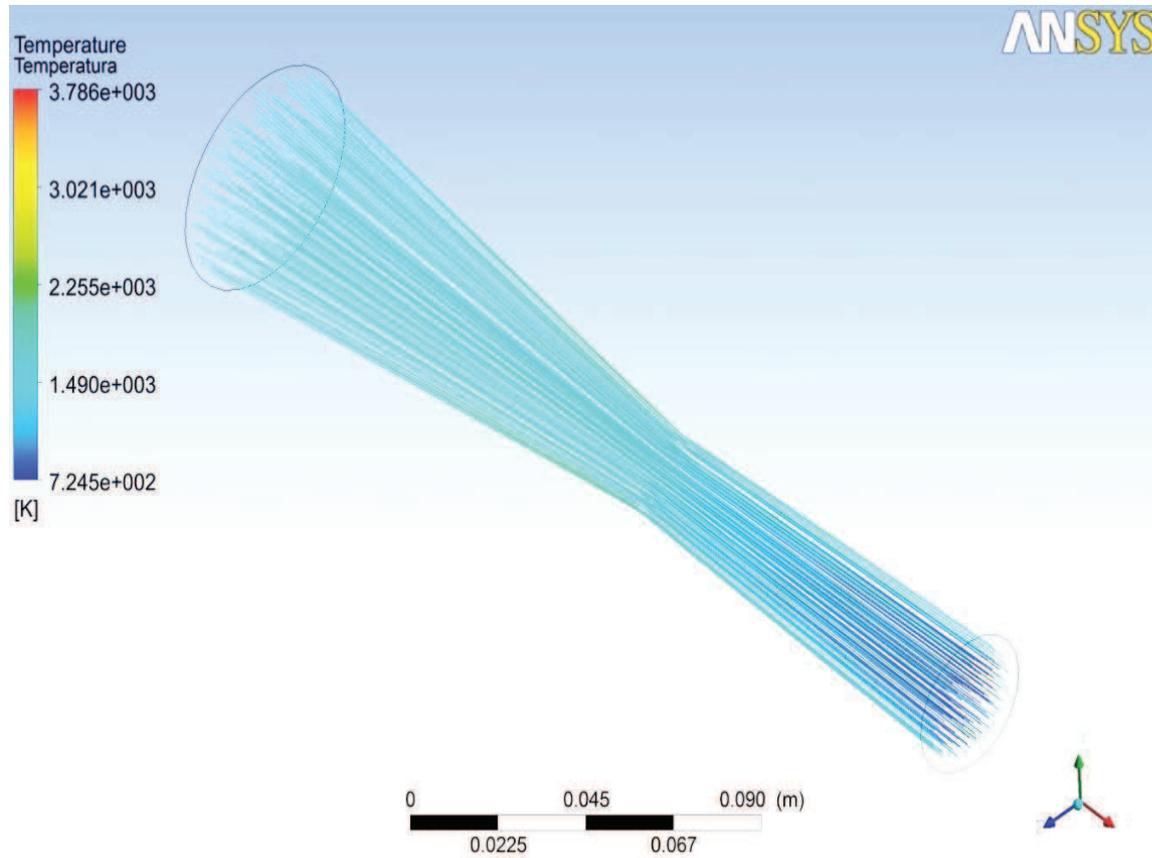


Figura 4.48 Distribución de la temperatura para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$.

Mediante los datos obtenidos de la figura 4.48 se elabora la grafica temperatura vs. Posición, se observa como es esperado que la temperatura de salida sea superior en comparación a cuando no hay transferencia de calor. Sin embargo la temperatura sigue presentando un comportamiento de disminución de sus valores a lo largo de la tobera

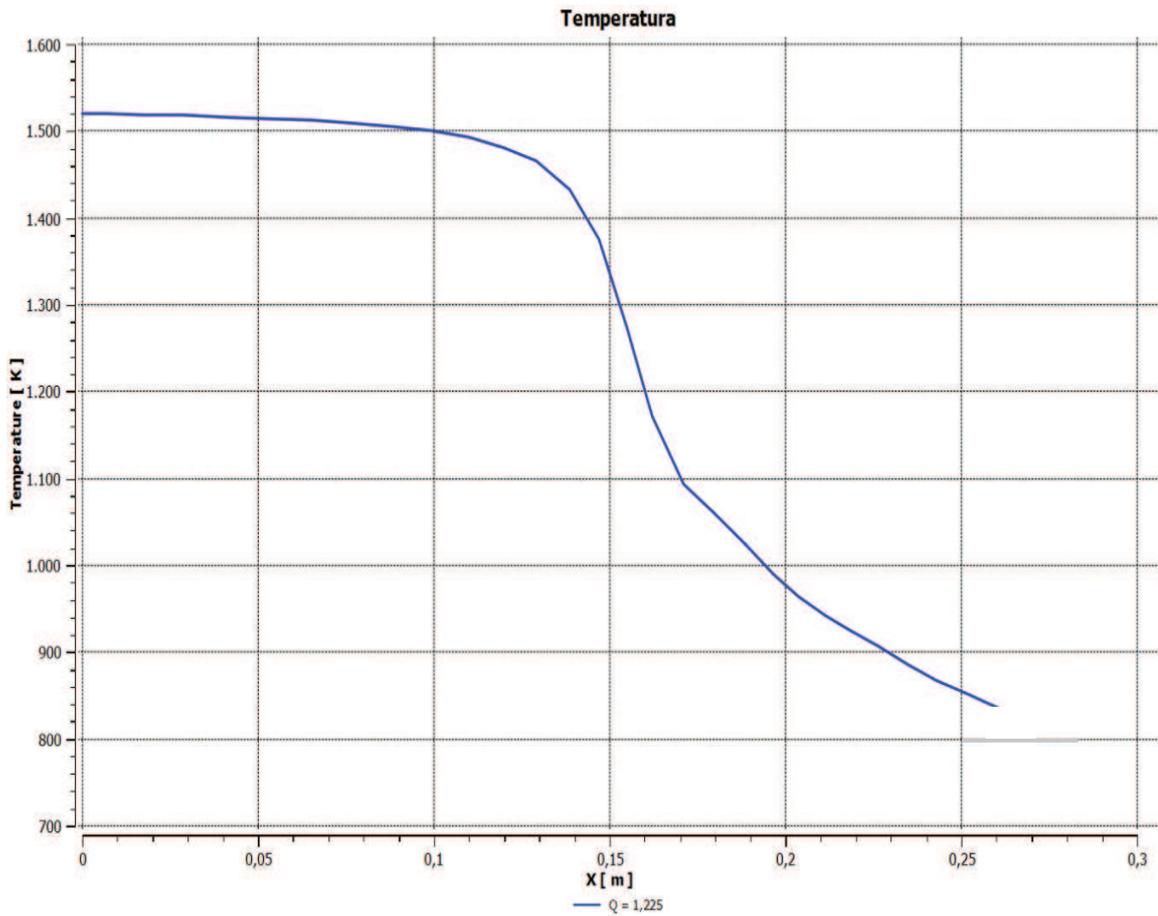


Figura 4.49 Temperatura vs. Posición para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$

La figura 4.50 representa la distribución de presión para un cantidad de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$.

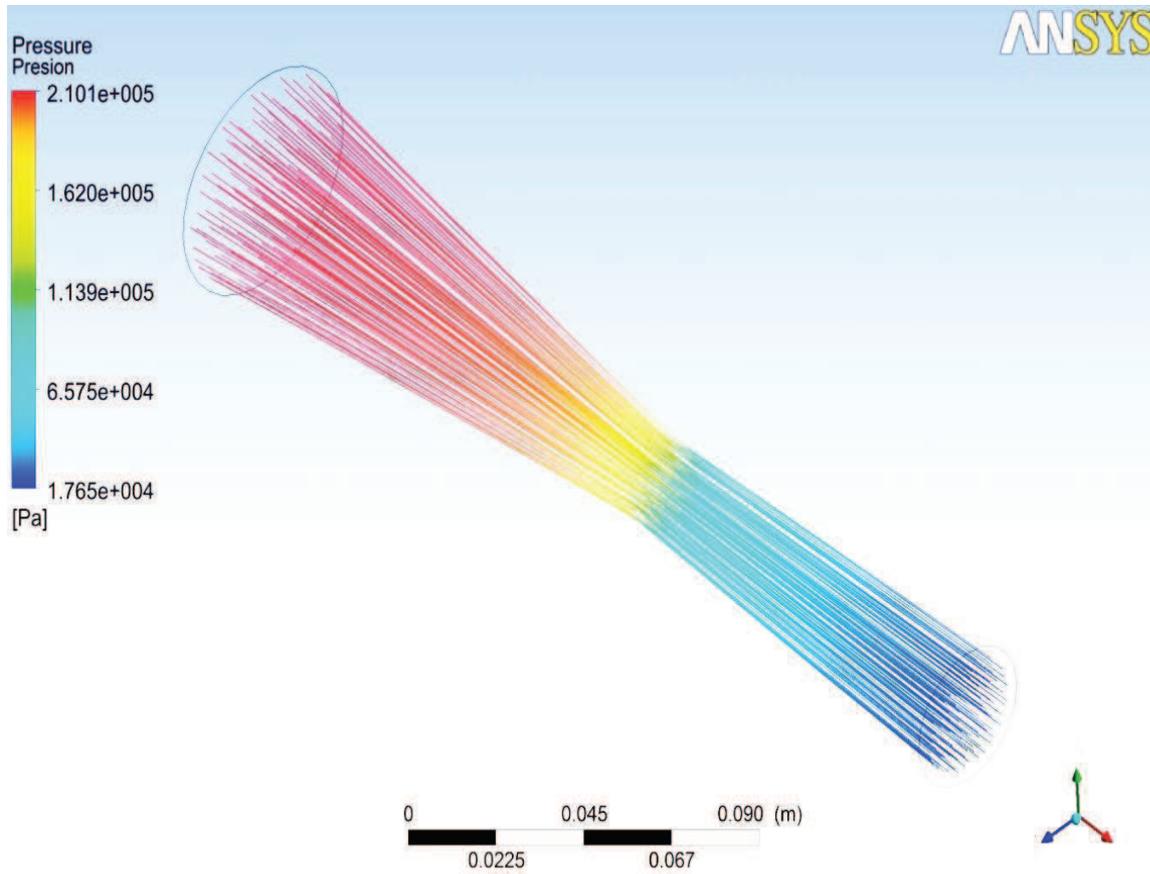


Figura 4.50 Distribución de la presión para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$.

A partir de los resultados de la figura 4.50 se realiza la grafica presión vs. Posición, la cual esta representada en la figura 4.51, en la cual se observa un decremento de la presión esto como resultado de la conversión de energía para poder producir un incremento de la velocidad.

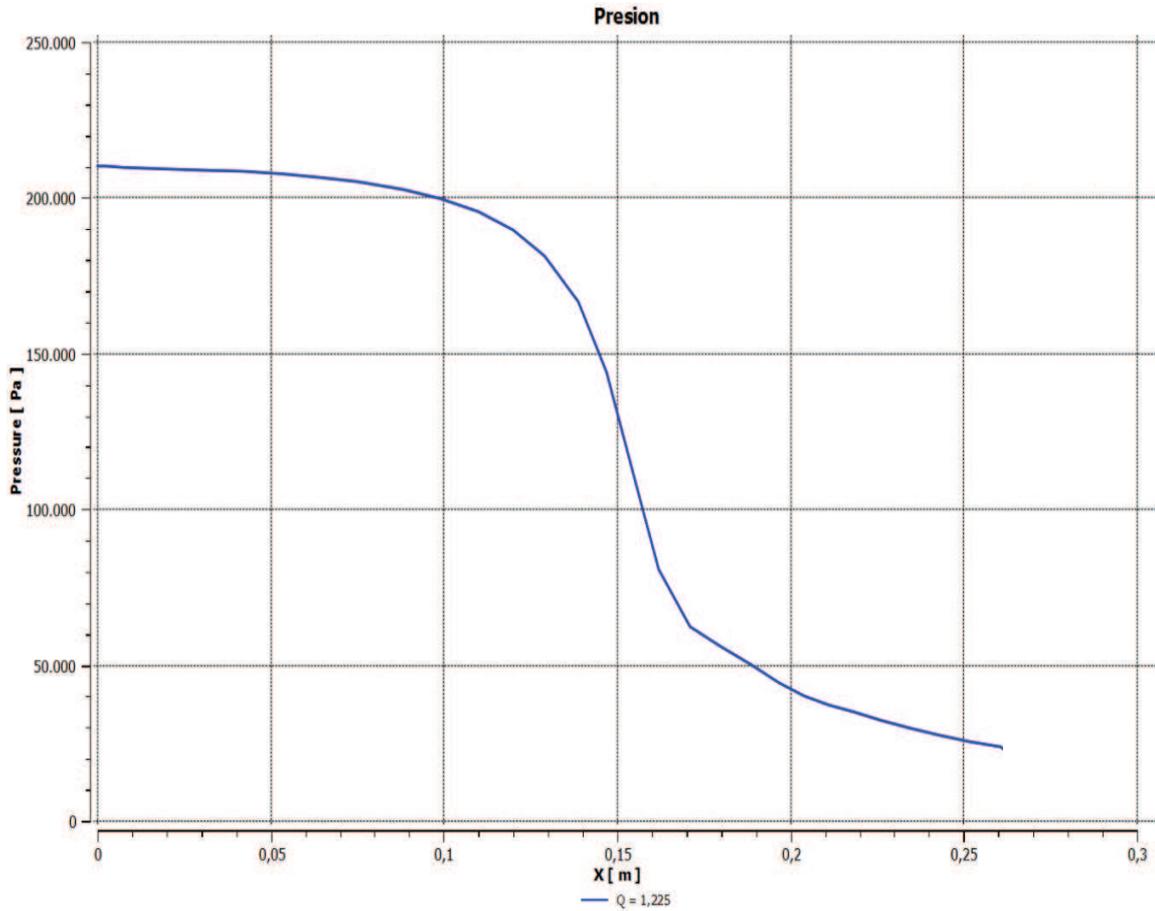


Figura 4.51 Presión vs. Posición para un flujo de calor $Q = 1,225 \text{ MW/m}^2$.

4.4.8 Estudio de la tobera convergente – divergente para una cantidad de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.

La figura 4.52 representa la distribución del número de Mach para una cantidad de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.

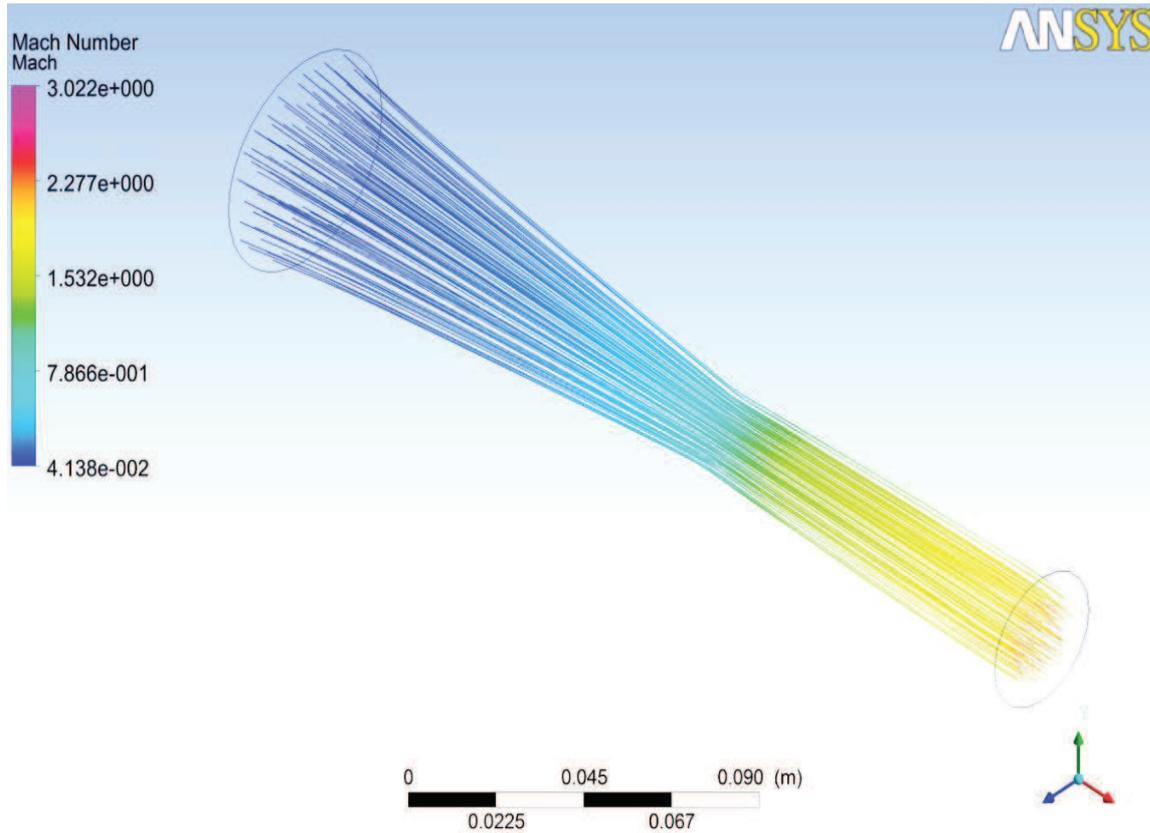


Figura 4.52 Distribución del Número de Mach para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$,

Con los datos obtenidos en la figura 4.52 se construye la gráfica número de Mach vs. Posición, representada en la figura 4.53 y donde se observa que el valor de salida del número de Mach es menor con respecto a otros valores de cantidad de calor inferiores.

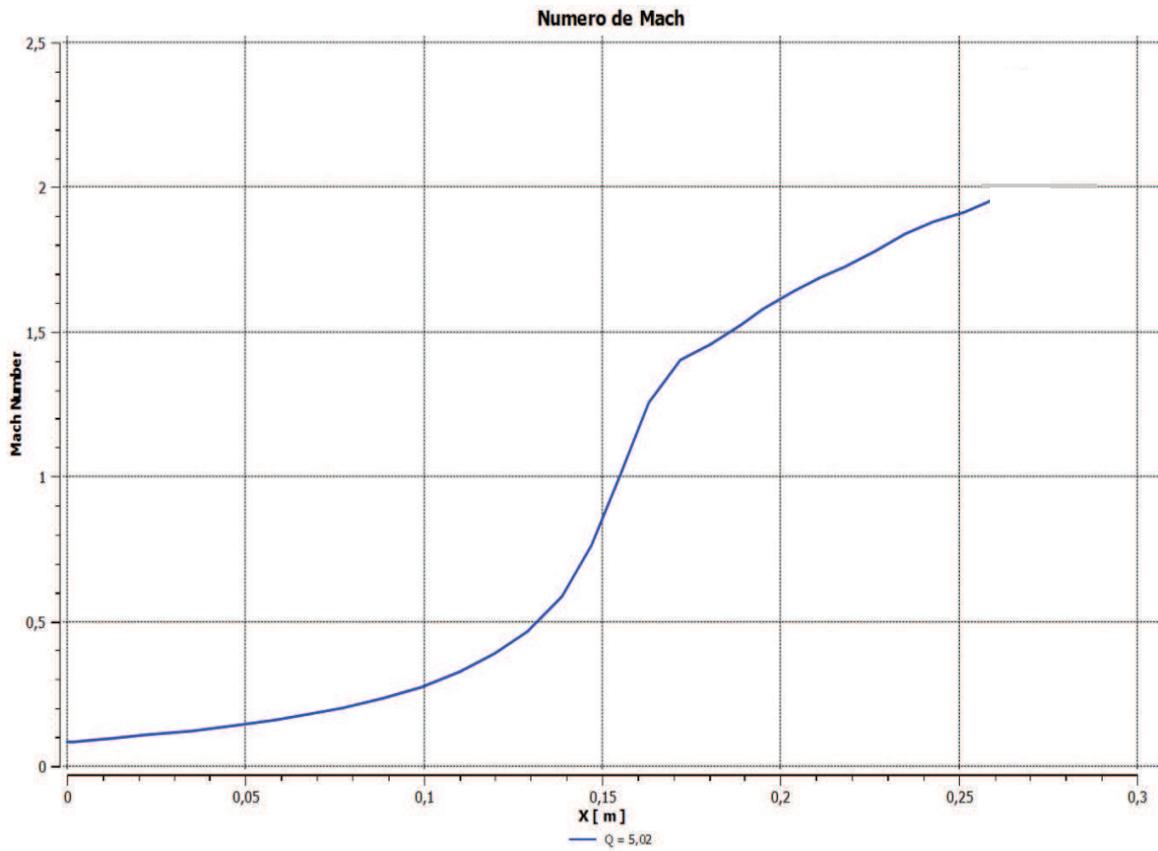


Figura 4.53 Número de Mach vs. Posición para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.

La figura 4.54 muestra la distribución de velocidad en flujo de la tobera convergente – divergente para una cantidad de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.

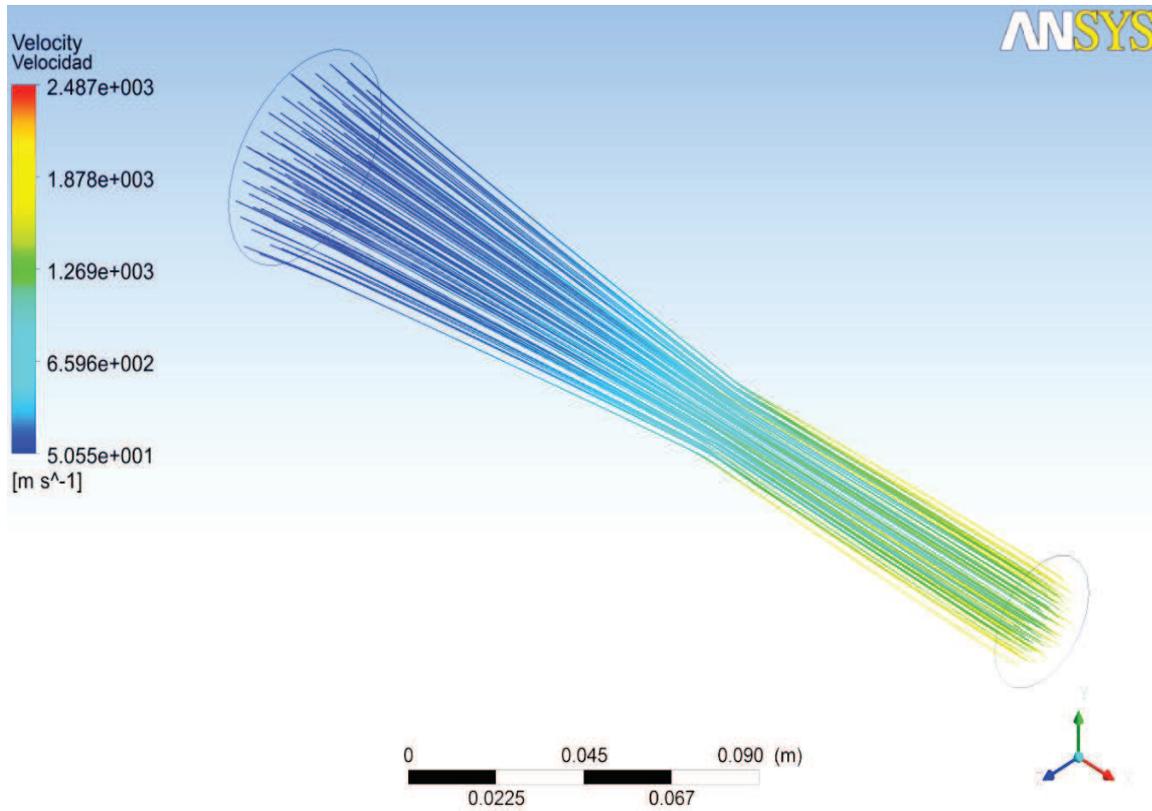


Figura 4.54 Distribución de la velocidad para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.

A partir de los datos de la figura 4.54, se elabora la gráfica velocidad vs. Posición que está representada por la figura 4.55, en la cual se observa un comportamiento similar al presentado por el número de mach.

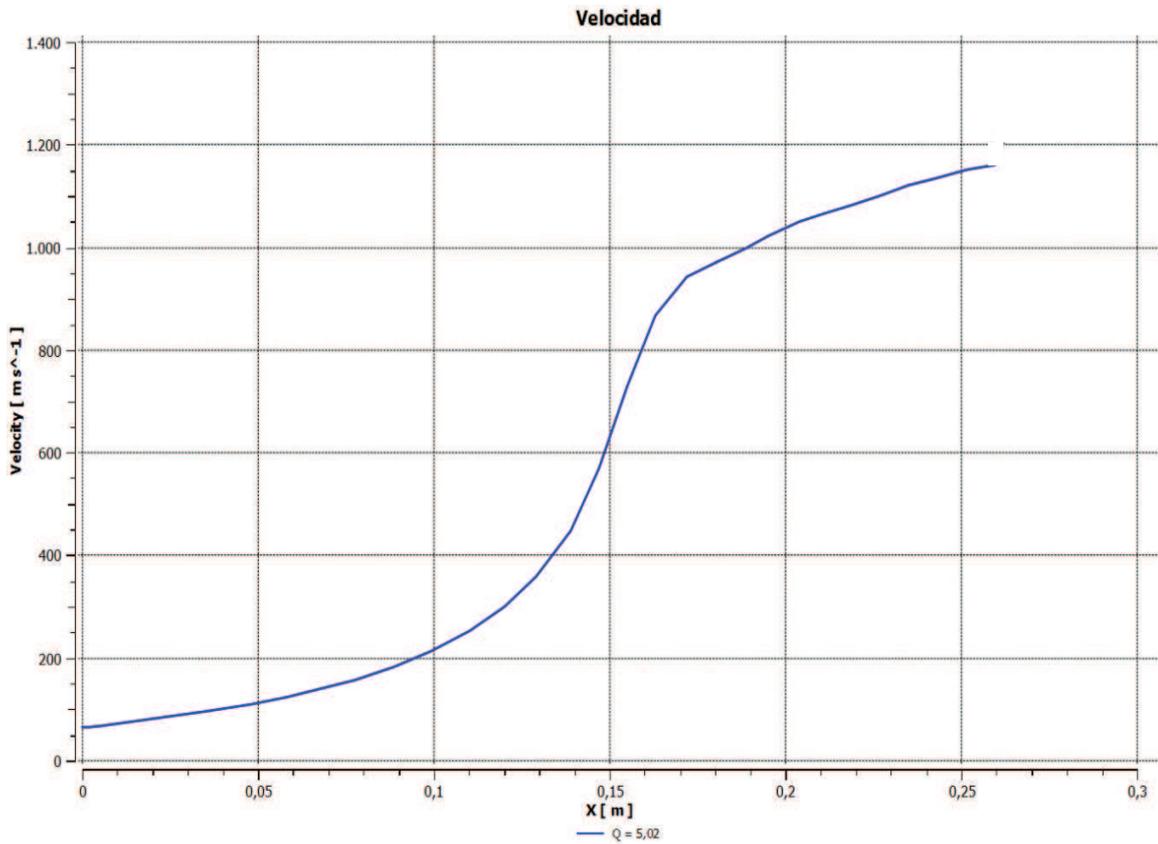


Figura 4.55 Velocidad vs. Posición para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.

A continuación está la figura 4.56 que representa la distribución de temperatura para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.

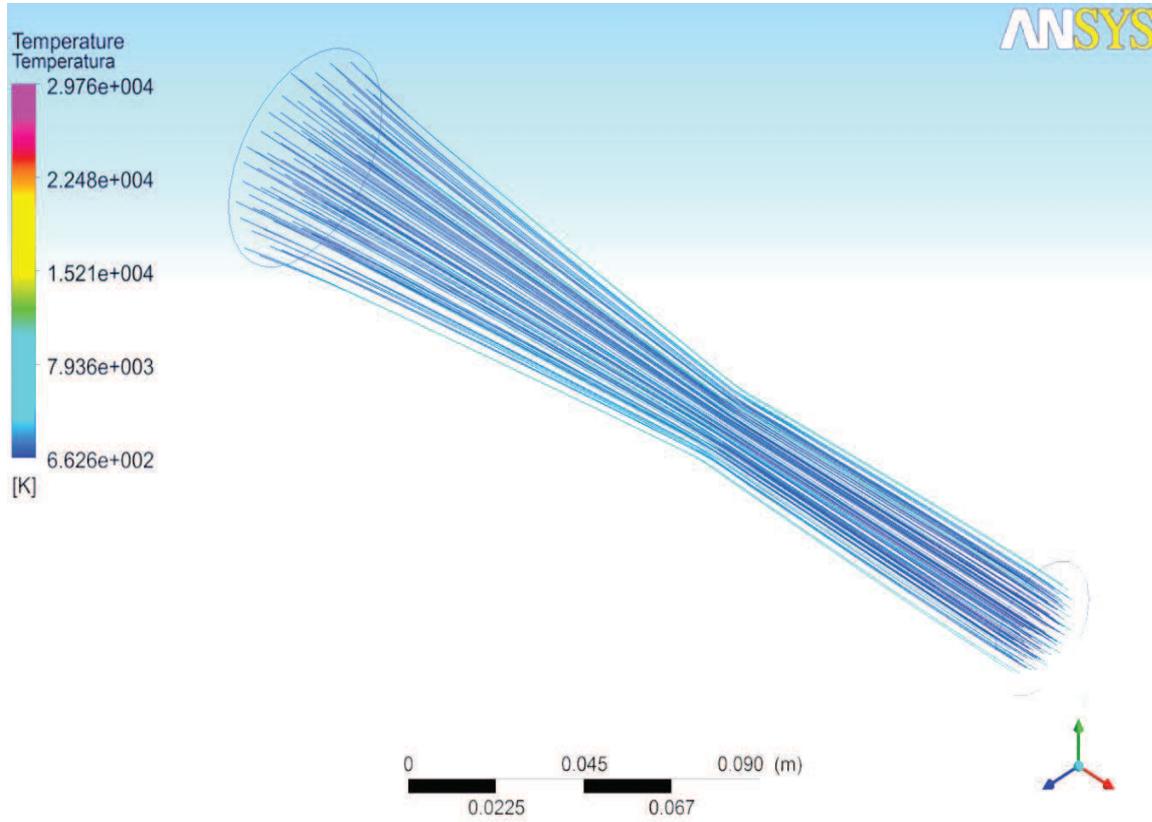


Figura 4.56 Distribución de la temperatura para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.

A partir de los datos de la figura anterior se construye la gráfica temperatura vs. Posición, representada por la figura 4.57. En dicha gráfica se observa como la tasa de disminución de temperatura es menor con respecto a cantidades de calor inferiores.

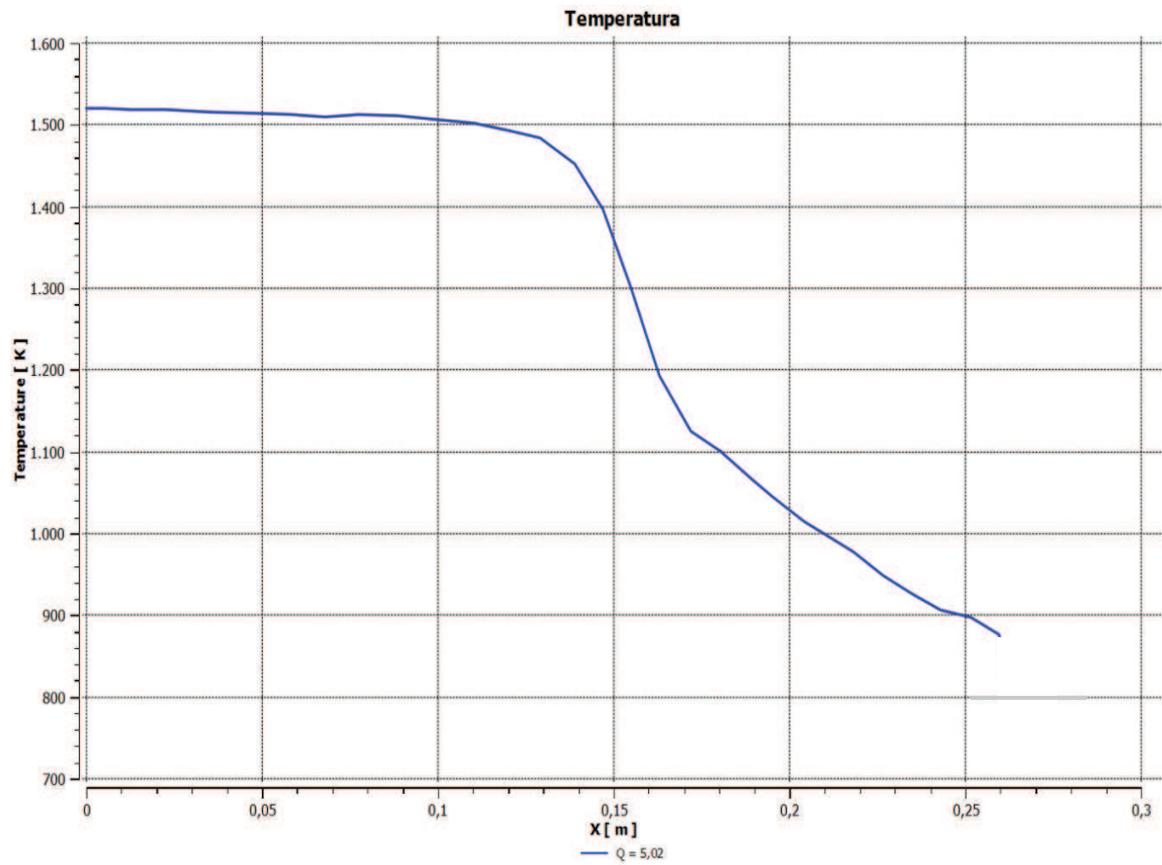


Figura 4.57 Temperatura vs. Posición para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.

La figura 4.58 representa la distribución de presión para una cantidad de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$

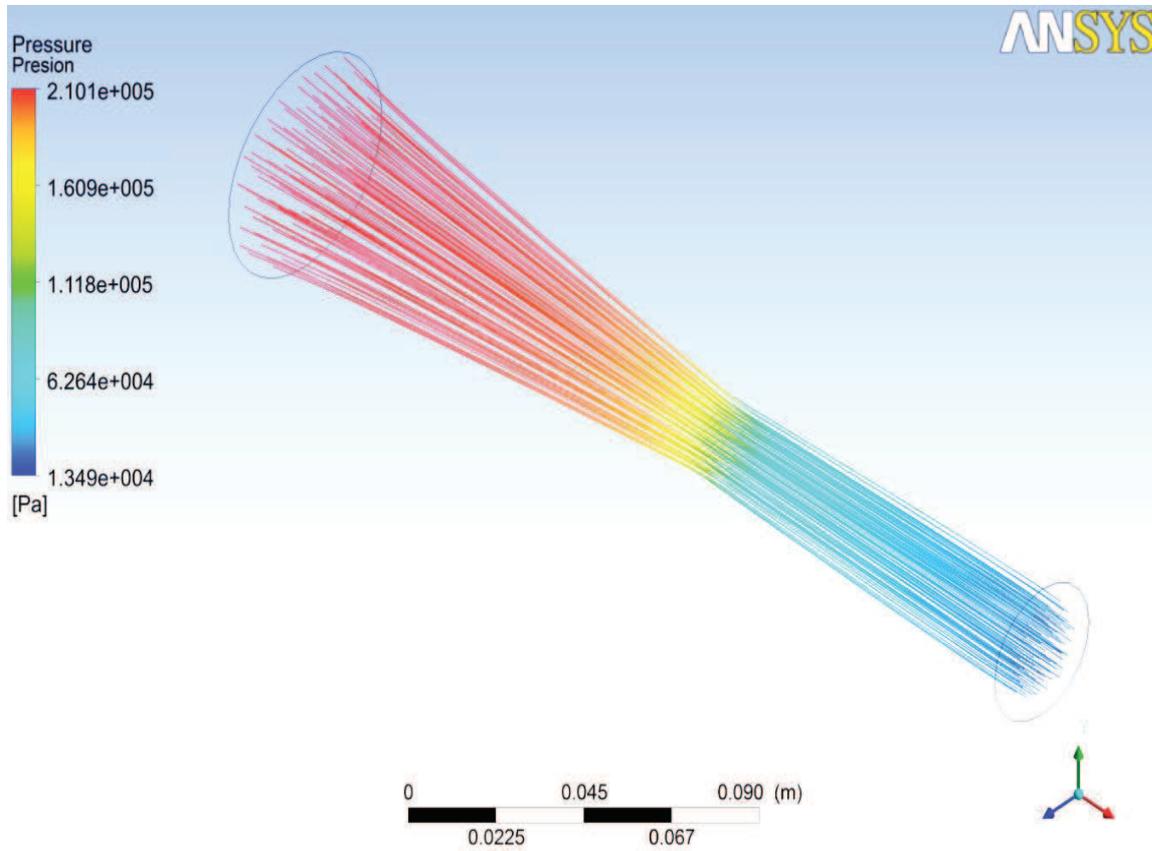


Figura 4.58 Distribución de la presión para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.

A partir de los datos anteriores se elabora la gráfica presión vs. Posición representada en la figura 4.59, en la cual se observa al igual que en la de temperatura (ver figura 4.49) que la tasa de decremento es inferior.

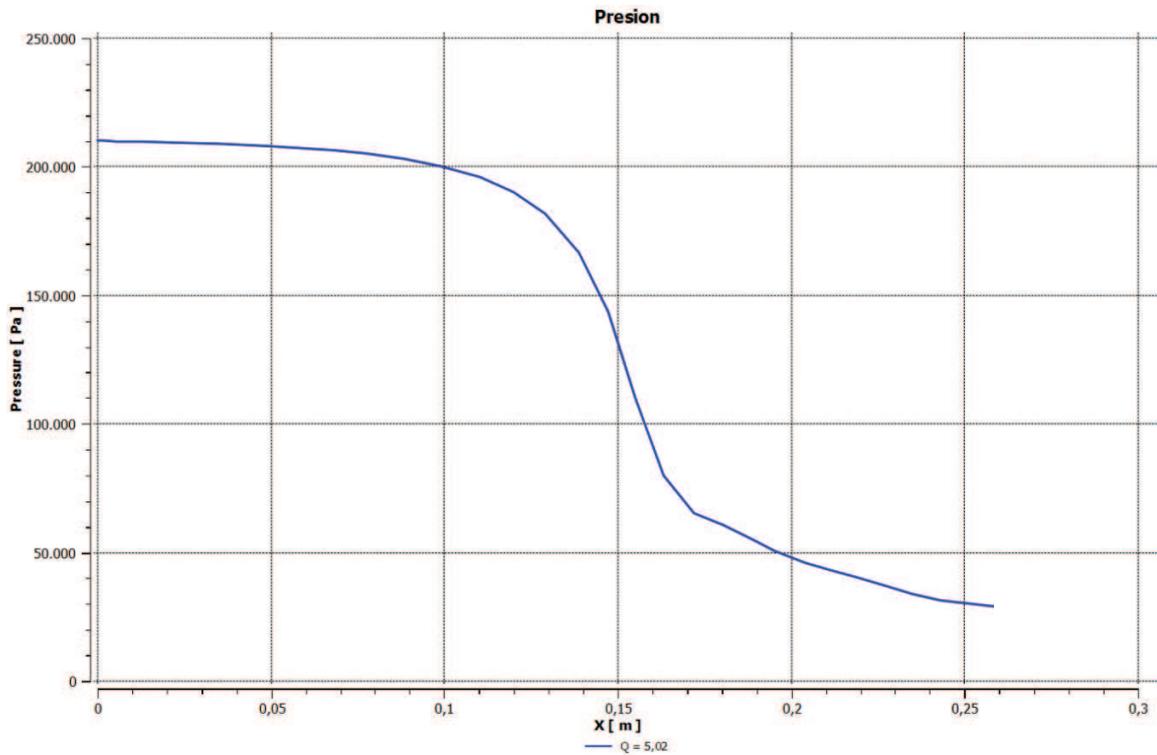


Figura 4.59 Presión vs. Posición para un flujo de calor $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$.

4.4.9 Estudio de la tobera para cantidad de calor $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$.

- Se observa en la gráfica número de Mach vs posición como el mismo presenta una tendencia al aumento, debido a la aceleración del fluido. (ver figura A.18).
- La gráfica de velocidad presenta un comportamiento que va de la mano con el comportamiento del número de Mach. (ver figura A.20).
- En el caso de la temperatura se observa como el comportamiento de la misma en la gráfica tiene una tendencia a la disminución aunque la misma no sea muy alta. Ver figura A.22.
- La gráfica de presión presenta un comportamiento inverso al presentado por el número de Mach. Ver figura A.24.

4.4.10 Estudio de la tobera para cantidad de calor $Q = 3,765 \text{ MW/m}^2$.

- Se observa en la gráfica del número de Mach vs posición como el mismo mantiene su tendencia al aumento. (ver figura A.26).
- La curva de velocidad igualmente presenta un comportamiento similar al del número de Mach esto debido a la relación que ambas variables mantienen entre si (ver figura A.28).
- La curva de temperatura, presenta un comportamiento similar a las anteriores cantidades de calor, con la diferencia que la tasa de disminución es mucho menor (ver figura A.30).
- La gráfica de presión vs posición presenta un comportamiento similar a casos anterior (ver figura A.32),

4.5 Visualización de resultados

4.5.1 Representación gráfica de cada rugosidad absoluta para la tobera convergente – divergente

Se observa como para cada valor de rugosidad el número de mach varia en el zona supersónica del flujo; es decir, en la zona divergente de la tobera, se mantiene prácticamente igual mientras que en la parte convergente, el valor del número de Mach presenta un comportamiento diferente, como se observa en la figura 4.60; es de hacer notar como la tasa de aumento del numero de mach disminuye a medida que aumentan los valores de rugosidad.

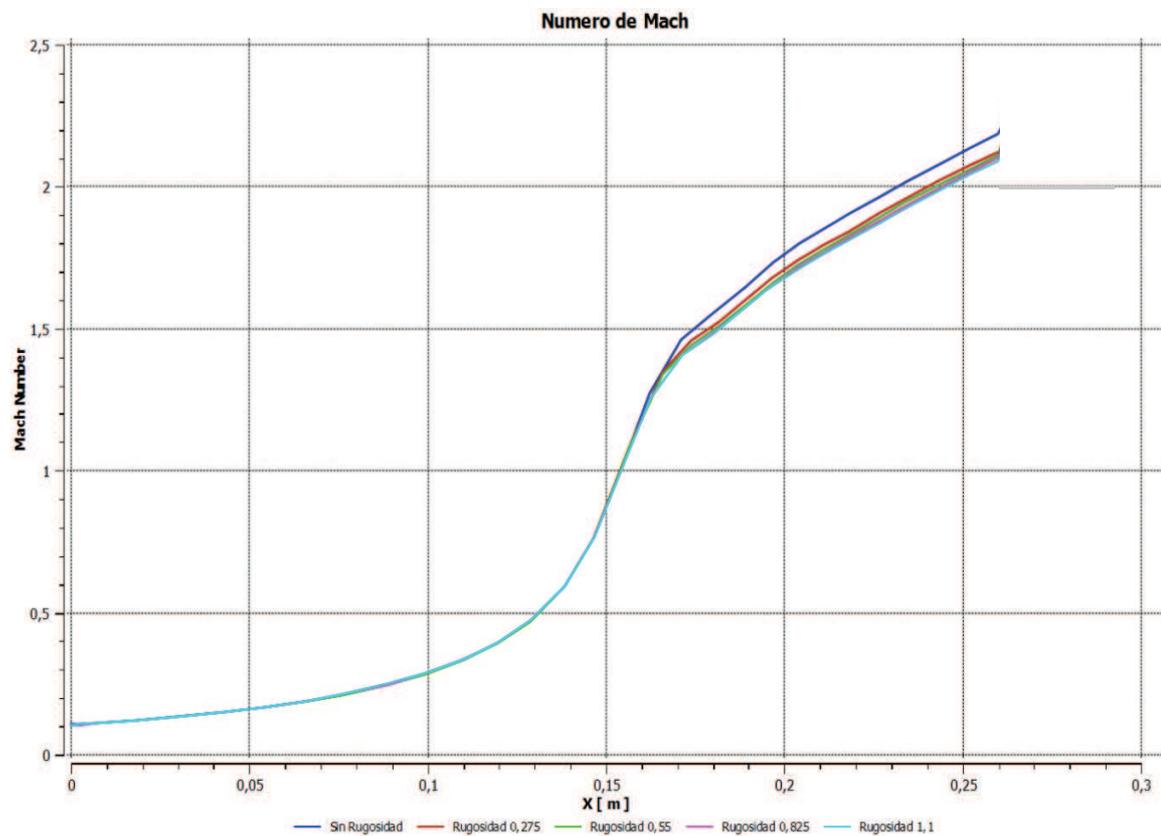


Figura 4.60 Número de Mach vs. Posición para cada rugosidad absoluta.

La velocidad presenta un patrón similar al presentado por el número de Mach como se observa en la figura 4.61. Las variaciones de la velocidad en la zona supersónica están en un rango inferior a los 30 m/s.

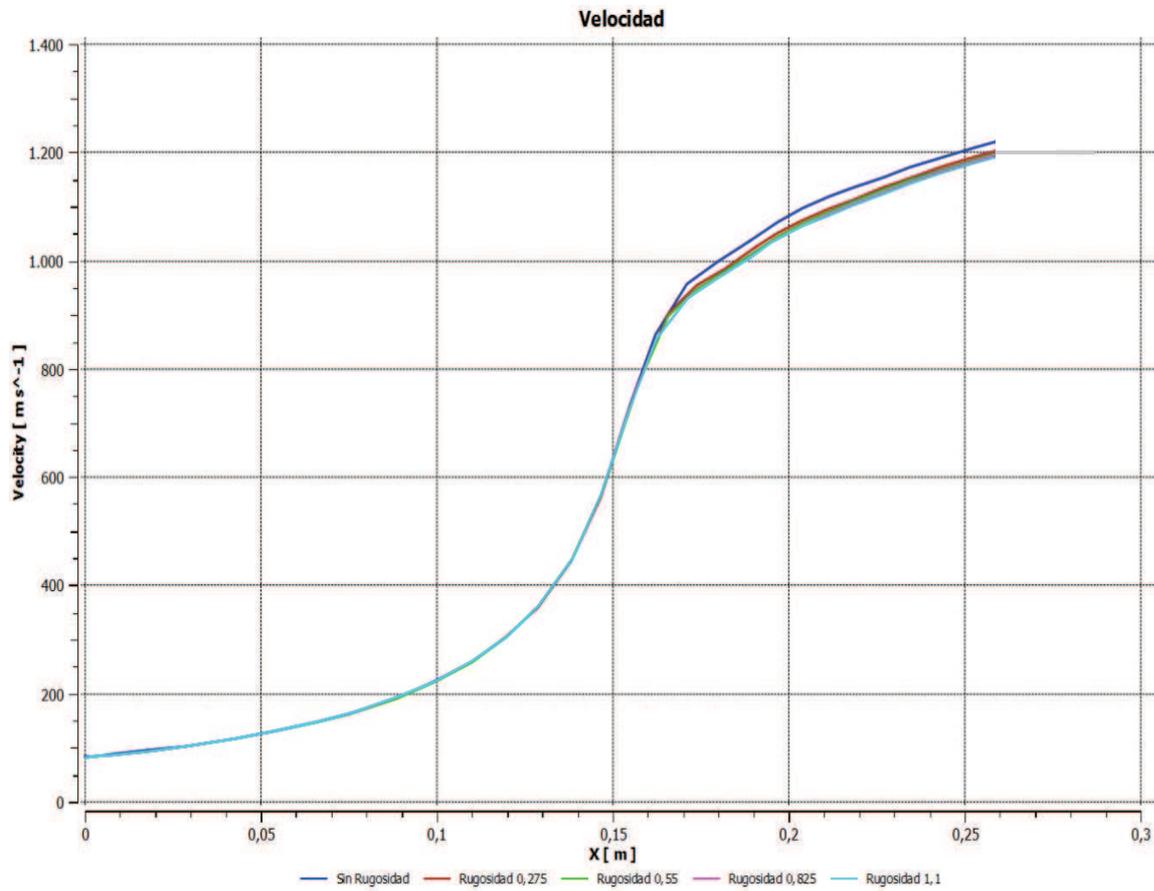


Figura 4.61 Velocidad vs. Posición para cada rugosidad absoluta.

La comparativa de la temperatura para distintas rugosidades absolutas es presentada en la figura 4.62 donde se observa como la temperatura presenta una variación a la salida. Aumentando la temperatura de salida a medida que aumenta la rugosidad.

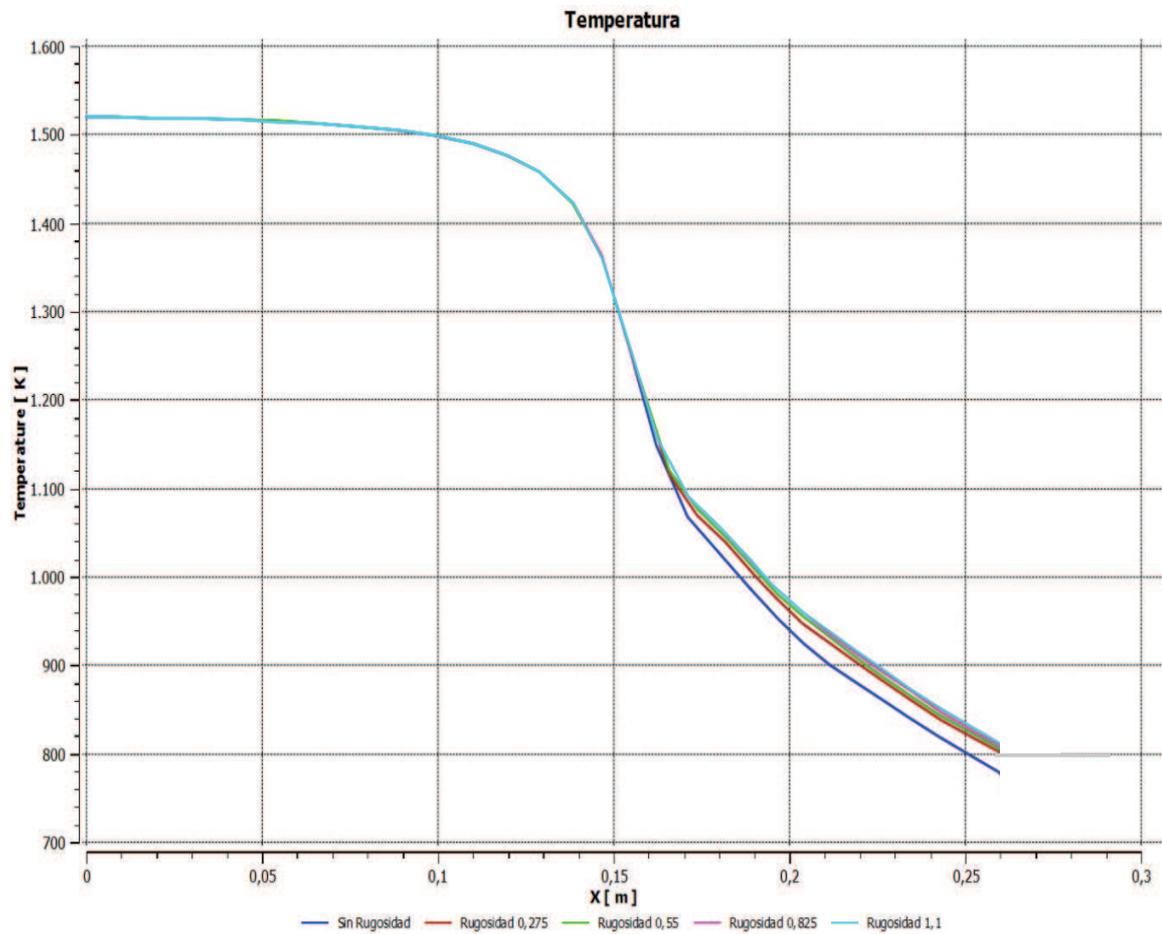


Figura 4.62 Temperatura vs. Posición para cada rugosidad absoluta.

En la figura 4.63 se observa el comportamiento de la presión para cada rugosidad, observándose como las variaciones en la misma son mínimas a pesar de las variaciones en la rugosidad absoluta de la tobera

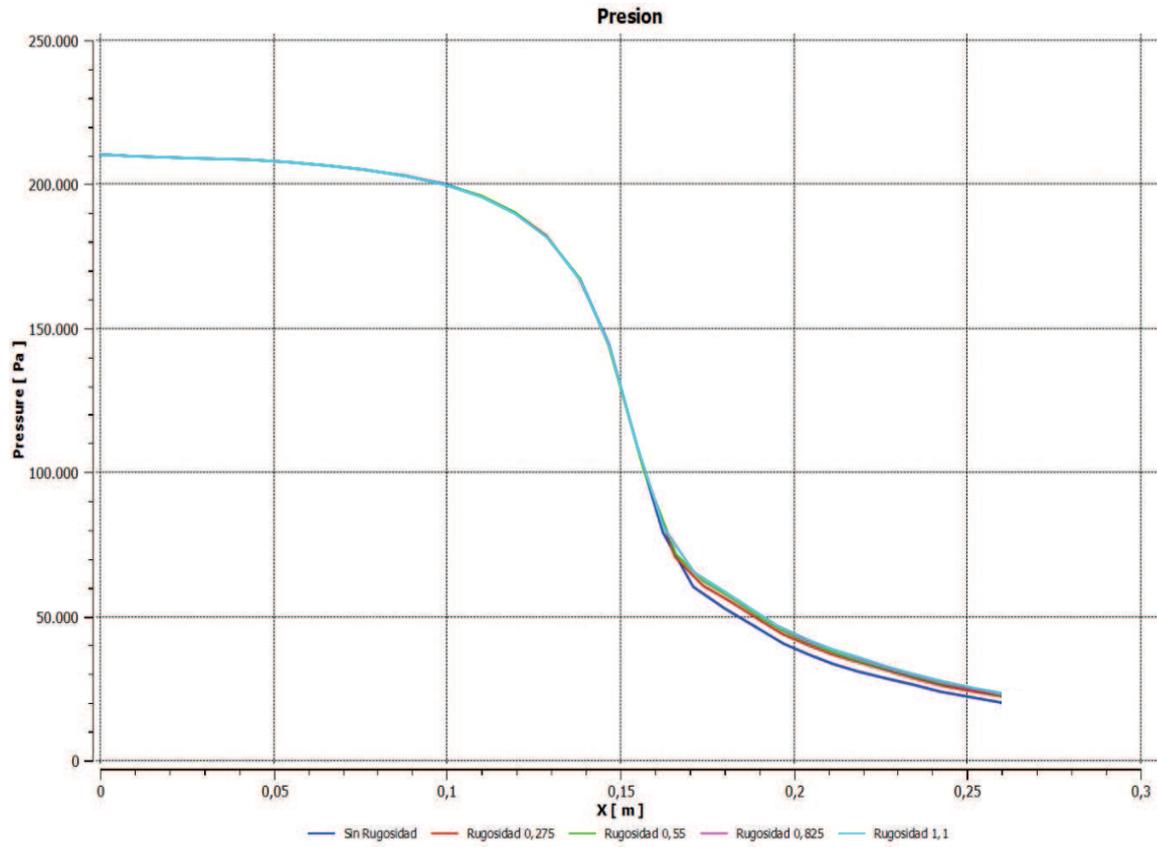


Figura 4.63 Presión vs. Posición para cada rugosidad absoluta.

4.5.2 Representación gráfica de cada cantidad de calor para la tobera convergente – divergente

En la figura 4.64 se observa como el número de Mach varía a medida que aumentan las cantidades de calor. El número de Mach en las zonas tanto convergente (flujo subsónico) como en la divergente de la tobera (flujo supersónico) es menor a medida que se aumenta la cantidad de calor.

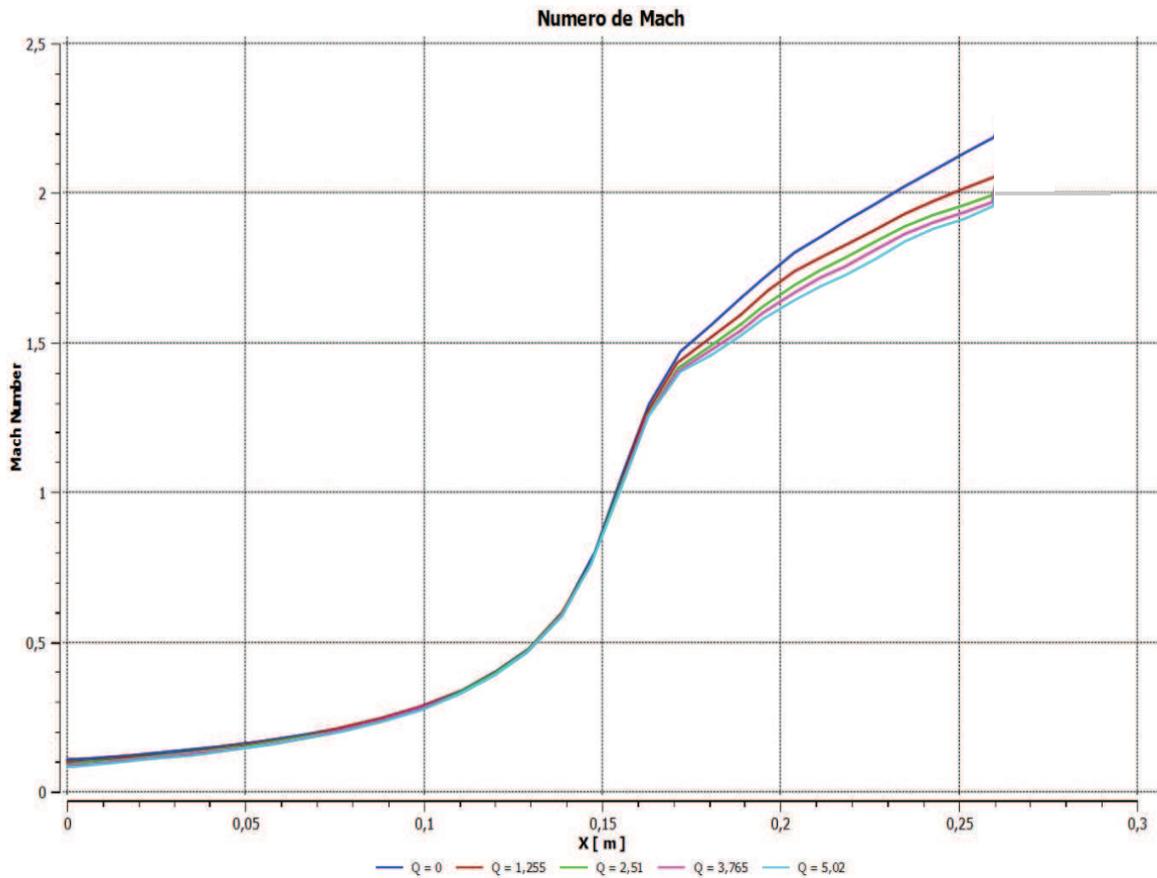


Figura 4.64 Número de Mach vs. Posición para cada cantidad de calor.

En la figura 4.65 se observan las diferentes curvas de velocidad para cada cantidad de calor estudiada, es de notar como la velocidad presenta el mismo patrón de comportamiento que el número de Mach. Estas variaciones van desde 5 m/s en la zona convergente de la tobera hasta 30 m/s en la zona divergente

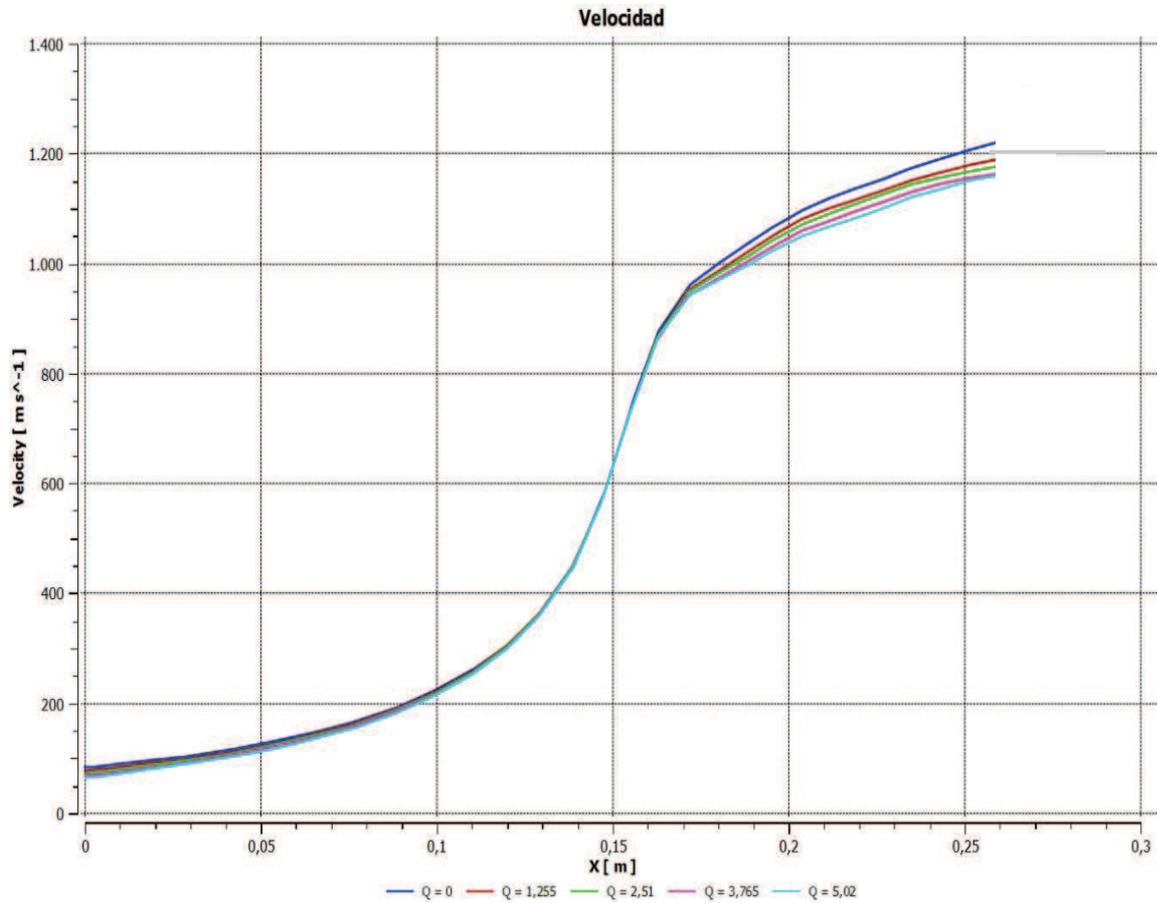


Figura 4.65 Velocidad vs. Posición para cada cantidad de calor

En la figura 4.66 se observa como la temperatura se ve claramente afectada para cada cantidad de calor estudiada presentando muy pocas variaciones en la zona convergente de la tobera, las cuales van en aumento a medida que se avanza en la tobera, alcanzo diferencias cercanas a los 100 K en la zona divergente.

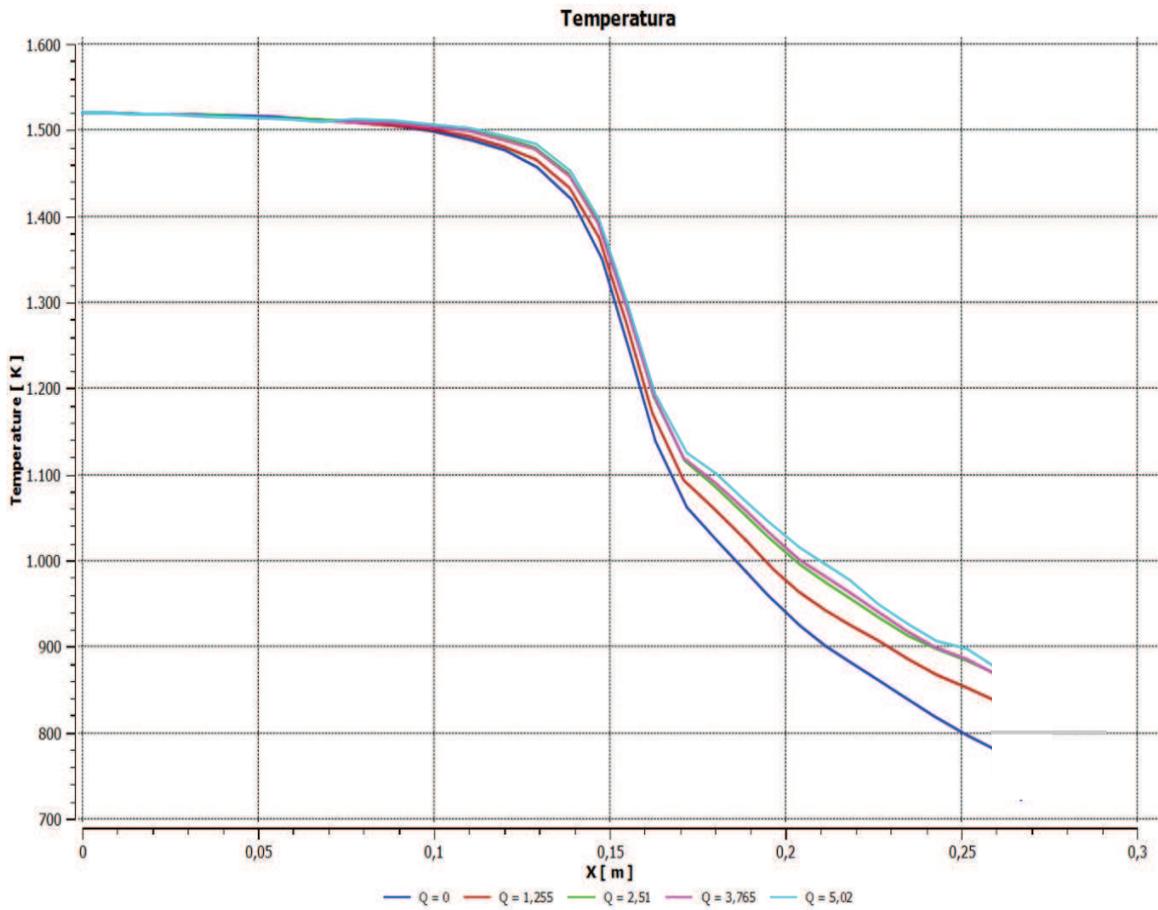


Figura 4.66 Temperatura vs. Posición para cada cantidad de calor.

La figura 4.67 muestra como varia la presión para cada cantidad de calor en función de la posición del flujo en la tobera, observándose como la misma presenta mínimas variaciones en la zona convergente de la tobera, y variaciones bajas cercanas a los 10 kPa en su zona divergente.

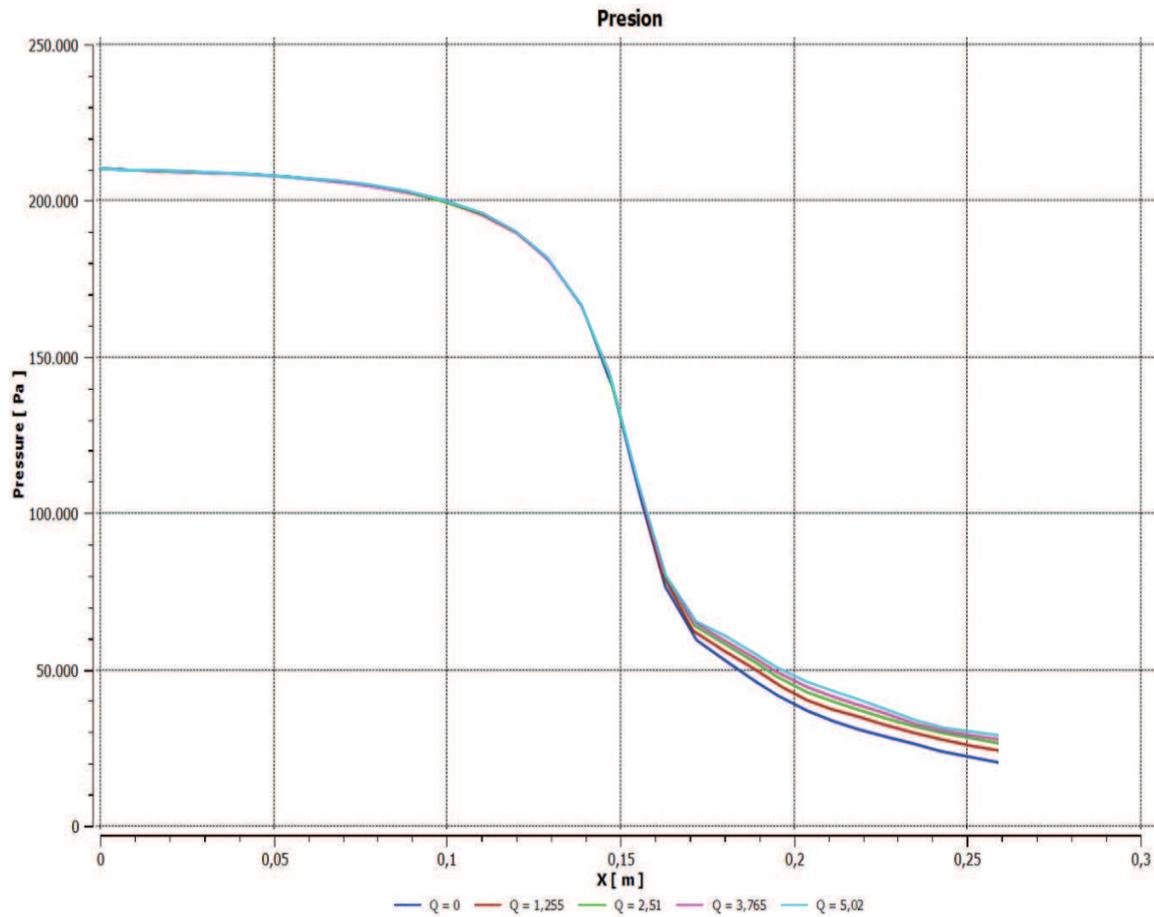


Figura 4.67 Presión vs. Posición para cada cantidad de calor.

4.5.3 Efecto del flujo de calor sobre el fluido de trabajo que pasa a través de la tobera convergente –divergente

En la figura 4.68 se observa como varía el comportamiento del número de Mach en función de la temperatura para cada cantidad de calor suministrado, esta variación es relativamente pequeña cercana al 0,1%.

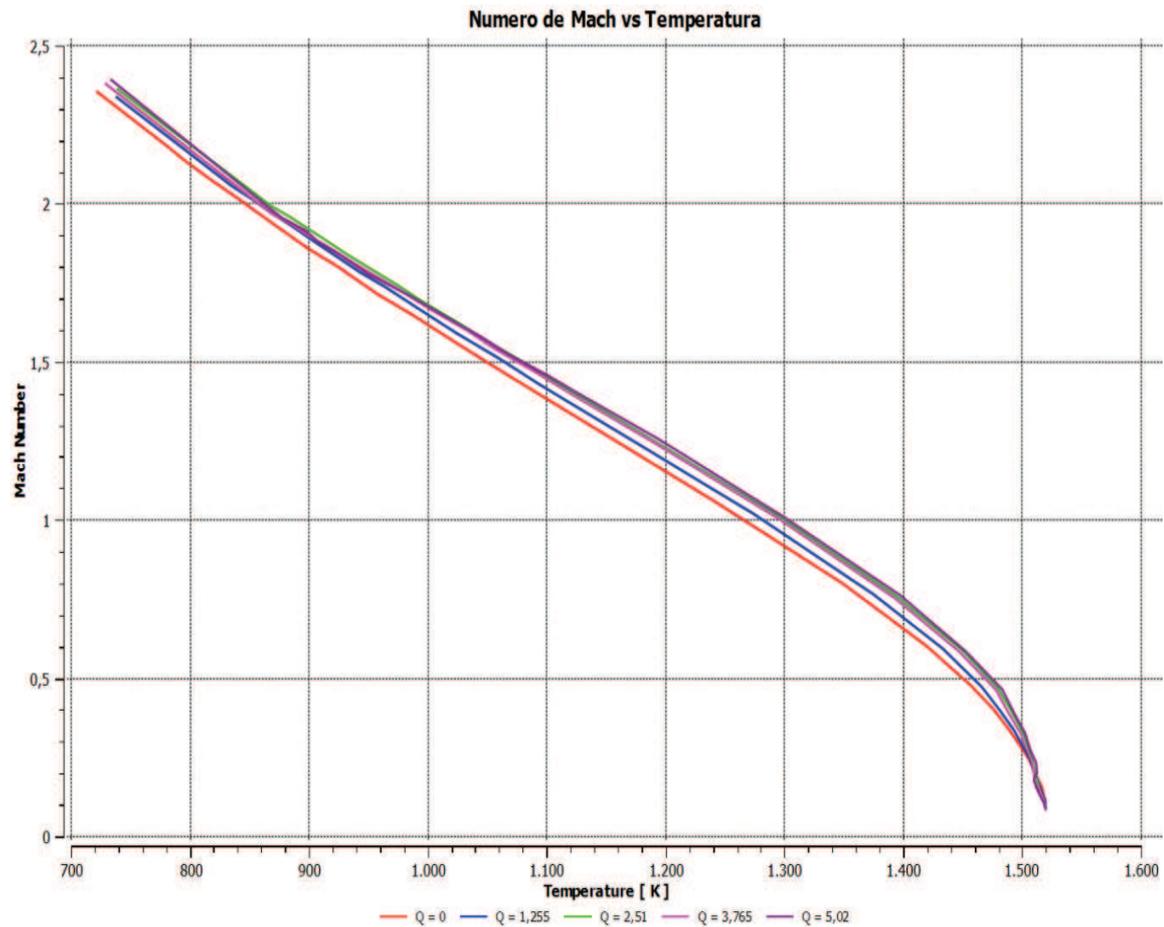


Figura 4.68 Número de Mach vs. Temperatura para cada cantidad de calor.

La grafica de velocidad en función de la temperatura, para cada valor de calor, esta representada en la figura 4.69, en la misma se observa como la velocidad presenta un comportamiento similar al del número de Mach, esto debido a que ambas variables son directamente proporcionales.

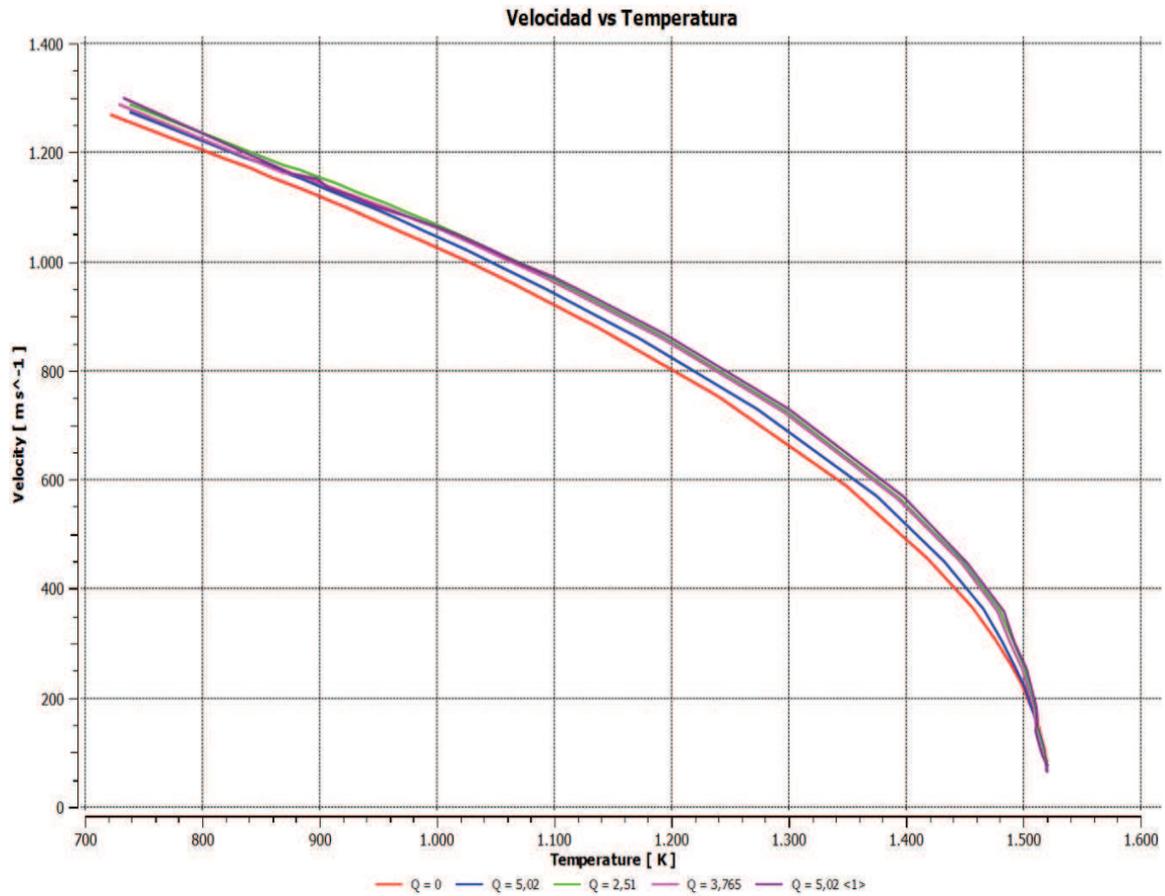


Figura 4.69 Velocidad vs. Temperatura para cada cantidad de calor.

En la figura 4.70 se muestra como varia la presión en función de la temperatura para cada cantidad de calor, se observa como el comportamiento de la presión es contrario al del número de mach esto como se ha mencionado anterior en virtud de la transformación de energía que presenta el fluido debido a la variación del área de la sección transversal del ducto a través del cual se mueve.

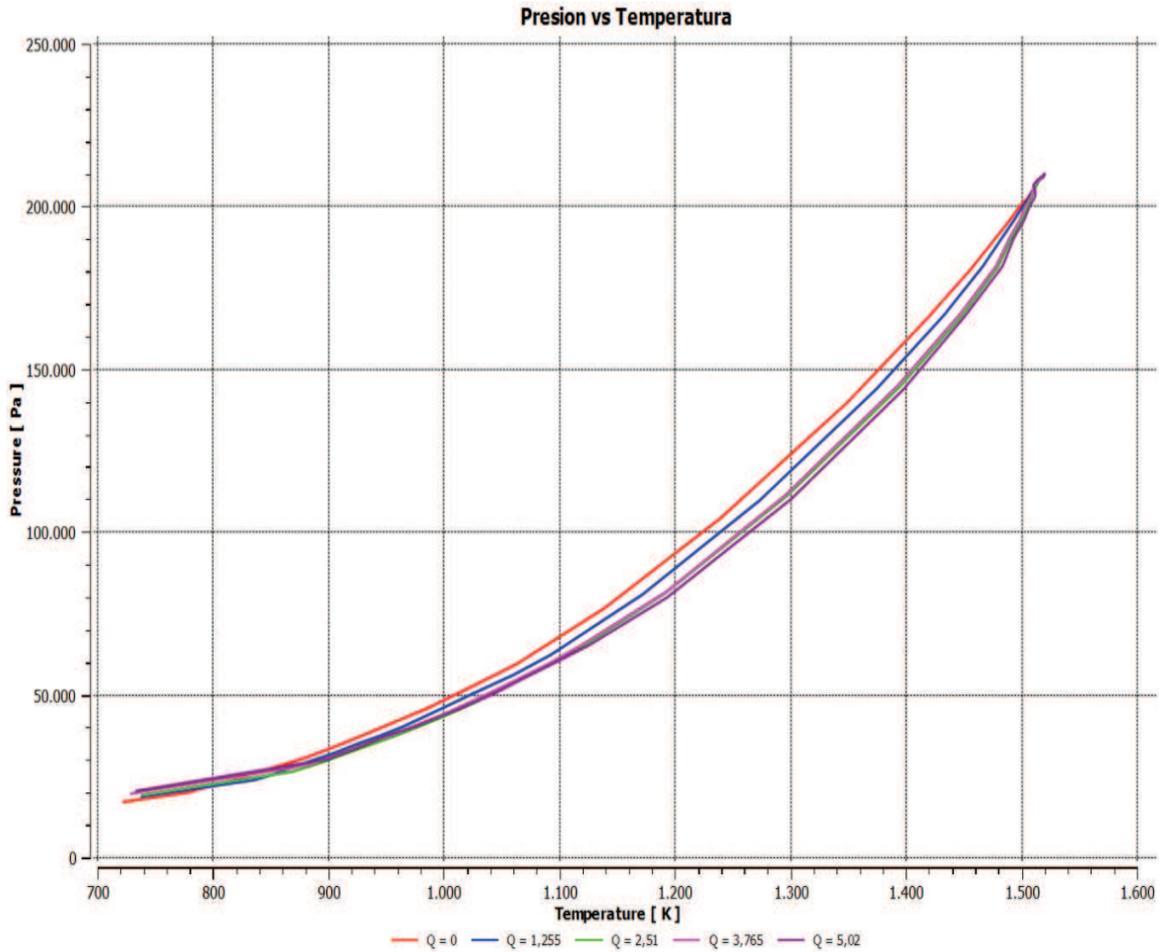


Figura 4.70 Presión vs. Temperatura para cada cantidad de calor.

4.5 Análisis de Resultados.

4.5.1 Convergencia de la simulación.

- Las gráficas presentadas en las figuras 4.4 a 4.19 las cuales representan las curvas de masa y momento así como los modelos de turbulencia de la simulación, muestra como para cada caso estudiado cada simulación logró converger hasta el valor de residuo establecido en este estudio ($1 \cdot 10^{-5}$), logrando se en algunos casos alcanzar valores inferiores permitiendo así una mayor precisión en los resultados obtenidos.
- Las gráficas correspondientes al estudio en el cual se variaba el valor de la rugosidad absoluta, presentaron patrones de comportamiento similares, diferenciándose cada simulación en el número de iteraciones necesarias para lograr la convergencia, aunque estas diferencias fueron muy pequeñas.
- Sin embargo las gráficas correspondientes al estudio en el cual se variaba la cantidad de calor, dichas curvas presentaron comportamientos un tanto diferentes teniendo un comportamiento común las curvas para cantidades de calor $Q = 1,255 \text{ MW/m}^2$ y $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$. Mientras que las curvas para $Q = 3,765 \text{ MW/m}^2$ y $Q = 5,02 \text{ MW/m}^2$, también presentaron un comportamiento común entre ellas, además de requerir un número mayor de iteraciones para lograr la convergencia, igualmente es de hacer notar que en las curvas de los modelos de turbulencia y momento “U”, se presenta un comportamiento muy cerca a linealidad antes de lograr la convergencia. Igualmente para estos casos se lograron valores muy inferiores de RMS con respecto a los establecidos, para momento “V”, momento “W” y masa.

4.5.2 Comportamiento de las líneas de flujo en una tobera convergente divergente.

- Al estudiar las figuras 4.20 a 4.59, y de las figuras A.1 hasta A.32 se observa como cada una de las gráficas de cada propiedad estudiada presenta un comportamiento acorde al establecido en la teoría, con sus singularidades de acuerdo al caso estudiado sea rugosidad o transferencia de calor.
- Al observar los resultados obtenidos de las figuras 4.20 a 4.43, y de las figuras A.1 hasta A.16 como la influencia de la rugosidad en las propiedades del fluido a medida que pasa a través de la tobera, va en aumento a medida que se modifica el régimen de flujo. Pasando de una influencia casi nula en flujo subsónico, hasta una

influencia más notoria en flujo supersónico, sin embargo esta influencia es relativamente baja entre los diferentes valores de rugosidad absoluta; siendo más notoria al comparar la tobera sin rugosidad con la misma pero con presencia de rugosidad absoluta.

- Al estudiar las figuras 4.44 a 4.59, la figuras desde la A.17 hasta A.32 se observa como la cantidad de calor (Q) si afecta de forma notoria las propiedades del fluido que fluye a través de la tobera convergente divergente; sin embargo se presenta la misma condición que para la rugosidad, esta afectación es más apreciable en régimen supersónico que en régimen subsónico, esto debido a que en el primero, el fluido está sometido a mayores grados de compresión y por ende la entropía presenta un valor elevado, generando esto como consecuencia una mayor sensibilidad a los factores externos en este caso el calor.

4.5.3 Visualización de resultados.

- En las figuras 4.60 a 4.67 se observa con más precisión como a medida que se aumenta la rugosidad absoluta dentro de la tobera, la misma va afectando las propiedades del fluido a medida que éste avanza a través de ella, siendo estas afectaciones de distinto tipo; la velocidad y el número de Mach ven reducidos sus valores en la zona divergente de la tobera en comparación a cuando no hay rugosidad en la misma y al comparar entre los distintos valores de rugosidad estudiados, si existe una diferencia pero no es tan marcada; mientras que la temperatura y la presión ven aumentados sus valores en la zona divergente a medida que se aumenta la rugosidad absoluta. Todos estos fenómenos son debidos a que a medida que se aumenta la rugosidad las pérdidas por roce en el fluido aumentan generando en el mismo una disminución en la energía cinética y un incremento de la entropía, esto a su vez genera que el número de Mach tienda a un valor donde alcanza su máxima entropía que para el caso de fricción es $Mach = 1$, todo esto en el momento que el fluido está en régimen supersónico.
- En las figuras 4.68 a 4.70 se observa como en esta oportunidad la transferencia de calor afecta las propiedades del fluido, siendo más evidente este caso que la afectación por rugosidad. Se observa como a medida que se aumenta la cantidad de calor, la rata de aumento del número de Mach y la velocidad va disminuyendo sus

valores, mientras que los valores presión y la temperatura presentan una razón de disminución menor en la zona supersónica de la tobera. Igualmente se observa que en la zona subsónica los cambios son poco apreciables, esto es por condición de comportamiento del flujo de Rayleigh en el cual indica que el fluido siempre buscara su punto de máxima entropía y para ello tendrá que alcanzar un valor de número de Mach igual a la unidad. En el caso supersónico debido a esta condición es que se produce los comportamientos explicados anteriormente tanto en la velocidad como el número de Mach, la presión y la temperatura.

- En las figuras 4.68 a 4.70 se observa como la temperatura afecta el comportamiento del número de Mach, la velocidad y la presión para cada cantidad de calor, se observa como las diferencias más marcadas se encuentran a grandes valores de temperatura siendo esto debido a que el fluido posee un valor de entropía superior y por ende su comportamiento es más inestable, a medida que la temperatura disminuye sin importar la cantidad de calor el comportamiento de las curvas se vuelve más similar reforzando lo antes mencionado.
- La condición de un número de Mach igual a la unidad en la garganta de la tobera, en este caso no se presentó para ninguna condición estudiada, esto debido a un efecto que se presenta en algunos casos, el cual es una reducción en la relación del área eficaz debido a la obstrucción de la capa límite viscosa [8]. Este efecto genera que la sección transversal efectiva mínima no se ubique exactamente en la garganta de la tobera sino un poco aguas debajo de la garganta y es en esta ubicación donde el número de Mach alcanza la unidad.

Conclusiones.

- Mediante este estudio se comprobó la eficacia y robustez del modelo de turbulencia kappa – épsilon, demostrando su gran adaptabilidad a diferentes condiciones de estudio y demostrando gran facilidad y precisión para la solución de flujo compresible en régimen supersónico, además de ser el modelo más adecuado debido a que las condiciones de flujo no existen distorsiones, estrechamientos y tampoco presenta un campo centrífugo, es decir; no es un dominio rotacional.
- La rugosidad absoluta es un parámetro que aunque realiza modificaciones en el flujo a través de una tobera convergente – divergente las mismas no son de gran envergadura, siendo poco apreciables, por debajo del 1% en la zona subsónica, y aumenta un poco mas cuando pasa a régimen supersónico llegando hasta 5%. Sin embargo se espera que para rugosidades mayores el efecto de desprendimiento de la capa limite sea mayor y los cambios en el número de Mach, velocidad, presión y temperatura sean más apreciables.
- La cantidad de calor que se suministra a la tobera es un factor que incide de mayor forma en el comportamiento del flujo a través de la misma, a medida que las cantidades de calor aumentan, el número de Mach y por ende la velocidad disminuyen sus razones de aumento, y por efecto de conservación la presión y la temperatura presenta una razón de disminución menores en sus valores.
- Con la implementación de las gráficas de conservación de masa y momento así como con el uso de las curvas de los modelos de turbulencia se valida la investigación realizada y se demuestra que la misma está dentro de los rangos de precisión y exactitud establecidos para una técnica de dinámica computacional mediante la implementación del termino imbalance.
- El efecto de la capa límite viscosa del fluido, influye directamente en la sección transversal mínima efectiva del fluido generando que el flujo alcance valores del número de Mach superiores a la unidad en ubicaciones que no necesariamente sea la garganta de la tobera. Tal como lo demostraran Xu J. y Shao C (2007). en su investigación.

Recomendaciones.

- Implementar el estudio de la tobera convergente – divergente a otras ramas de investigación como lo son los diferentes tipos de ondas de choque que se pueden presentar en las mismas.
- La realización de este estudio con otros tipos de fluidos principalmente gases reales y así comparar las diferencias entre las consideraciones que se tienen para estos y para los gases ideales.
- La construcción de un banco de pruebas experimental que permita validar los resultados aquí obtenidos.
- La inclusión en el pensum académico de la escuela de una materia que en su contenido programático incluya tanto tópicos de la dinámica de fluidos computacional (DFC) así como de tópicos que incluyan también la explicación y aplicación de métodos numéricos para la resolución de ecuaciones de alta complejidad.
- La realización de un estudio en el cual se tome en cuenta la forma como se ve afectado el flujo al variar la presión del receptor, además de verificar el comportamiento de las ondas de choque oblicuas y ondas de Prandtl – Meyer aguas arriba de la salida de la tobera

Referencias Bibliográficas

- [1] Anderson John. (1990). “*Modern Compressible Flow*”. Segunda Edición. McGraw Hill.
- [2] ANSYS-CFX. Release 13.0 (2010). ANSYS CFX-Solver Theory Guide
- [3] Ekanayake E., Gear J.A., Ding Y. (2010) “*Numerical Simulation of a Supersonic Convergent Divergent Nozzle with divergent angle variations for under expanded condition*” 17th Australasian Fluid Mechanics Conference
- [4] Folea M., Schlegel., Lupulescu N, Parv L.. (2007) “*Modeling Surface roughness in high speed milling: Cobalt based Superalloy case Study*”. 1st international Conference of Manufacturing Engineering, Quality and Production Systems
- [5] Gómez L., López D., Toro A. (2010) *Modelo Fenomenológico de una tobera de Laval que representa la tapa de aceleración de gases de una turbina a gas*. Mecánica Computacional, Volumen 29, 2365 - 2383
- [6] Hemidi, F. Henry, S. Leclair, J. M. Seynhaeve, Y. Bartosiewicz (2009) *CFD Analysis of a supersonic ejector*. Applied Thermal Engineering 29, 1523-1531
- [7] J. Xu, C. Zhao (2007) *Two-dimensional numerical simulations of shock waves in micro convergent-divergent nozzles*. International Journal of Heat and Mass Transfer 50, 2434-2438
- [8] Liu J, Chen J., Chen Z. (2008) *Critical flashing flow in convergent-divergent nozzles with initially subcooled liquid*. International Journal of Thermal Science 47, 1069-1076
- [9] Matarazzo S., Laget H. (2011) “*Modeling of the heat transfer in a gas turbine liner combustor*”
- [10] Pougartch K., Salcudean M., Chan E., Knapper B. (2008) *Modeling of compressive gas-liquid flow in a convergent-divergent nozzle*. Chemical Engineering Science 63, 4176-4188

- [11] Sampieri R., Fernandez C., Baptista P., (2006) “Metodología de la Investigación” .
McGraw - Hill
- [12] Schilke P. W. (2004). “*Advanced Gas Turbine Materials and Coatings*” General Electric Energy.
- [13] Xu J., Zhao J. (2007) *Two-dimensional numerical simulations of shock waves in micro convergent-divergent nozzles*. International Journal of Heat and Mass Transfer 50, 2434-2438
- [14] Zucker, Robert; Biblarz, Oscar. (2002). “*Fundamentals of Gas Dynamics*”. Segunda Edición. John Wiley & Sons, Inc.

Apéndice A.

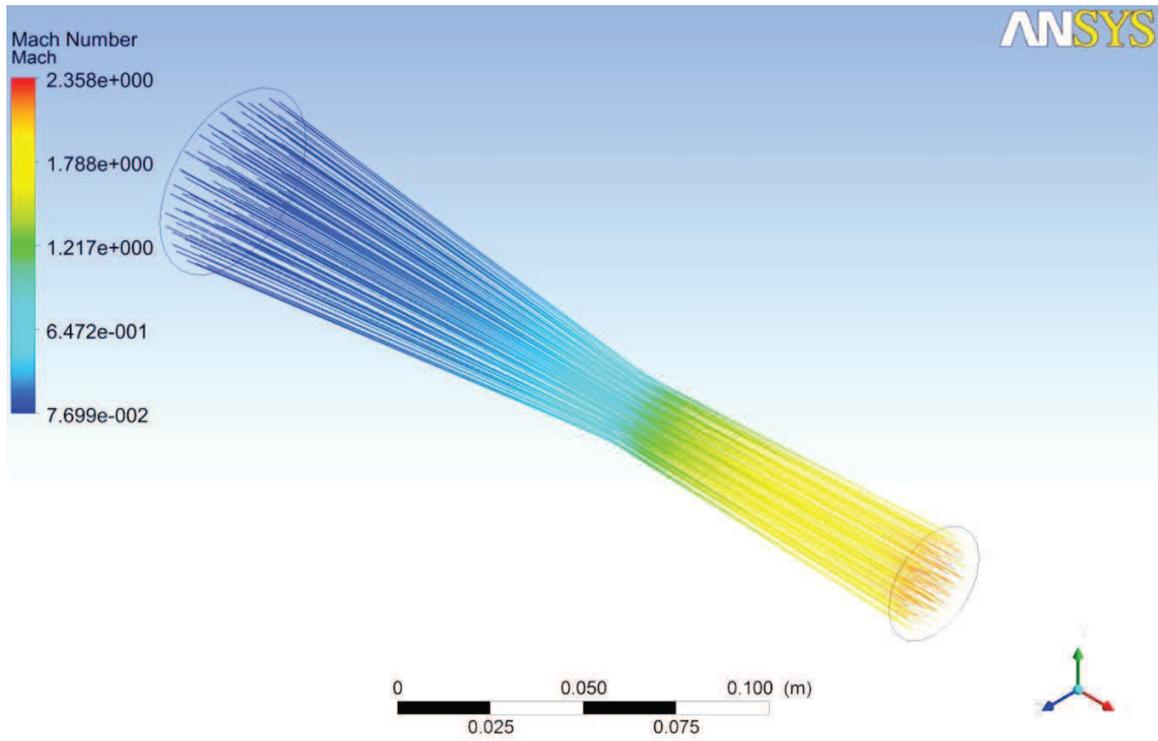


Figura A.1 Distribución de el Número de Mach para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,55$.

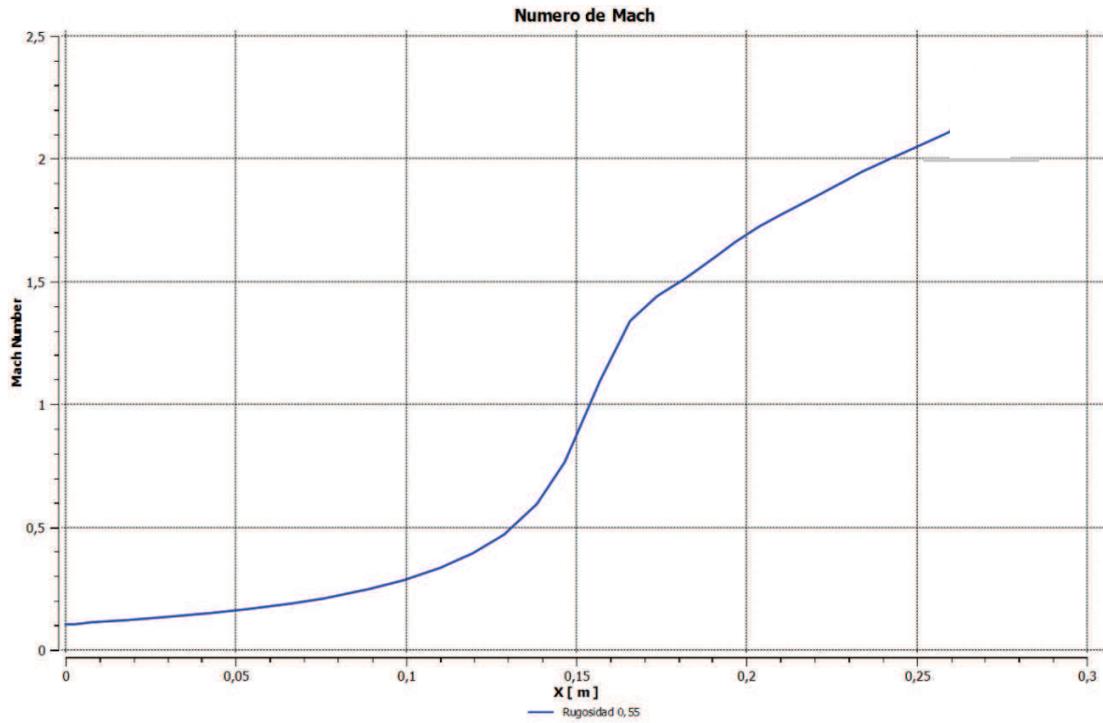


Figura A.2 Número de Mach vs Posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,55$.

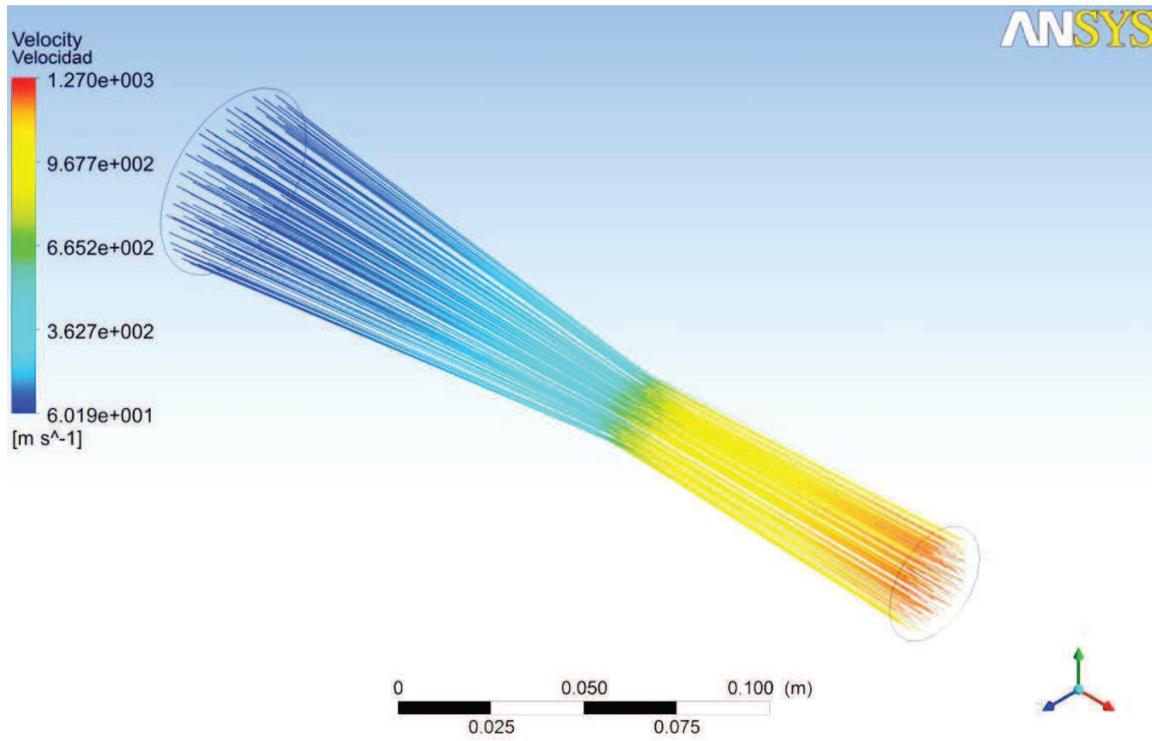


Figura A.3 Distribución de el la velocidad para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,55$.

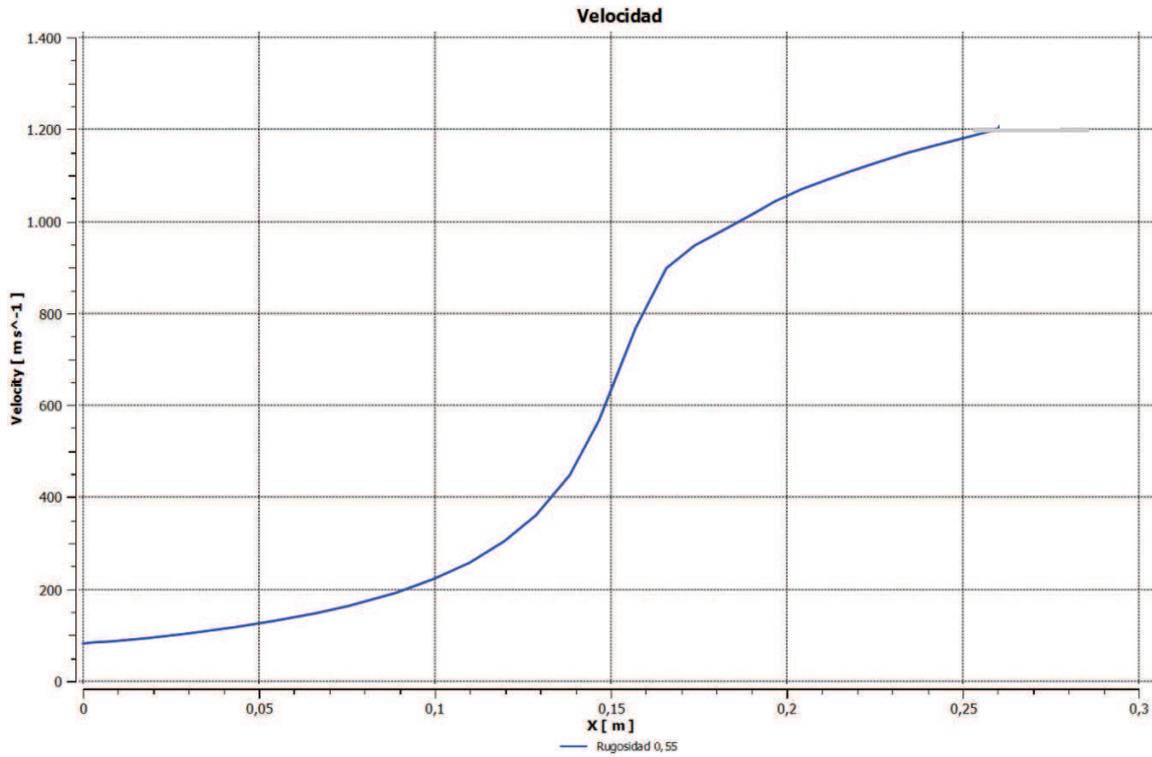


Figura A.4 Velocidad vs Posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,55$.

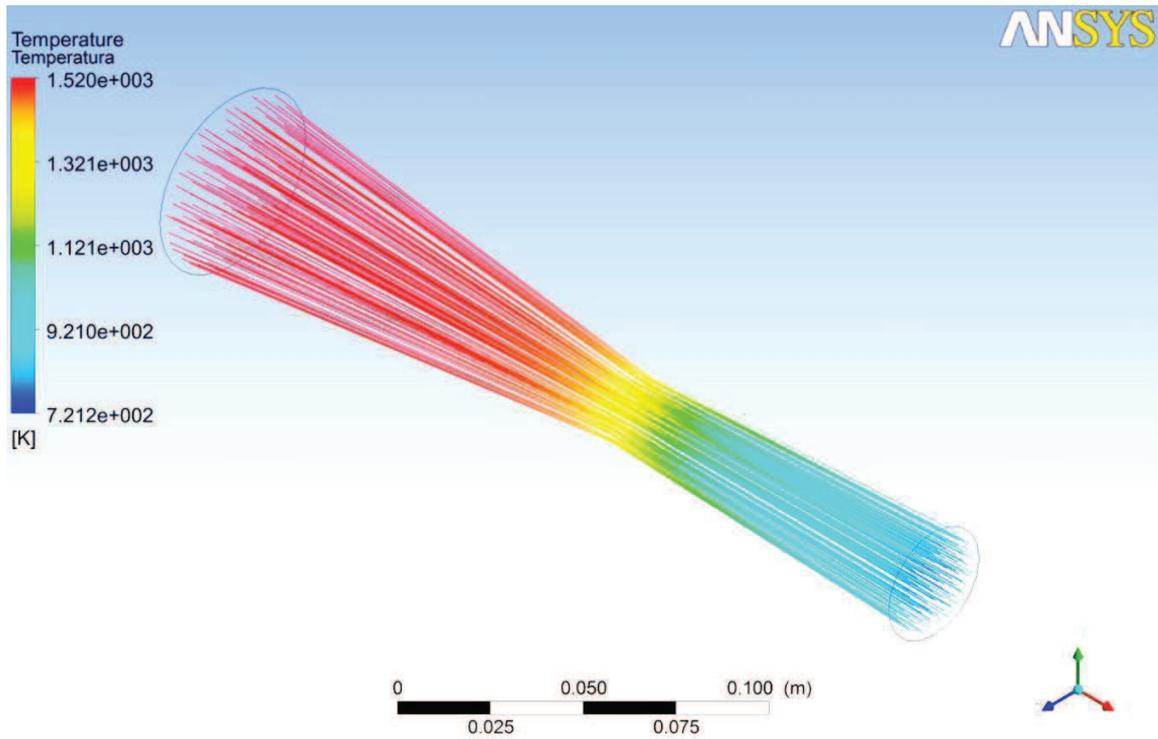


Figura A.5 Distribución de la Temperatura para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,55$.

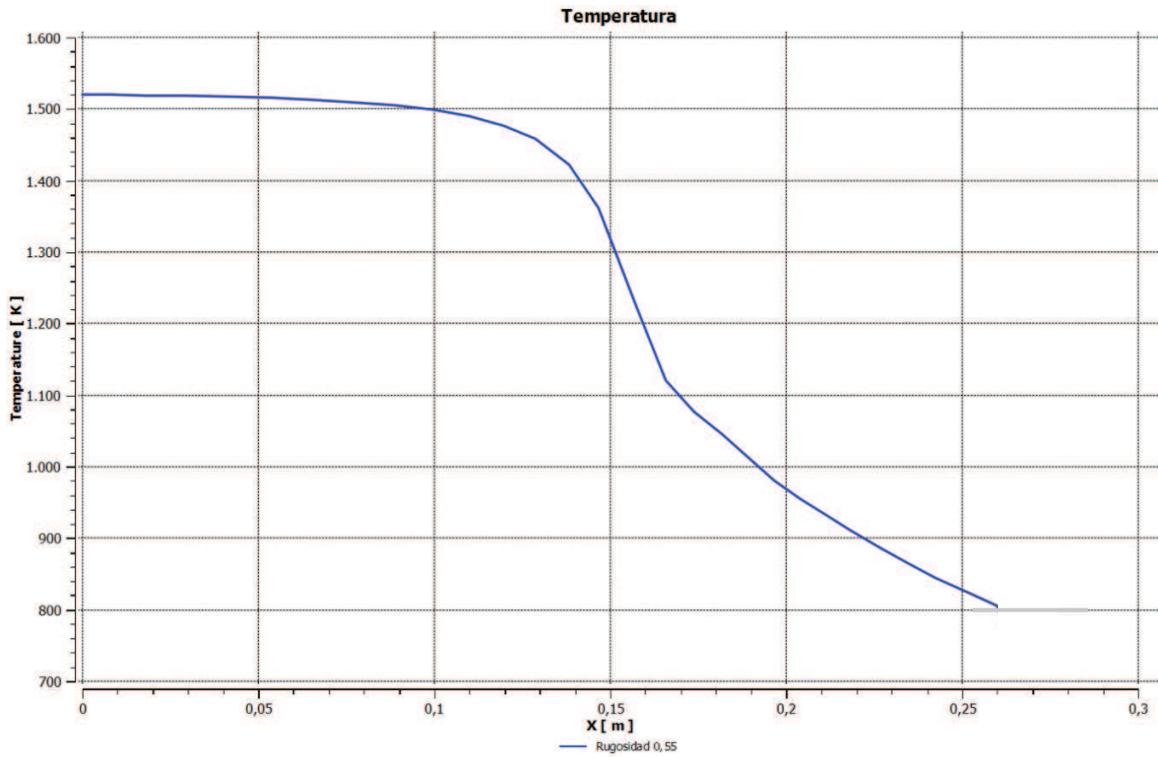


Figura A.6 Temperatura vs Posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,55$.

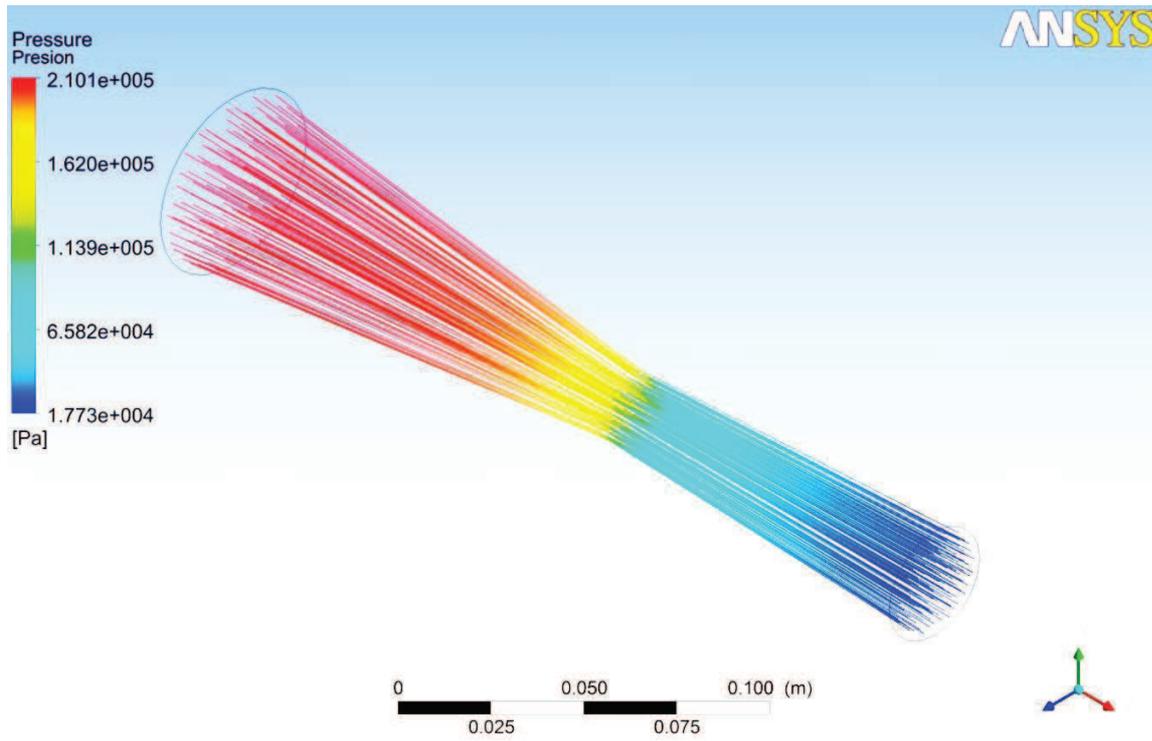


Figura A.7 Distribución de la Presión para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,55$

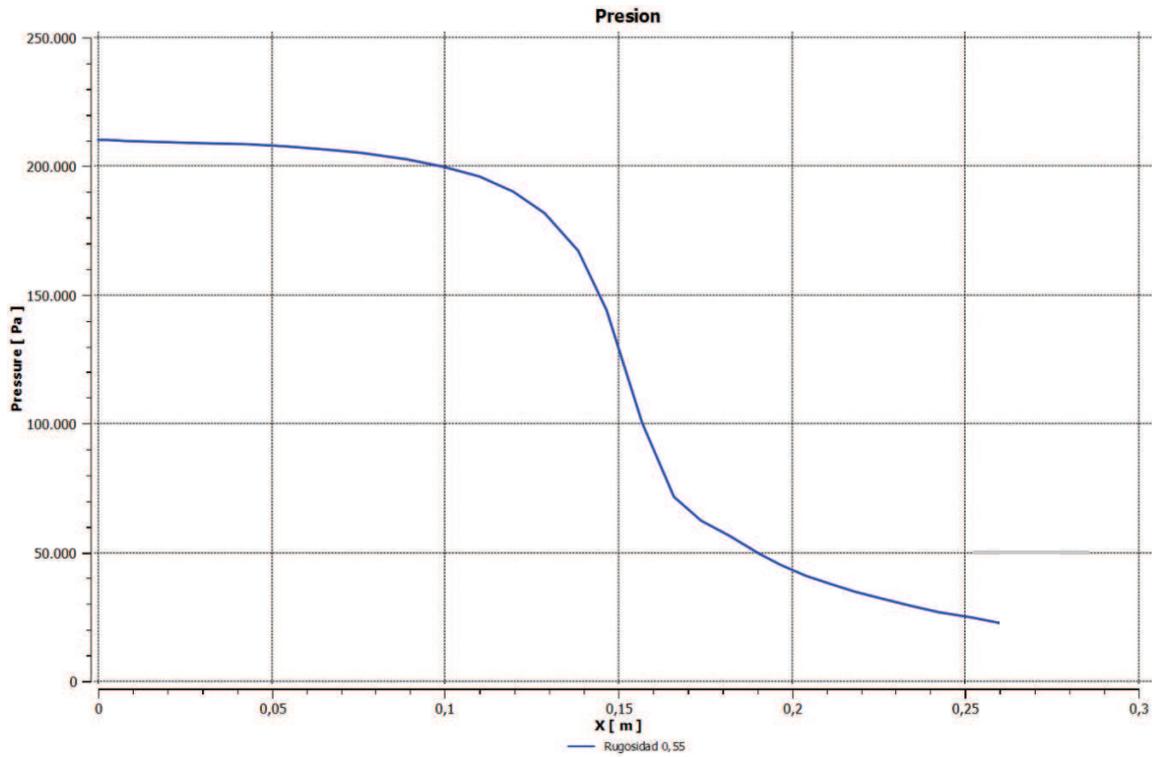


Figura A.8 Presión vs Posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,55$.

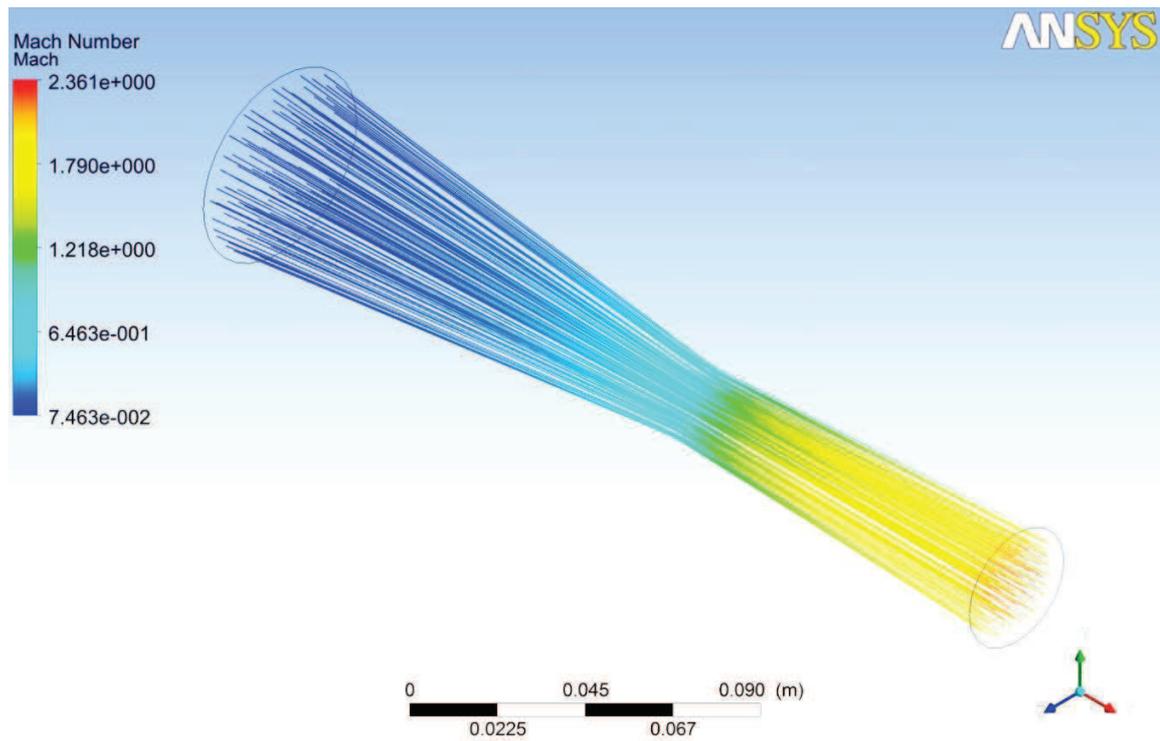


Figura A.9 Distribución del Número de Mach para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825$.

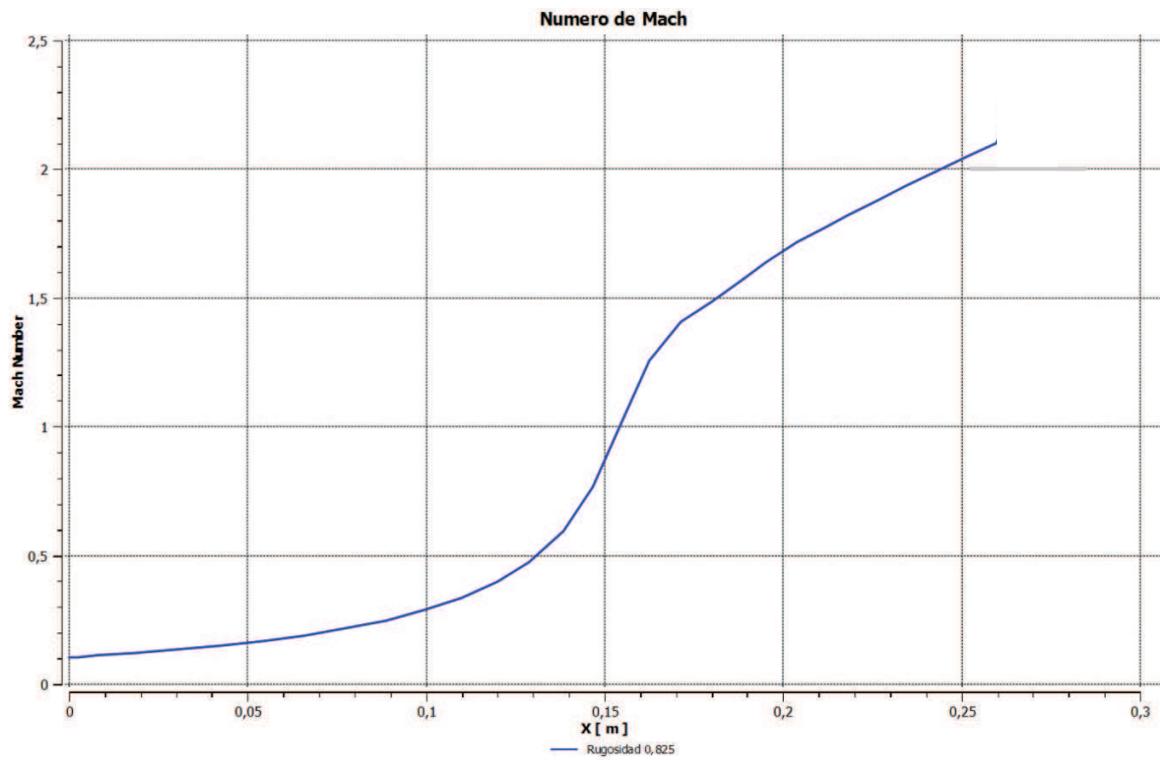


Figura A.10 Número de Mach vs Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825$.

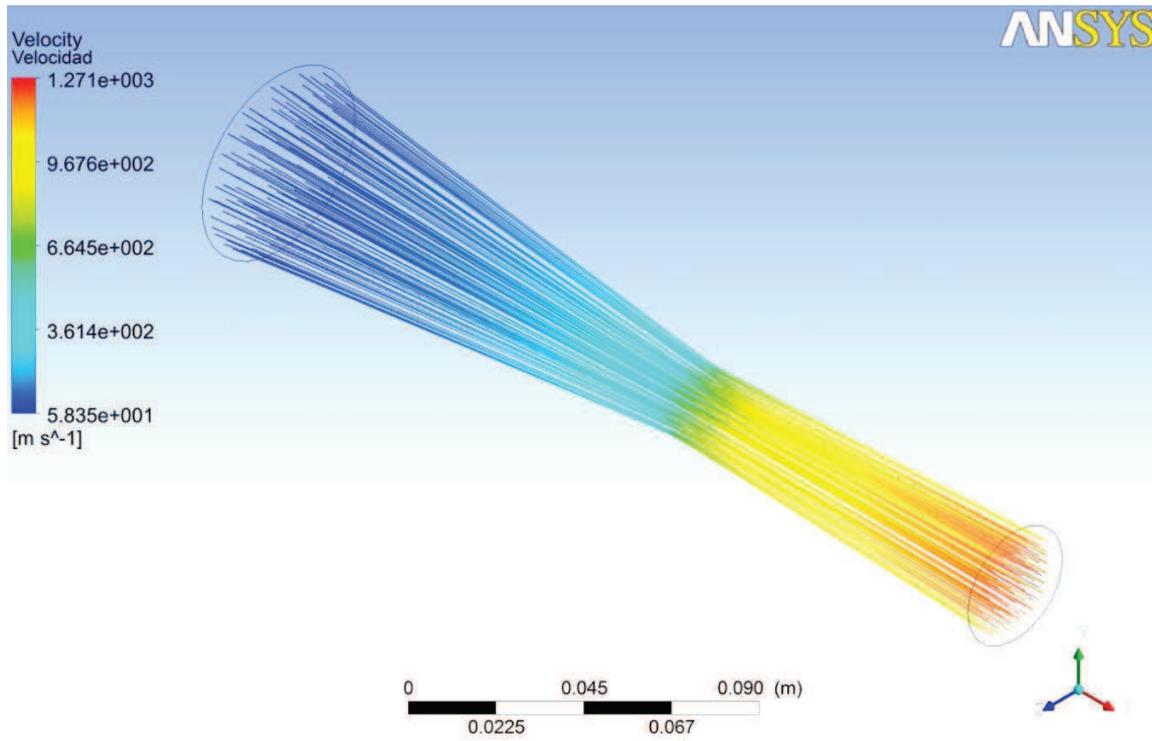


Figura A.11 Distribución de la Velocidad para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825$.

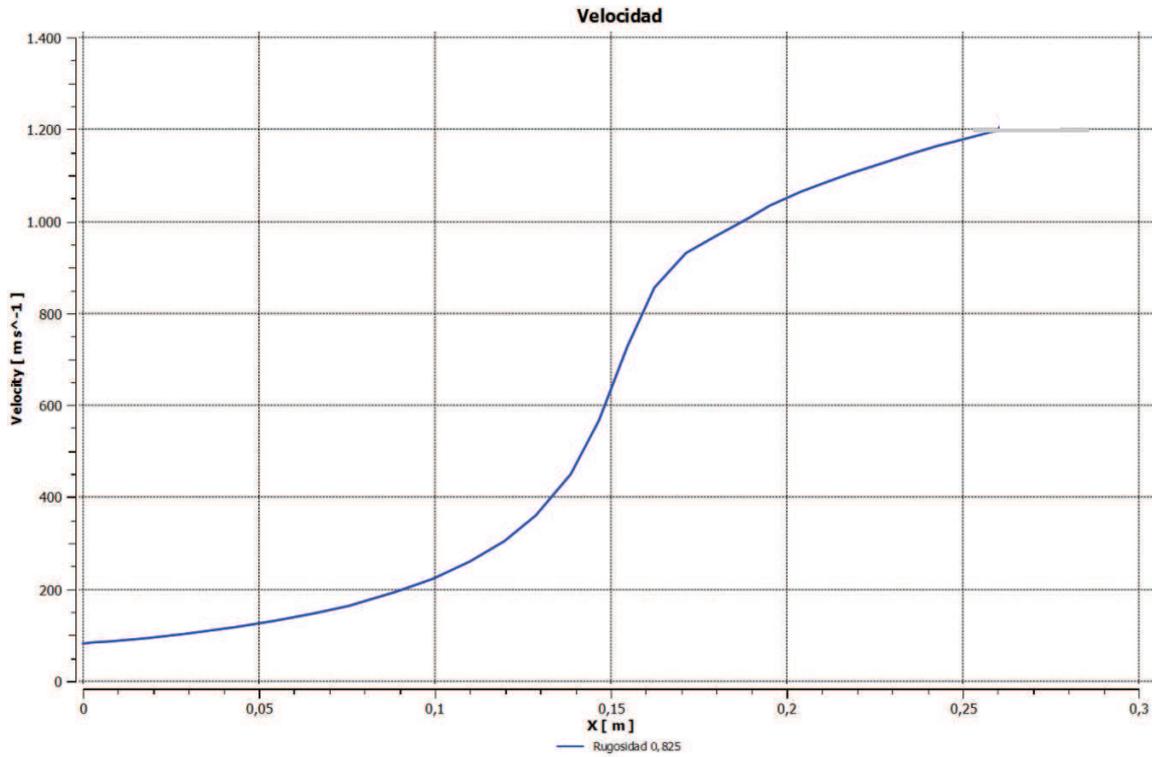


Figura A.12 Velocidad vs Posición para una rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,825$.

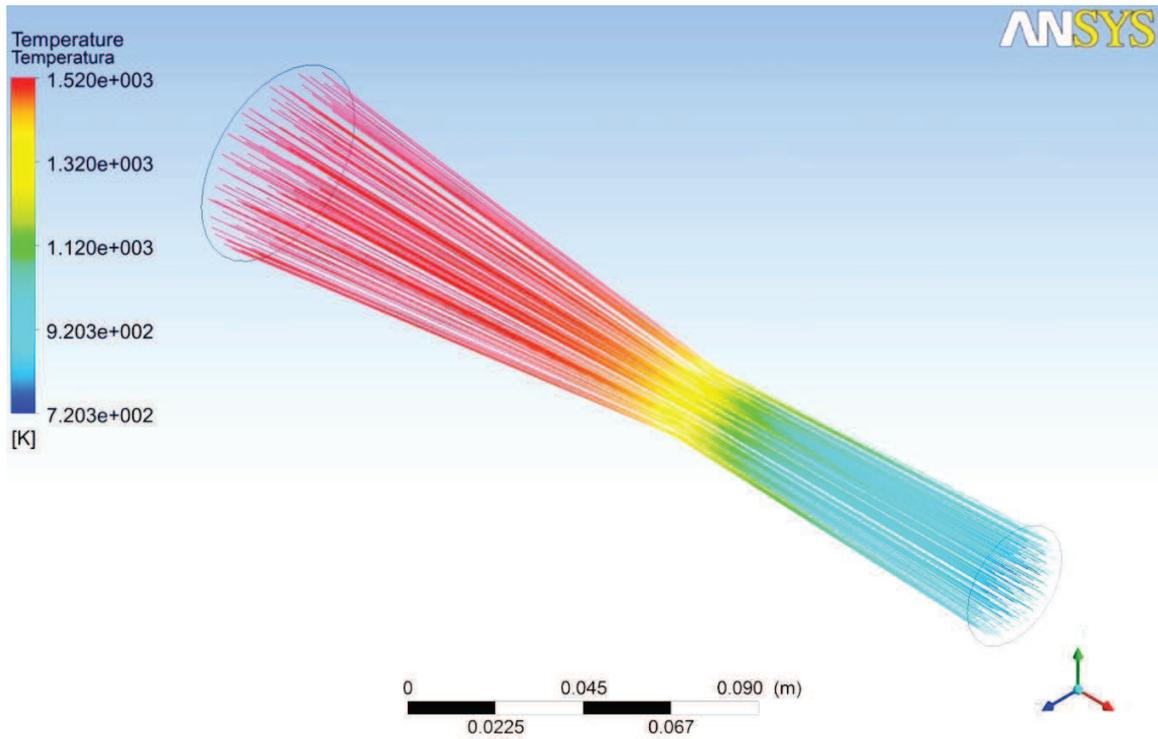


Figura A.13 Distribución de la Temperatura para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,825$.

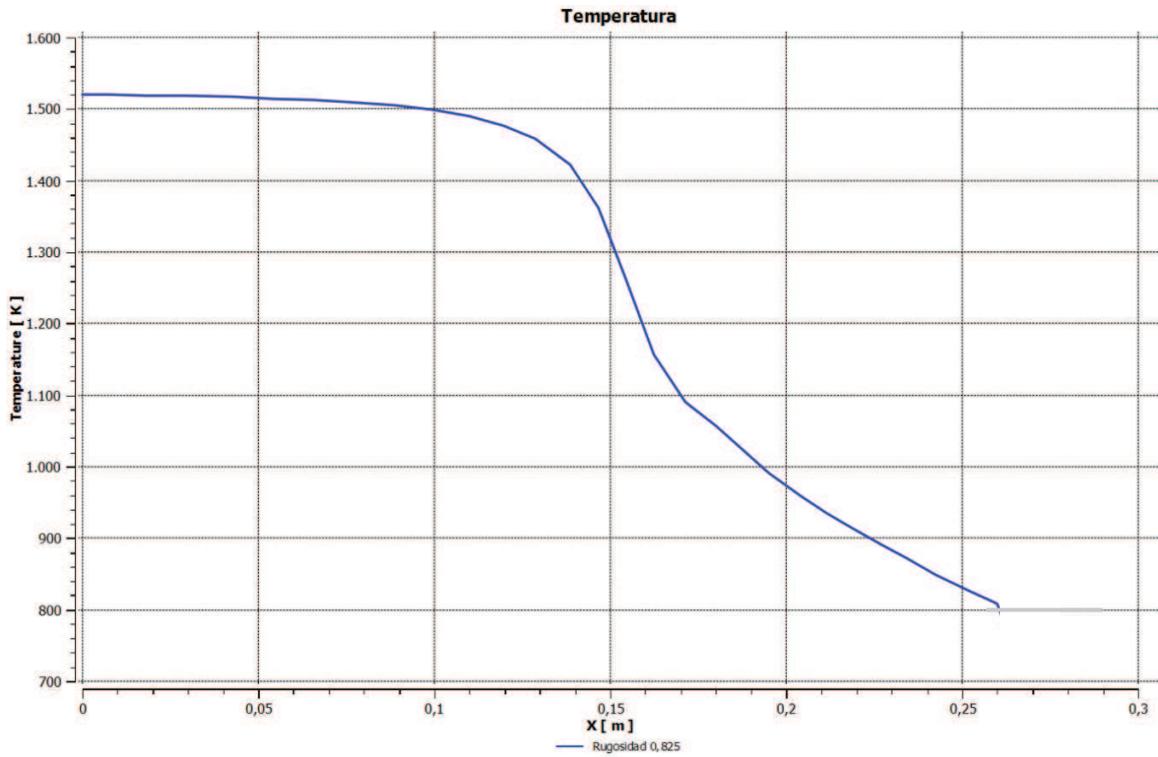


Figura A.14 Temperatura vs Posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,825$

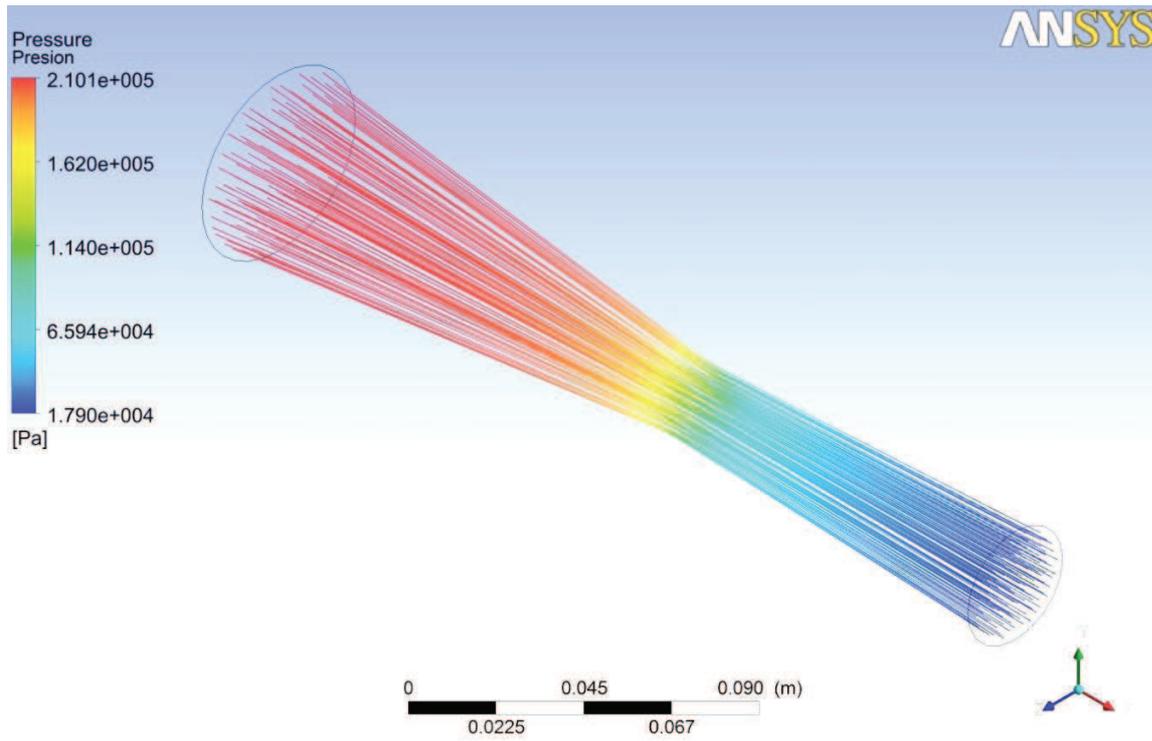


Figura A.15 Distribución de la Presión para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,825$.

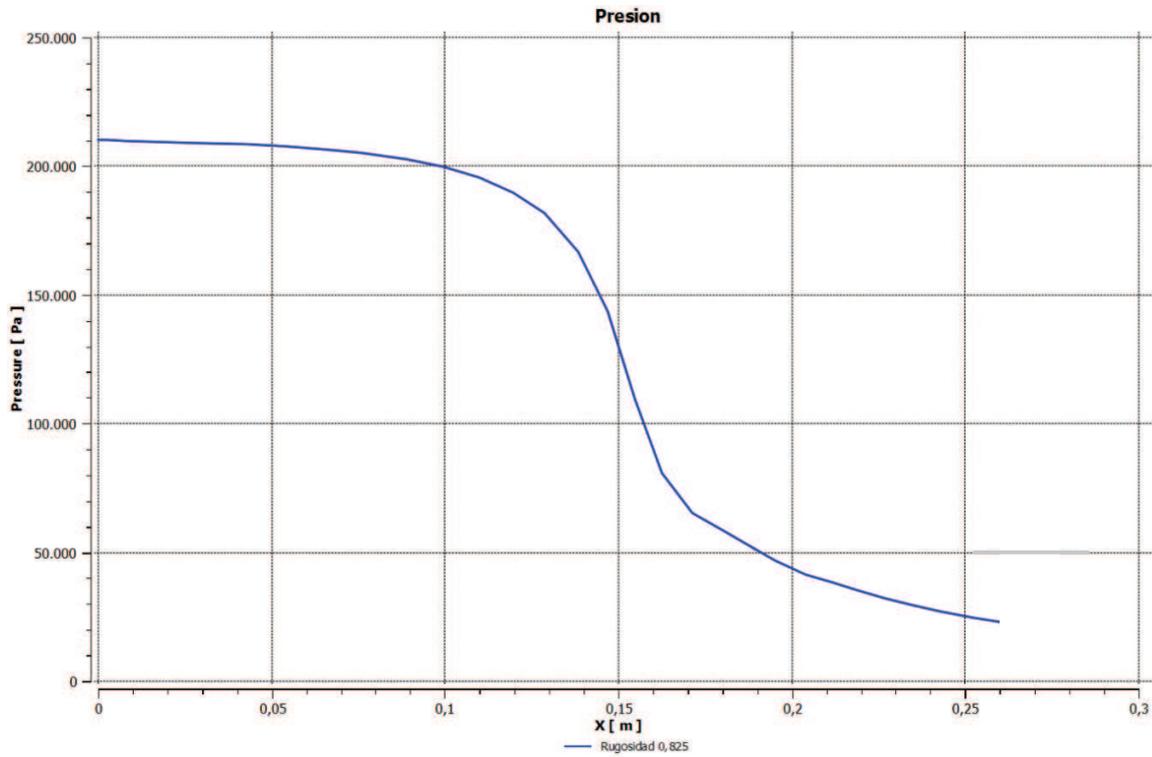


Figura A.16 Presión vs Posición para una rugosidad absoluta $\epsilon = 0,825$.

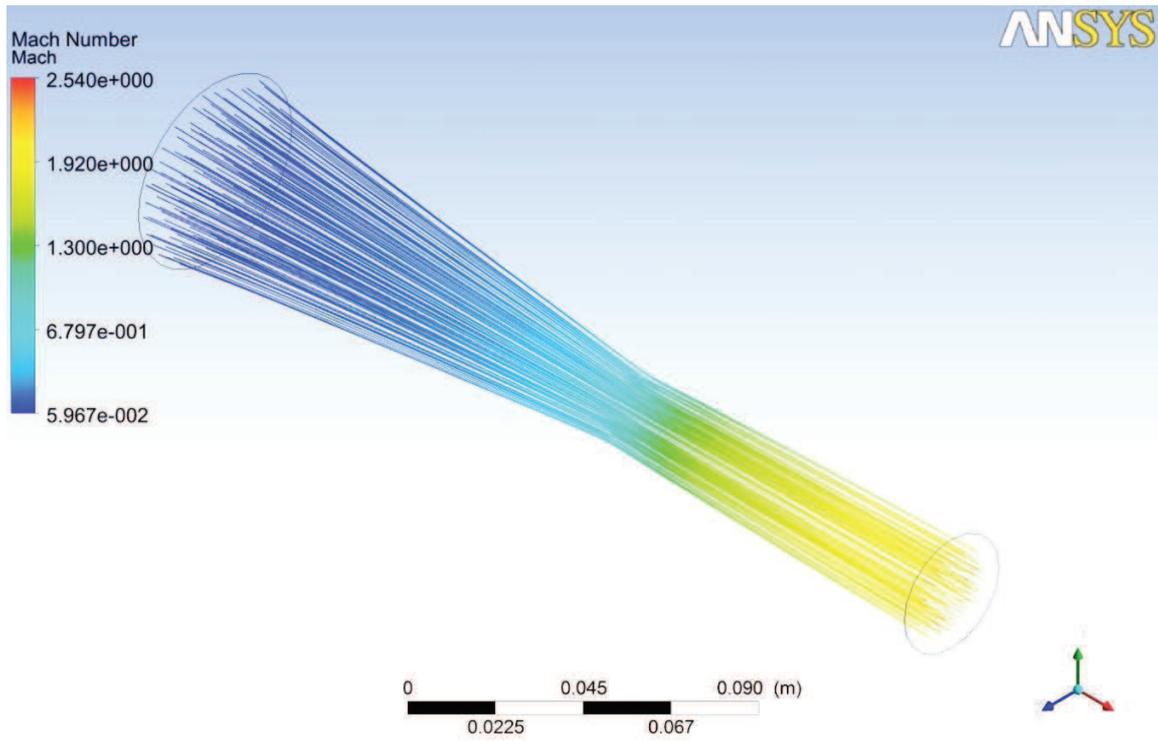


Figura A.17 Distribución de el Número de Mach para una cantidad de Calor $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$

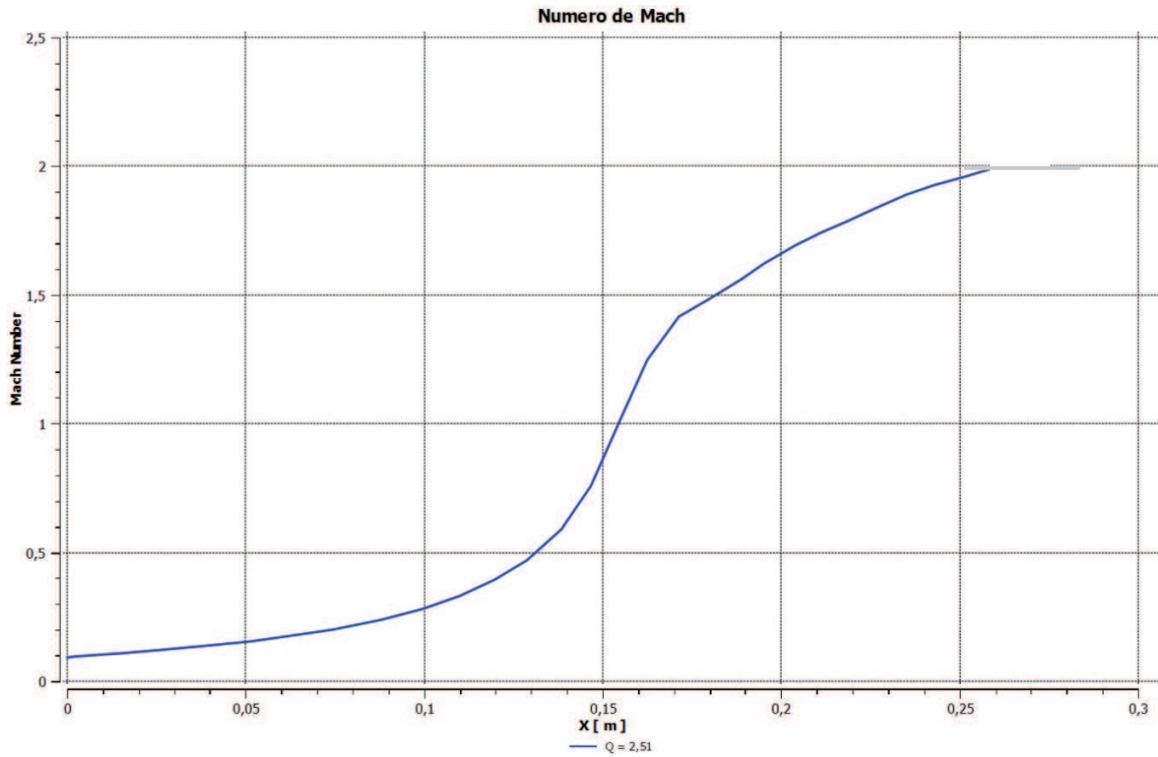


Figura A.18 Número de Mach vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$.

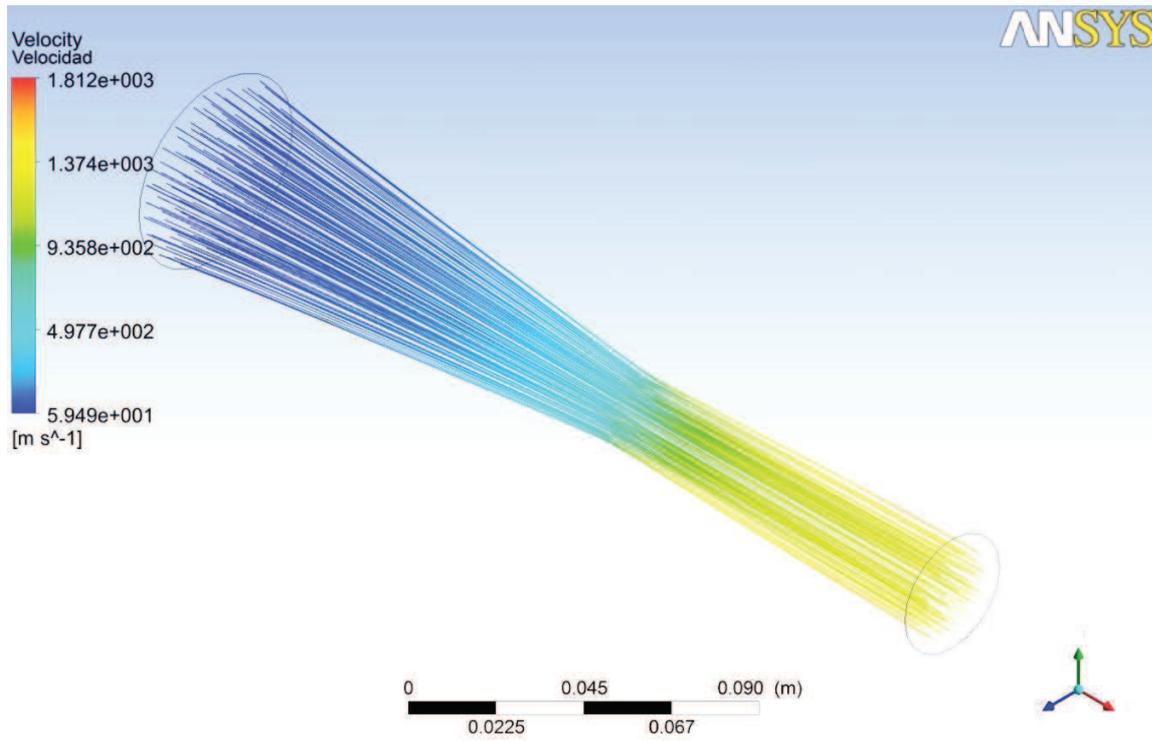


Figura A.19 Distribución de la velocidad para una cantidad de Calor $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$.

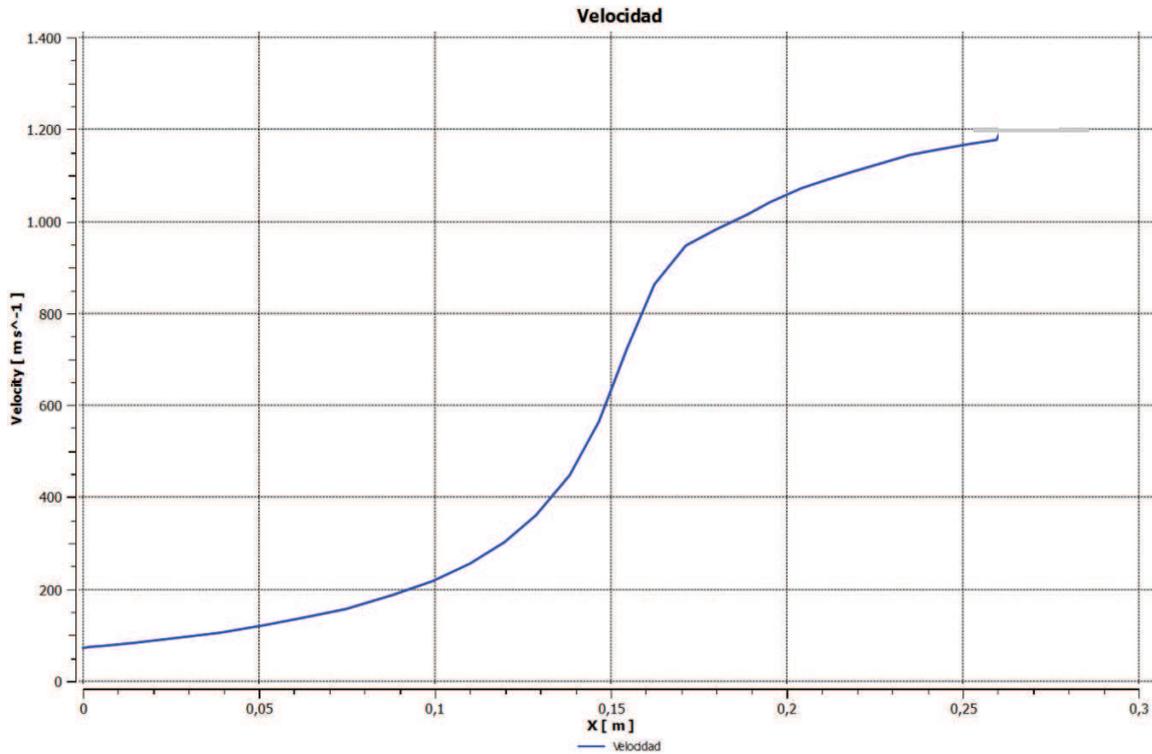


Figura A.20 Velocidad vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$.

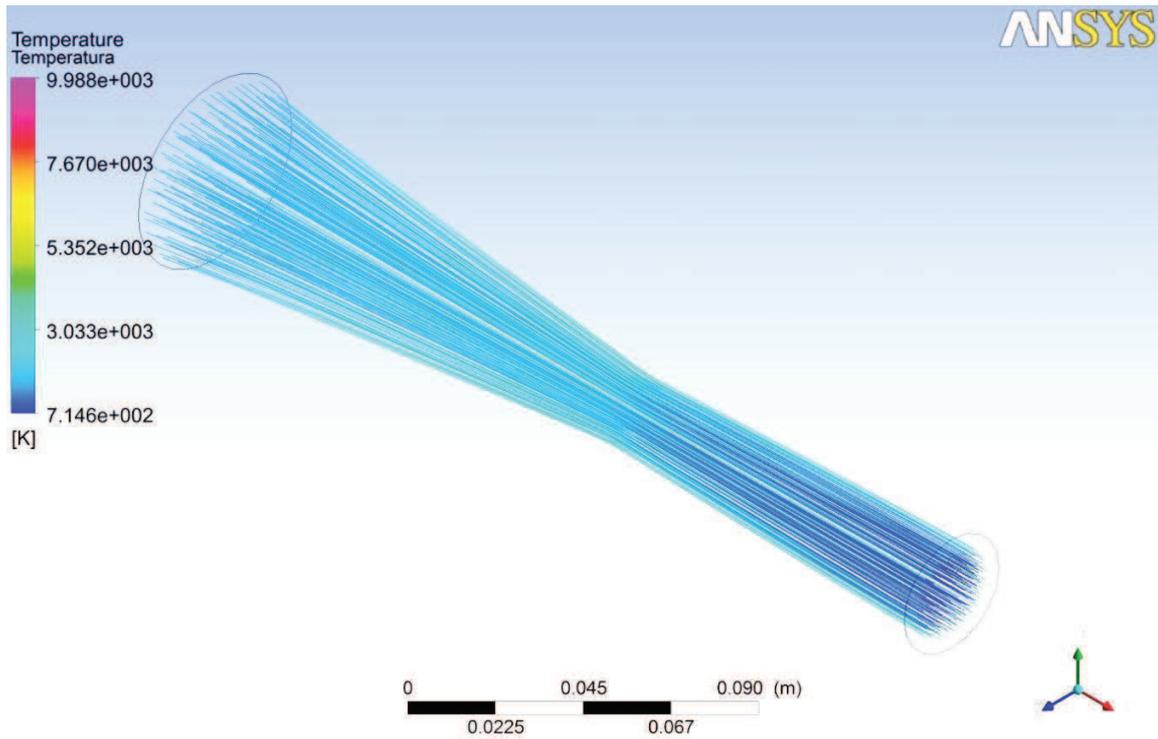


Figura A.21 Distribución de Temperatura para una cantidad de Calor $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$.

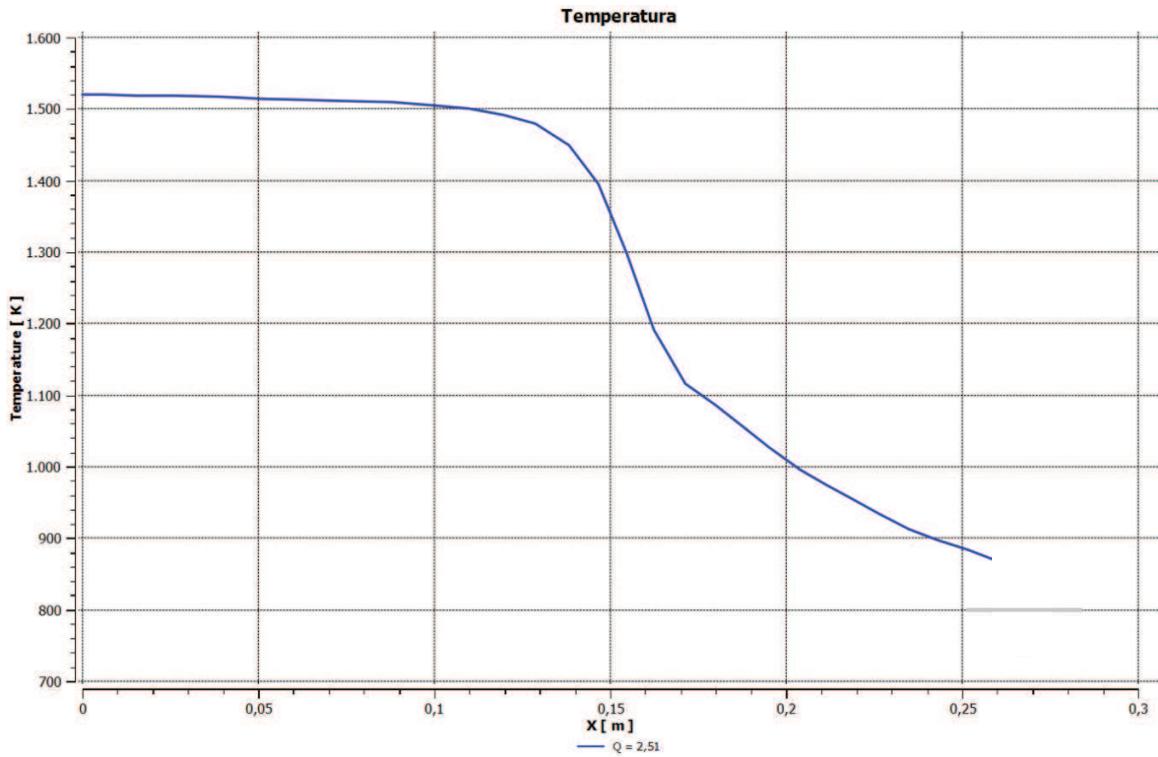


Figura A.22 Temperatura vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$.

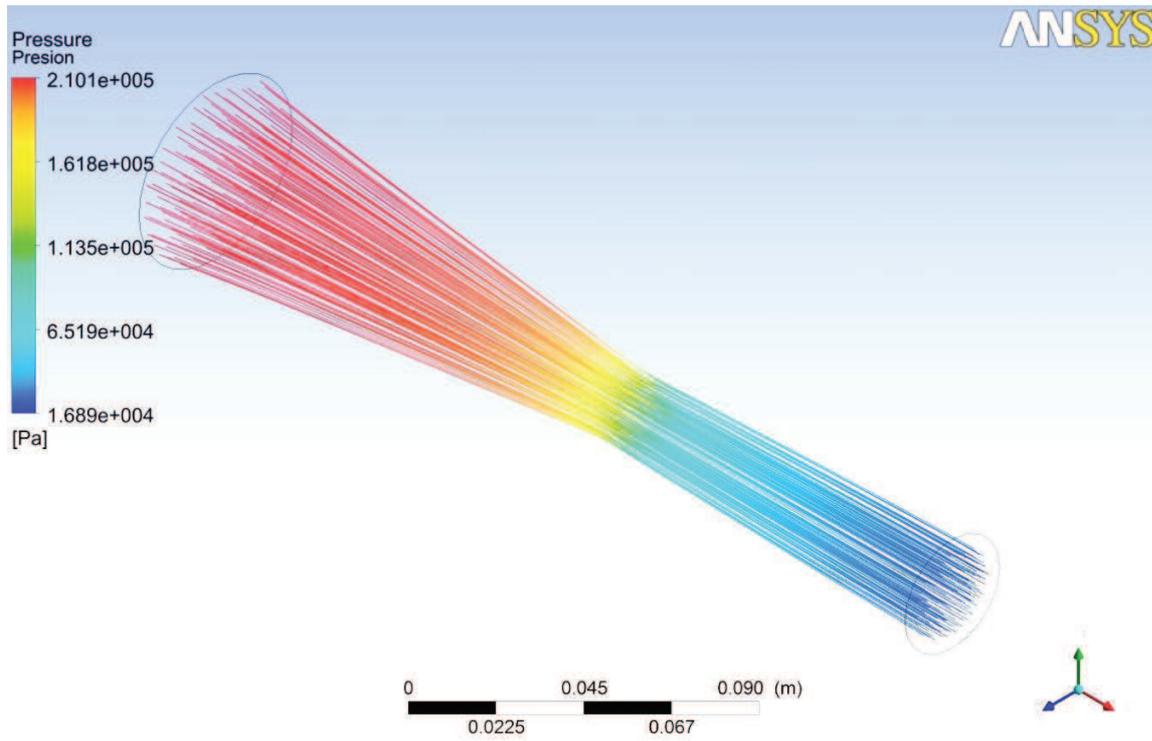


Figura A.23 Distribución de Presión para una cantidad de Calor $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$.

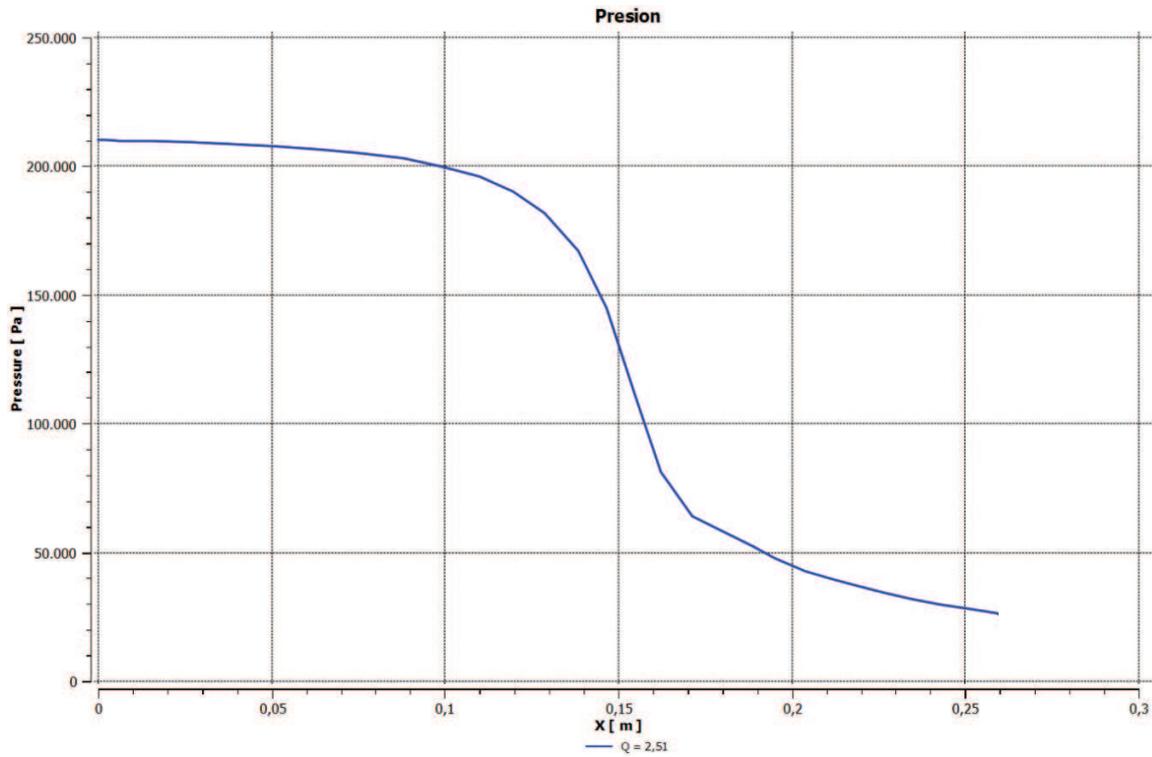


Figura A.24 Presión vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 2,51 \text{ MW/m}^2$.

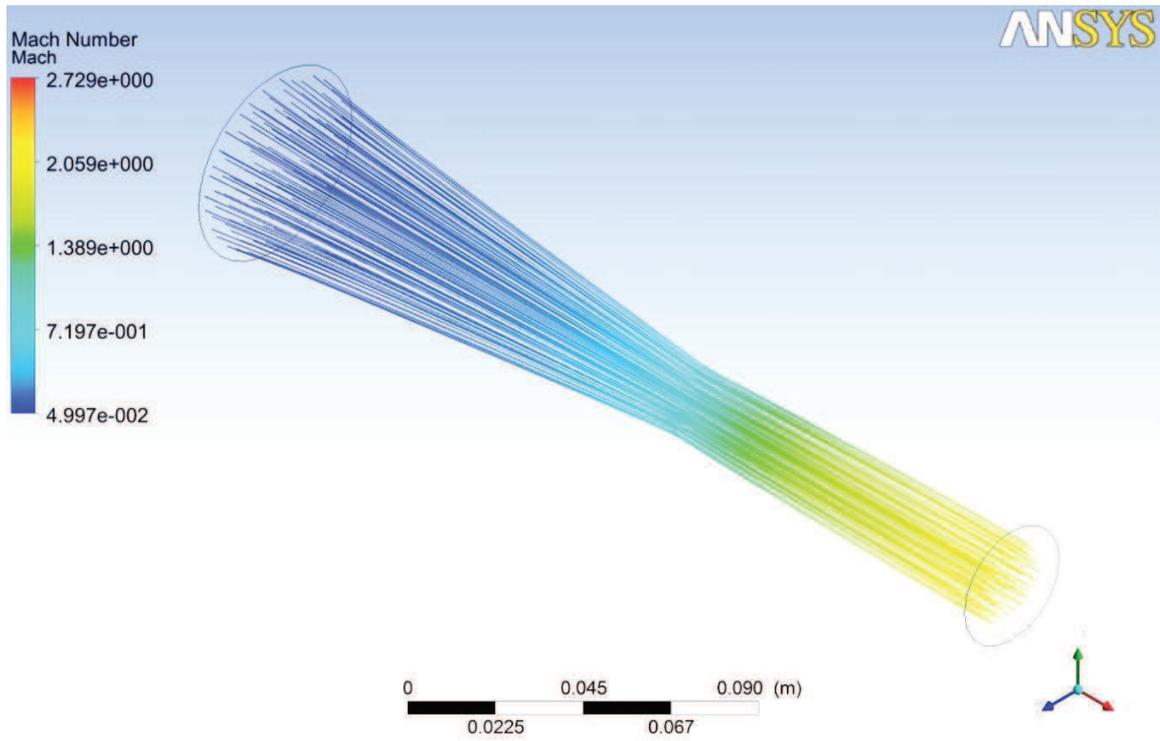


Figura A.25 Distribución de Número de Mach para una cantidad de Calor $Q = 3,765 \text{ MW/m}^2$.

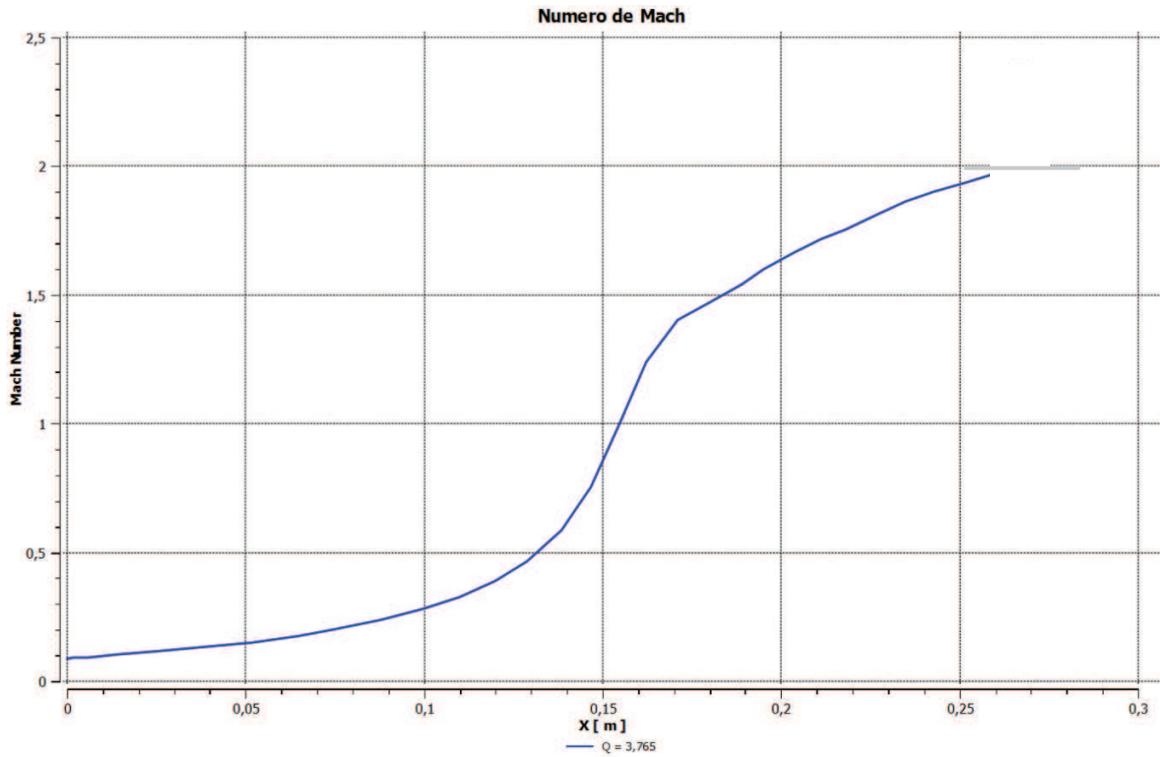


Figura A.26 Número de Mach vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 3,765 \text{ MW/m}^2$.

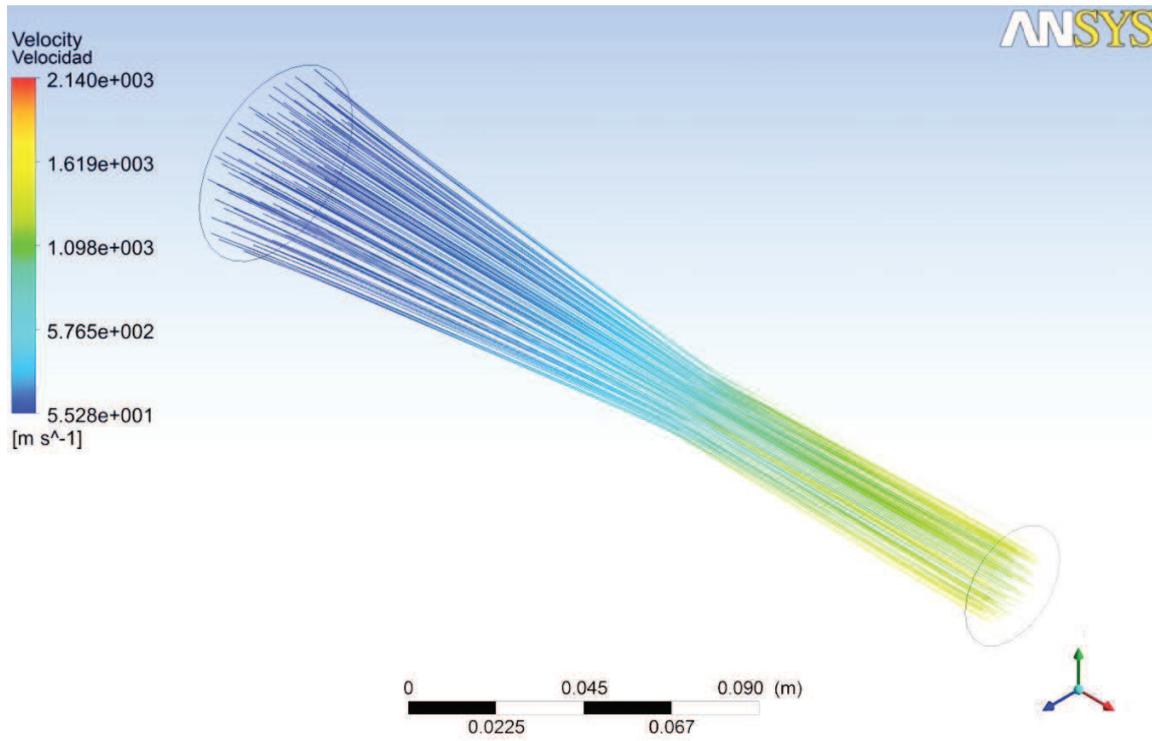


Figura A.27 Distribución de Velocidad para una cantidad de Calor $Q = 3,765 \text{ MW/m}^2$.

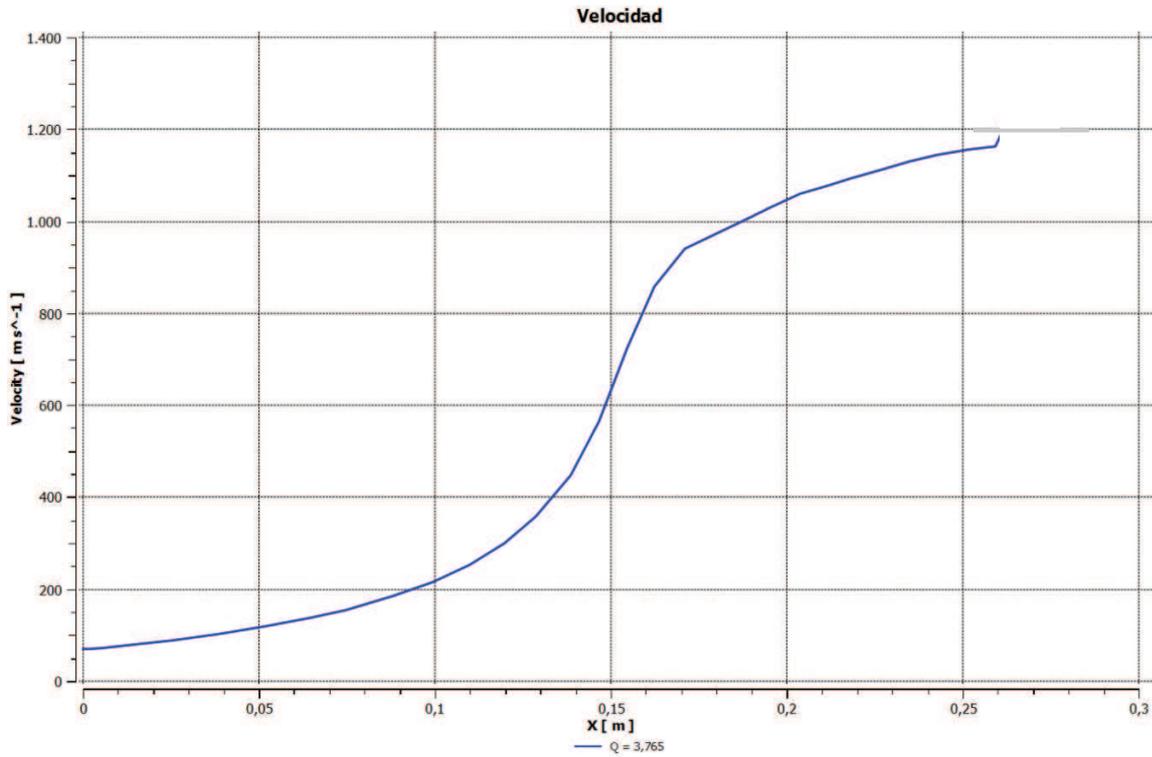


Figura A.28 Velocidad vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 3,765 \text{ MW/m}^2$.

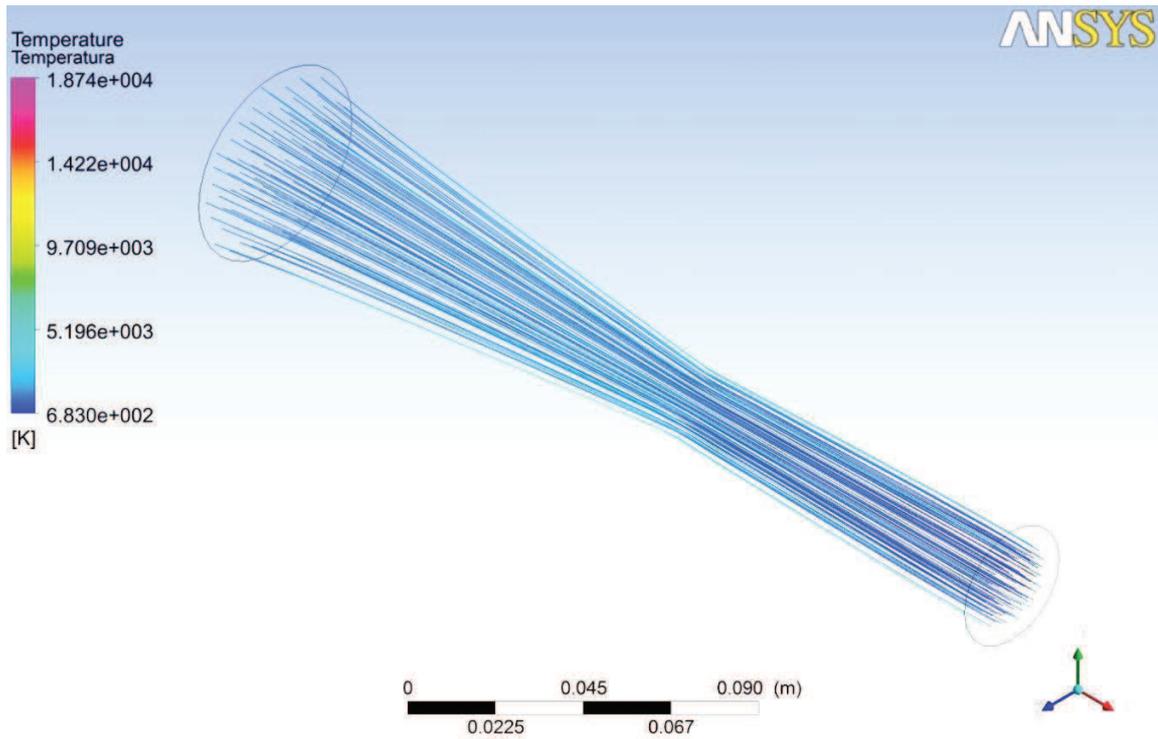


Figura A.29 Distribución de Temperatura para una cantidad de Calor $Q = 3,765 \text{ MW/m}^2$.

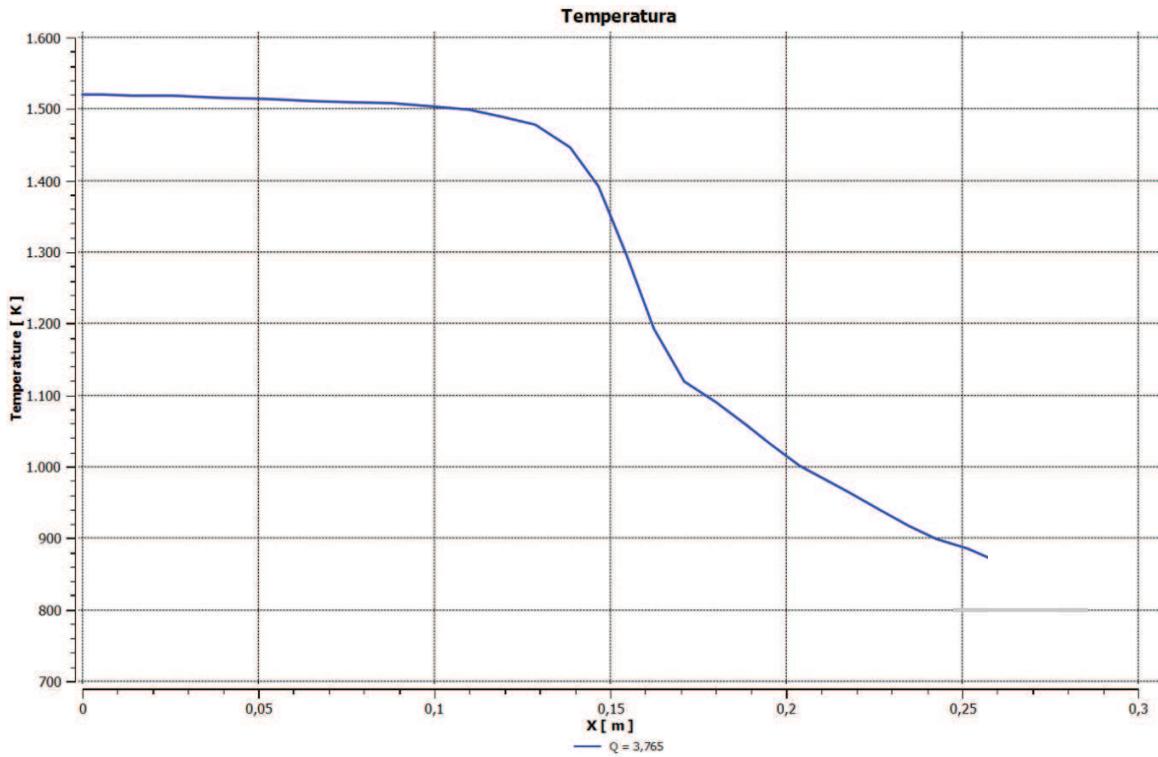


Figura A.30 Temperatura vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 3,765 \text{ MW/m}^2$.

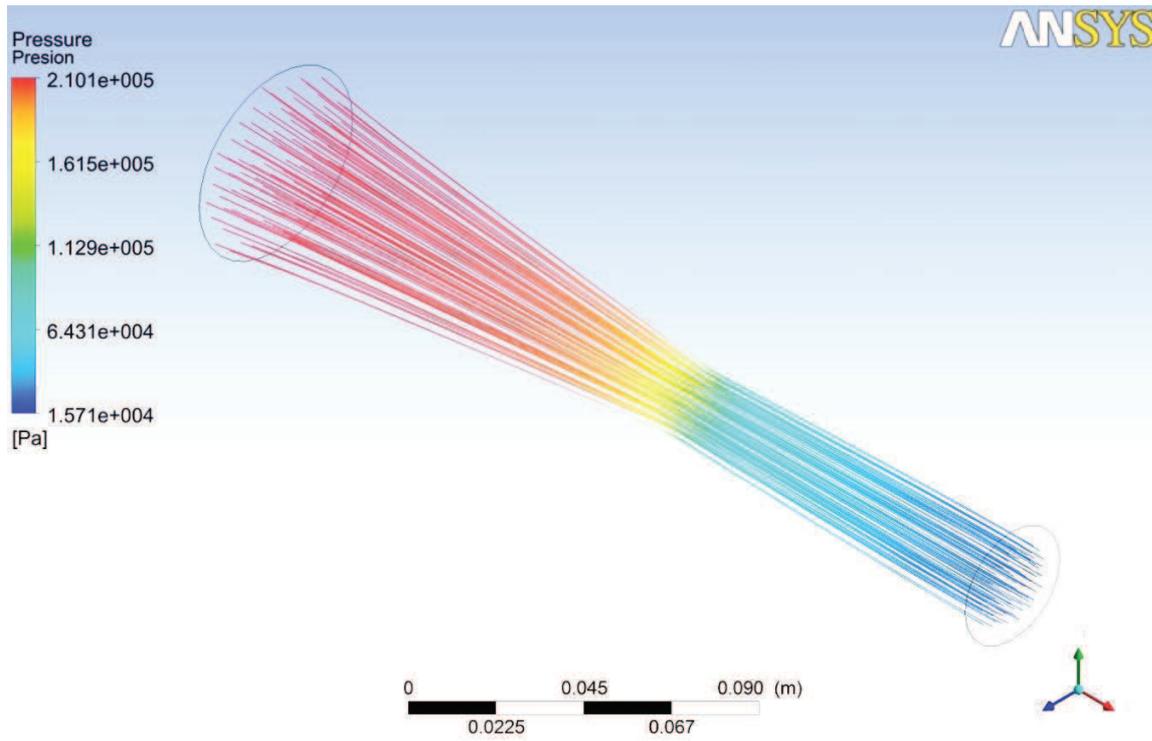


Figura A.31 Distribución de Presión para una cantidad de Calor $Q = 3,765 \text{ MW/m}^2$.

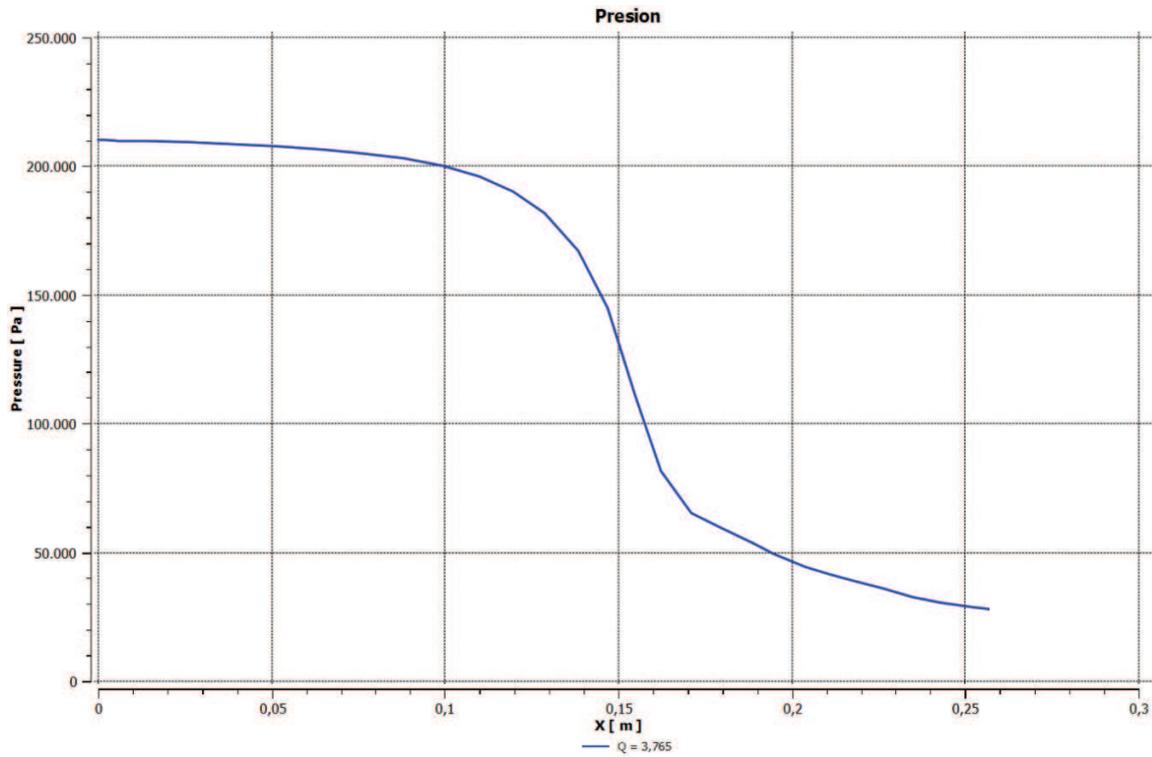


Figura A.32 Presión vs. Posición para una cantidad de Calor $Q = 3,765 \text{ MW/m}^2$.

Apéndice B.

Mediante los datos de salida de la cámara combustión para una turbina a gas obtenidos a partir de la investigación de S. Matarazzo, H. Laget [13], se procede al cálculo de la cantidad de calor transferido entre la tobera y el exterior tomando como condición crítica que el fluido, en este caso gases de combustión entran, a la tobera con la misma temperatura de salida de la cámara de combustión, mientras la temperatura de salida de la tobera será obtenida mediante las relaciones de flujo isoentrópico para el caso de flujo supersónico [1].

Por lo tanto:

La cantidad de calor viene dada por la ecuación (B.1)

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p\Delta T \tag{B.1}$$

Donde:

c_p : calor específico (kJ/kgK)

\dot{m} : flujo másico dentro de la tobera (kg/s)

ΔT : diferencias de temperatura entre la entrada y salida de la tobera.

A partir de la explicación anterior y mediante la biografía mencionada se tiene que

$$T_0 = 1.500 \text{ K, siendo este valor la temperatura a la entrada de la tobera}$$

Mediante la relación entre el área de salida y de garganta de la tobera se entra en la tabla de flujo isoentrópico para el caso supersónico y se haya una relación entre la temperatura de entrada y de salida.

$$A_G = \frac{\pi D_G^2}{4} = \frac{\pi(0,0229 \text{ m})^2}{4} = 4,1187065 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_S = \frac{\pi D_S^2}{4} = \frac{\pi(0,03435 \text{ m})^2}{4} = 9,26789 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\frac{A_S}{A_G} = 2,25 \xrightarrow{\text{Tabla Flujo Isoentropico}} M_{d,sup} = 2,23 \quad \frac{T_S}{T_0} = 0,47944$$

Siendo $M_{d,sup}$ el valor de número de Mach de diseño para condición supersónica. Con la relación anterior y la temperatura de entrada se obtiene el valor de temperatura de salida.

$$\frac{T_S}{1500} = 0,47944 \quad T_S = 719,16 \text{ K}$$

El flujo másico es obtenido a partir de programa CFD, en el cual se realizó una simulación de la tobera en condiciones ideales, es decir sin transferencia de calor y cuyo valor es:

$$\dot{m} = 0,29 \frac{kg}{s}$$

Mientras que el valor del c_p al tratarse de gases de combustión se puede aproximar a un gas ideal en este caso Aire, mediante las tablas tabulas de valores de c_p [2]

$$c_p = 1,010 \frac{kJ}{kgK}$$

Con todos los datos ya obtenidos, se procede a calcular la transferencia de calor en la tobera:

$$\dot{Q} = 1,010 \frac{kJ}{kgK} * \frac{0,29kg}{s} * (1500 - 719,16) = 228,70 kW$$

Debido a que el software CFD necesita que los valores de transferencia de calor sean expresados en función del área de transferencia se divide el valor obtenido anteriormente entre el área de la envolvente de la tobera, la cual es obtenida a partir del software CAD en donde se dibujo la misma y cuyo valor es:

$$A_t = 91,155 \times 10^{-4} m^2$$

Luego el calor por unidad de área vendría dado por:

$$Q = \frac{\dot{Q}}{A_t} = \frac{228,70kW}{91,155 \times 10^{-4} m^2} = 2,51 \frac{MW}{m^2} = Q_e$$

A partir de este valor de calor se establecen el resto de valores de estudio, siendo estos correspondientes al 50% Q_e , Q_e , 150% Q_e , 200% Q_e .