



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA



**ANÁLISIS NUMÉRICO DEL CAMPO DE FLUJO
INCOMPRESIBLE QUE PASA A TRAVÉS DEL ROTOR
DE UNA TURBINA HIDRÁULICA TIPO FRANCIS**

FIGUEROA JUAN

MATEHUS LUIS

BARBULA, MAYO DE 2012



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA



ANÁLISIS NUMÉRICO DEL CAMPO DE FLUJO INCOMPRESIBLE QUE PASA A TRAVÉS DEL ROTOR DE UNA TURBINA HIDRÁULICA TIPO FRANCIS

*Trabajo especial de grado presentado ante la ilustre Universidad de Carabobo
para optar al título de Ingeniero Mecánico*

TUTOR

PROF. CARABALLO GRUBER

FIGUEROA JUAN

MATEHUS LUIS

BARBULA, MAYO DE 2012

NOMENCLATURA

Símbolo	Descripción	Unidad
b_1	Ancho a la entrada del rodete	m
b_2	Ancho a la salida del rodete	m
α_1	Angulo entre \vec{V}_1 y \vec{U}_1	°
α_2	Angulo entre \vec{V}_2 y \vec{U}_2	°
β_1	Angulo entre \vec{U}_1 y \vec{W}_1	°
β_2	Angulo entre \vec{U}_2 y \vec{W}_2	°
Q	Caudal	m ³ /s
λ	Coefficiente de viscosidad	m ² /s
ρ	Densidad del fluido	kg/m ³
D_1	Diámetro a la entrada de los alabes	m
D_2	Diámetro a la salida de los alabes	m
r	Difusividad de Eddy	N·s/m ²
H_u	Disponibilidad de Euler	m
h_T	Entalpía total	J

Nomenclatura

t

\dot{m}	Flujo másico	kg/s
g	Gravedad	kg·m/s ²
M	Momento da la cantidad de movimiento	N·m
R _e	Numero de Reynolds	-
∇	Operador gradiente	-
P	Potencia	W
P'	Presión modificada	Pa
P	Presión estática	Pa
θ_E	Sesgo de una celda	-
P _k	Tasa de producción de turbulencia	-
T	Temperatura	°C
t	Tiempo	s
\vec{V}_1	Velocidad absoluta de una partícula de fluido a la entrada de un álabe	m/s
\vec{V}_2	Velocidad absoluta de una partícula de fluido a la salida de un álabe	m/s
N	Velocidad angular del impulsor	rpm
\vec{U}_1	Velocidad tangencial del impulsor a la entrada	m/s

Nomenclatura

\vec{U}_2	Velocidad tangencial del impulsor a la salida	m/s
\vec{W}_1	Velocidad relativa del fluido respecto al alabe en la entrada	m/s
\vec{W}_2	Velocidad relativa del fluido respecto al alabe en la salida	m/s
μ	Viscosidad dinámica	Pa·s
ν	Viscosidad cinemática	m ² /s
μ_T	Viscosidad Turbulenta o de Eddy	N·s/m ²
μ_e	Viscosidad efectiva	N·s/m ²

f

CONSTANTES

Constante	Descripción	Valor
ρ	Densidad	1000 Kg/m ³
σ_k	Constante del modelo de turbulencia k- ω	2
σ_ω	Constante del modelo de turbulencia k- ω	2
σ_ϵ	Constante del modelo de turbulencia k- ϵ	1,3
g	Aceleración de gravedad	9,8 m/s ²
α	Constante de homogeneidad dimensional por vórtice	5/9
β	Contante de homogeneidad dimensional para corrección de cantidad de movimiento	0,075

INDICE GENERAL

NOMENCLATURA	iii
CONSTANTES.....	vi
INDICE GENERAL	vii
INDICE DE FIGURAS.....	xi
INDICE DE TABLAS	xiv
CAPÍTULO 1.....	15
<i>Introducción</i>	15
1.1 SITUACIÓN PROBLEMÁTICA.....	16
1.2 OBJETIVOS	17
1.2.1 OBJETIVO GENERAL.....	17
1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	17
1.3 JUSTIFICACIÓN	18
1.4 ALCANCE.....	18
1.5 LIMITACIONES	18
CAPÍTULO 2.....	20
<i>Marco Teórico</i>	20
2.1 MÁQUINAS HIDRÁULICAS	21
2.1.1 CLASIFICACIÓN DE LAS MÁQUINAS HIDRÁULICAS	21
2.1.2 TURBINAS HIDRÁULICAS.....	22
2.2 DESCRIPCIÓN DE LA TURBINA FRANCIS	23
2.3 ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LAS TURBOMÁQUINAS O ECUACIÓN DE EULER.....	24
2.3.1 TRIÁNGULO DE VELOCIDADES.....	25
2.3.2 PRIMERA FORMA DE LA ECUACIÓN DE EULER.....	26
2.3.3 SEGUNDA FORMA DE LA ECUACIÓN DE EULER	28
2.4 ECUACIÓN DE BERNOULLI	29
2.5 MODELACIÓN MATEMÁTICA.....	30

2.5.1 LEYES DE CONSERVACIÓN	30
2.5.1.3 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA TOTAL.....	32
2.6 ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.....	33
2.7 MODELOS DE TURBULENCIA “EDDY VISCOSITY”	36
2.7.1 MODELO DE TURBULENCIA KAPPA- EPSILON $K - E$	37
Ventajas:	38
Inconvenientes:	38
2.7.2 MODELO DE TURBULENCIA KAPPA-OMEGA $K - \Omega$	39
2.7.3 MODELO “SHEAR STRESS TRANSPORT” (SST).....	40
2.8 MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA CAPA LÍMITE.....	41
2.8.1 MODELOS DE DISTRIBUCIÓN DE LAS PÉRDIDAS (“DISTRIBUTED LOSS MODELS”).	42
2.8.2 MODELOS DE CAPA LÍMITE (“BOUNDARY LAYER APPROXIMATIONS”).	43
2.8.3 MODELOS DE LA CAPA DE CORTADURA (“THIN SHEAR LAYER, TSL”)..	43
2.8.4 LEYES DE LA PARED.....	43
2.9 NIVELES DE APROXIMACIÓN EMPLEADOS EN LAS TÉCNICAS NUMÉRICAS.....	44
2.10 COMPONENTES DE UN MÉTODO DE SOLUCIÓN NUMÉRICA. ..	48
2.10.1 MODELO MATEMÁTICO.....	48
2.10.2 MÉTODO DE DISCRETIZACIÓN.	49
2.10.3 COORDENADAS Y BASES DEL SISTEMA VECTOR.	50
2.10.4 MALLADO o DISCRETIZACIÓN NUMÉRICA.....	50
Mallas regulares estructuradas:	51
Mallado estructurado en bloque.....	53
Mallas híbridas.....	60
2.11 PROCEDIMIENTO PARA LA SOLUCIÓN EN CFD.....	60
2.12 VERIFICACIÓN DE LA GEOMETRÍA.	62
2.12.1 VERIFICACIÓN DE EJES “SLIVER EDGE CHECKING”.....	62
2.12.2 VERIFICACIÓN DE CARAS “SLIVER FACE CHECKING”.....	62
2.12.3 VERIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN “PARAMETRIZATION FACE CHECKING”.....	63

Índice General

2.13 CALIDAD DE LA MALLA.....	63
2.13.1 ORTOGONALIDAD DE MALLADO “MESH ORTOGONALITY”.....	63
2.13.2 FACTOR DE EXPANSIÓN DE LA MALLA “MESH EXPANSION FACTOR” 64	
2.13.3 ASPECTO DE RADIO DE LA MALLA “MESH ASPECT RADIO”.	65
2.14 CRITERIO DE CONVERGENCIA “RMS”.	65
2.15 ANÁLISIS DIMENSIONAL APLICADO A LAS TURBOMÁQUINAS	66
CAPÍTULO 3.....	73
<i>Marco Metodológico</i>	73
3.1 NIVEL DE INVESTIGACIÓN	74
3.2 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN.....	74
3.3 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	75
3.4 SELECCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS	75
3.5 DISEÑO DEL ROTOR A ESTUDIAR MEDIANTE UN PROGRAMA DE DISEÑO ASISTIDO POR COMPUTADORA (CAD).....	76
3.6 ESTABLECIMIENTO Y DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO DEL MODELO	77
3.7 CONFIGURACIÓN DE LAS CONDICIONES DEL DOMINIO	82
3.8 CONFIGURACIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE.....	86
3.9 CONFIGURACIÓN DEL SOLVER	90
3.10 OBTENCIÓN Y VALIDACIÓN DE RESULTADOS	93
CAPÍTULO 4.....	94
<i>Desarrollo de la Investigación</i>	94
4.1. GENERACIÓN DE DOMINIO.....	95
4.1.1. OBTENCIÓN DE LA GEOMETRÍA	95
4.1.2. GENERACIÓN Y VERIFICACIÓN DE LA CALIDAD DEL MALLADO	97
4.2. SELECCIÓN DEL MODELO DE TURBULENCIA	99
4.3. CONVERGENCIA DE LA SIMULACIÓN NUMÉRICA	103
4.3.1 CONVERGENCIA DE LA SIMULACIÓN PARA <i>Ventrada=3 ms</i>	103
4.3.2 CONVERGENCIA DE LA SIMULACIÓN PARA <i>Ventrada entre 3,2 y 4 ms</i> .	106

Índice General

4.4. VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS POR LA ECUACIÓN DE BERNOULLI PARA CAMPOS CENTRÍFUGOS.....	107
4.5. VALIDACIÓN POR COMPORTAMIENTO DE CURVAS.....	110
4.5.1 COMPORTAMIENTO DE LA CURVA POTENCIA VS CAUDAL.....	110
4.5.2 COMPORTAMIENTO DE LA CURVA FACTOR DE VELOCIDAD VS. COEFICIENTE DE CIRCULACIÓN.....	112
4.5.3 COMPORTAMIENTO DE LA CURVA COEFICIENTE DE ENERGÍA ESPECÍFICA VS FACTOR DE VELOCIDAD	114
CAPÍTULO 5.....	117
<i>Análisis de Resultados</i>	117
5.1 GENERACIÓN DE DOMINIO.....	118
5.2 SELECCIÓN DEL MODELO DE TURBULENCIA	118
5.3 CONVERGENCIA DE LA SIMULACIÓN NUMÉRICA	119
5.4 VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS POR LA ECUACIÓN DE BERNOULLI PARA CAMPOS CENTRÍFUGOS.....	120
5.5 VALIDACIÓN POR COMPORTAMIENTO DE CURVAS.....	121
CAPÍTULO 6.....	124
<i>Conclusiones y recomendaciones</i>	124
6.1 CONCLUSIONES	125
6.2 RECOMENDACIONES.....	126
<i>Referencias Bibliográficas</i>	128
<i>APENDICES</i>	129

INDICE DE FIGURAS

Fig. 2. 1 Triangulo de Velocidades en la entrada del Rotor.....	26
Fig. 2. 3 Las técnicas numéricas en la Mecánica de Fluidos.	48
Fig. 2. 4 Malla estructurada	51
Fig. 2. 5 Ejemplo en 2D de una cuadrícula estructurada, mallado no ortogonal, designada para el cálculo del flujo en un segmento simétrico de un banco de tubería escalonada	52
Fig. 2. 6 Ejemplo de un mallado estructurado en bloque que se ajusta a la interface, usado para el cálculo del flujo alrededor de un canal cilíndrico.	53
Fig. 2. 7 Ejemplo de un mallado estructurado en bloque en 2D al no ajustarse las interfaces, designado para el cálculo del flujo alrededor de un hydrofoil sumergido en agua.	54
Fig. 2. 8 Ejemplo de un mallado compuesto en 2D, usado para calcular el flujo alrededor de un canal cilíndrico.	55
Fig. 2. 9 Malla no estructurada.....	56
Fig. 2. 10 Ejemplo de un mallado no estructurado en 2D.....	57
Fig. 2. 11 Sesgo en celdas.	59
Fig. 2. 12 Ortogonalidad del mallado “MeshOrtogonality”	64
Fig. 2. 13 Factor de expansión de la malla “Mesh expansión factor”	64
Fig. 2. 14 Aspecto del radio de la malla “MeshAspect Radio”	65
Fig. 3. 1 Geometría recreada a partir de datos suministrados	76
Fig. 3. 2 Dominio Fluidizado en el interior del rotor	77
Fig. 3. 3 Un séptimo del dominio fluidizado	78
Fig. 3. 4 Preferencia del mallado (físicas y de solución)	79
Fig. 3. 5 Selección de nombres de las caras	80
Fig. 3. 6 Selección del modelo de mallado	81
Fig. 3. 7 Malla generada.....	81
Fig. 3. 8 Configuración de la periodicidad rotacional.....	82
Fig. 3. 9 Configuración de las condiciones del dominio (a)	84
Fig. 3. 10 Configuración de las condiciones del dominio (b)	85
Fig. 3. 11 Configuración de las condiciones de entrada del fluido (a).....	87
Fig. 3. 12 Configuración de las condiciones de entrada del fluido (b)	88
Fig. 3. 13 Configuración de las condiciones de salida del fluido (a)	89
Fig. 3. 14 Configuración de las condiciones de salida del fluido (b).....	90
Fig. 3. 15 Configuración del Solver	91

Fig. 3. 16 Edición de los valores prefijados en el solver.....	92
Fig. 4. 1 Generación del perfil del alabe para el modelo del rotor.....	95
Fig. 4. 2 Rotor generado.....	96
Fig. 4. 3 Imbalance del modelo Kappa Omega.....	101
Fig. 4. 4 Imbalance del modelo Kappa Epsilon	102
Fig. 4. 5 Convergencia de las ecuaciones de masa y momento para Ventrada=3 (m/s)	104
Fig. 4. 6 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para Ventrada=3 (m/s).....	105
Fig. 4. 7 Visualización de la línea de flujo en el dominio.....	107
Fig. 4. 8 Grafica Presión Vs. Posición de la línea de flujo	108
Fig. 4. 9 Potencia Vs. Caudal.....	111
Fig. 4. 10 Potencia Vs Caudal Numérica y Experimental [8].....	111
Fig. 4. 11 Comparación de curvas de potencia Vs Caudal.....	112
Fig. 4. 12 Factor de Velocidad Vs Coeficiente de Circulación.....	113
Fig. 4. 13 Representación de coeficiente de circulación Vs. Factor de velocidad....	114
Fig. 4. 14 Coeficiente de energía específica Vs. Factor de Velocidad.....	115
Fig. 4. 15 Representación del coeficiente de energía específico Vs. factor de velocidad.....	116
Fig. 5. 1 Comparación de curva numérica y de referencia.....	122
Fig. 5. 2 Comparación de curva numérica y de referencia (b).....	123
Fig. A. 1 Convergencia de las ecuaciones de masa y momento para Ventrada=3,2 (m/s).....	130
Fig. A. 2 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para Ventrada=3,2 (m/s). 130	
Fig. A. 3 Convergencia de las ecuaciones de masa y momento para Ventrada=3,6 (m/s).....	131
Fig. A. 4 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para Ventrada=3,6 (m/s). 131	
Fig. A. 5 Convergencia de las ecuaciones de masa y momento para Ventrada=3,8 (m/s).....	132
Fig. A. 6 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para Ventrada=3,8 (m/s). 132	
Fig. A. 7 Convergencia de las ecuaciones de masa y momento para Ventrada=4 (m/s)	133
Fig. A. 8 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para Ventrada=4 (m/s)....	133

INDICE DE TABLAS

Tabla 4. 1 Parámetros suministrados por la empresa.....	96
Tabla 4. 2 Estadística de la calidad del mallado	97
Tabla 4. 3 Características del mallado	98
Tabla 4. 4 Comparación de los modelos de turbulencia	100
Tabla 4. 5 Valores residuales RMS de cada simulación	106
Tabla 4. 6 Aplicación de la ecuación de Bernoulli	109
Tabla 4. 7 Data para gráfico de potencia Vs. caudal.....	110
Tabla 5. 1 Errores en modelos de turbulencia.....	119
Tabla 5. 2 Error de conservación de la energía en el rotor	120

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1 SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

A través de los años la energía eléctrica utilizada en el mundo, proviene en su mayoría de los generadores accionados por turbinas en sus diferentes presentaciones (hidráulicas, térmicas, eólicas y submarinas), según la disponibilidad de los recursos naturales existentes en cada zona. Las turbinas Francis es el tipo de turbina hidráulica más utilizado en el mundo para la producción de energía en centrales hidroeléctricas gracias a su alta eficiencia.

Estas son costosas de diseñar, fabricar e instalar lo cual se convierte en un inconveniente para su uso y estudio.

Para la simulación y análisis de estas turbomáquinas se necesitan bancos de ensayos los cuales por su diseño, partes que lo componen, ensamblajes y personal capacitado para su operación son de alto costo, además de su mantenimientos; también hay que considerar las dimensiones, ya que todos estos prototipos son de tamaños diferentes a los reales y por ende se pierde la similitud dinámica proporcionando que los resultados de los experimentos arrojen un grado considerable de errores e imprecisiones.

Con la utilización de análisis numérico, y la dinámica de flujo computacional (CFD) por sus siglas en inglés, se pueden realizar los modelos en tamaño real, además se obtienen resultados muy acertados con bajos costos y liberándose de los mantenimientos de los bancos.

En el medio académico el método de estudio de estas turbomáquinas y sus interacciones con el flujo a través de ellas prácticamente es en su totalidad por medio de ecuaciones teóricas y teoremas en muchos casos idealizados y que generalmente no representan la realidad.

La aplicación de un análisis por método numérico facilita la obtención de soluciones aproximadas al comportamiento del flujo dentro de las turbomáquinas en cuestión o sobre cualquiera según sea el caso. Con la técnica de dinámica de flujo computacional (CFD) se puede predecir las propiedades del flujo con un gran detalle, ayudando al diseño, prototipo y estudio experimental de estas máquinas, así como el conocimiento de todas las interacciones presentes dentro de ellas, evitando de esta forma realizar los gastos en la construcción de un banco experimental y obteniendo resultados aceptables y reales.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GENERAL

- Analizar numéricamente el campo de flujo incompresible a través del rotor de una turbina hidráulica tipo Francis

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Aplicar las ecuaciones de gobierno para el campo de flujo a través del rotor de una turbina hidráulica tipo Francis.
- Establecer el modelo físico-matemático del campo de flujo en condiciones estacionarias.
- Discretizar el dominio y fijar las condiciones de contorno del modelo.
- Simular el campo de flujo y obtener los resultados en forma de data, representaciones gráficas de las variables y/o videos.
- Validar los resultados comparándolos con los obtenidos por los autores en los trabajos antecedentes o en cuyo caso formular las hipótesis o propuestas en base a una interpretación sin violar las leyes físicas.

1.3 JUSTIFICACIÓN

El presente proyecto de investigación, tiene la finalidad de ampliar el campo de estudio en el área de dinámica de los fluidos por métodos distintos a los convencionales, ampliando las áreas de estudio por parte de los profesores y/o estudiantes en el desarrollo de estas herramienta de trabajo.

La realización de esta investigación presentara el desarrollo del análisis y simulación de los flujos que pasan a través del rotor de una turbina Francis por medio de un paquete computacional, usando de esta manera distintos modelos matemáticos que permitirán predecir con gran exactitud el comportamiento de estos flujos. Permitiendo así la ampliación de este tipo de estudios a nivel académico.

1.4 ALCANCE

Con la finalidad de realizar el estudio en el tiempo establecido, solo se enfocara el análisis del fluido incompresible que interactúa con el rodete de una turbina Francis. La simulación estará limitada al modelo numérico seleccionado.

1.5 LIMITACIONES

Algunas restricciones que pueden presentarse para la investigación son:

- No se ha incorporado al pensum de la carrera (Ingeniería Mecánica, en la Universidad de Carabobo), ninguna materia concerniente con la implementación de análisis numérico en la dinámica de los fluidos, por lo que se podrían presentar inconvenientes en la aplicación de este método.

Capítulo I

- Los movimientos y cambios reales del flujo dentro del impulsor de una turbina es de gran complejidad por la geometría del mismo, por lo que se podrían presentar complicaciones en la elaboración del prototipo y mallado del mismo.
- Según la complejidad del entorno a simular, las simulaciones pueden tardar mucho tiempo, por lo que estas se harán de manera que se puedan realizar dentro de los límites de tiempo establecidos para la elaboración de esta investigación.
- Actualmente no se cuenta con un banco de ensayo dentro del laboratorio de térmica destinado al estudio de las turbinas tipo Francis, lo cual podría presentar problemas en la validación de los resultados de estudio

CAPÍTULO 2

Marco Teórico

2.1 MÁQUINAS HIDRÁULICAS

Una máquina hidráulica es un dispositivo capaz de convertir energía hidráulica en energía mecánica; pueden ser motrices (turbinas), o generatrices (bombas), modificando la energía total de la vena fluida que las atraviesa. En el estudio de las turbomáquinas hidráulicas no se tienen en cuenta efectos de tipo térmico, aunque a veces habrá necesidad de recurrir a determinados conceptos termodinámicos; todos los fenómenos que se estudian serán en régimen permanente, caracterizados por una velocidad de rotación de la máquina y un caudal, constantes.

En una máquina hidráulica, el agua intercambia energía con un dispositivo mecánico de revolución que gira alrededor de su eje de simetría; éste mecanismo lleva una o varias ruedas, (rodetes o rotores), provistas de álabes, de forma que entre ellos existen unos espacios libres o canales, por los que circula el agua. Los métodos utilizados para su estudio son, el analítico, el experimental y el análisis dimensional.

El *método analítico* se fundamenta en el estudio del movimiento del fluido a través de los álabes, según los principios de la Mecánica de Fluidos.

El *método experimental*, se fundamenta en la formulación empírica de la Hidráulica, y la experimentación.

El *análisis dimensional* ofrece grupos de relaciones entre las variables que intervienen en el proceso, confirmando los coeficientes de funcionamiento de las turbomáquinas, al igual que los diversos números adimensionales que proporcionan información sobre la influencia de las propiedades del fluido en movimiento a través de los órganos que las componen [6].

2.1.1 CLASIFICACIÓN DE LAS MÁQUINAS HIDRÁULICAS

Una primera clasificación de las turbomáquinas hidráulicas, (de fluido incompresible), se puede hacer con arreglo a la función que desempeñan, en la forma siguiente:

a) **Turbomáquinas motrices**, que recogen la energía cedida por el fluido que las atraviesa, y la transforman en mecánica, pudiendo ser de dos tipos:

- *Dinámicas o cinéticas*, Turbinas y ruedas hidráulicas.
- *Estáticas o de presión*, Celulares (paletas), de engranajes, helicoidales, entre otras.

b) **Turbomáquinas generatrices**, que aumentan la energía del fluido que las atraviesa bajo forma potencial, (aumento de presión), o cinética; la energía mecánica que consumen es suministrada por un motor, pudiendo ser:

- *Bombas de álabes*, entre las que se encuentran las bombas centrífugas y axiales
- *Hélices marinas*, cuyo principio es diferente a las anteriores; proporcionan un empuje sobre la carena de un buque [6].

2.1.2 TURBINAS HIDRÁULICAS

Es una turbomáquina elemental o monocelular tiene, básicamente, una serie de álabes fijos, (distribuidor), y otra de álabes móviles, (rueda, rodete, rotor). La asociación de un órgano fijo y una rueda móvil constituye una célula; una turbomáquina monocelular se compone de tres órganos diferentes que el fluido va atravesando sucesivamente, el distribuidor, el rodete y el difusor.

El *distribuidor* y *el difusor*, (tubo de aspiración), forman parte del estator de la máquina, es decir, son órganos fijos; así como el rodete está siempre presente, el distribuidor y el difusor pueden ser en determinadas turbinas, inexistentes.

El *distribuidor* es un órgano fijo cuya misión es dirigir el agua, desde la sección de entrada de la máquina hacia la entrada en el rodete, distribuyéndola alrededor del mismo, (turbinas de admisión total), o a una parte, (turbinas de admisión parcial), es decir, permite regular el agua que entra en la turbina, desde cerrar el paso totalmente, caudal cero, hasta lograr el caudal máximo. Es también un órgano que transforma la

energía de presión en energía de velocidad; en las turbinas hélico-centrípetas y en las axiales está precedido de una cámara espiral (voluta) que conduce el agua desde la sección de entrada, asegurando un reparto simétrico de la misma en la superficie de entrada del distribuidor.

El *rodete* es el elemento esencial de la turbina, estando provisto de álabes en los que tiene lugar el intercambio de energía entre el agua y la máquina.

El *difusor o tubo de aspiración*, es un conducto por donde descarga el fluido, generalmente con ensanchamiento progresivo, recto o acodado, que sale del rodete y la conduce hasta el canal de fuga, permitiendo recuperar parte de la energía cinética a la salida del rodete para lo cual debe ensancharse; si por razones de explotación el rodete está instalado a una cierta altura por encima del canal de fuga, un simple difusor cilíndrico permite su recuperación, que de otra forma se perdería. Si la turbina no posee tubo de aspiración, se la llama de escape libre[6].

2.2 DESCRIPCIÓN DE LA TURBINA FRANCIS

La turbina Francis fue desarrollada por James B. Francis en el año 1848. Se trata de una turbina de reacción de flujo interno que combina conceptos tanto de flujo radial como de flujo axial.

Las turbinas Francis son turbinas hidráulicas que se pueden diseñar para un amplio rango de saltos y caudales, siendo capaces de operar en rangos de desnivel que van de los diez metros hasta varios cientos de metros, manejando caudales medios entre 1 y 700 m³/s. Esto, junto con su alta eficiencia, ha hecho que este tipo de turbina sea el más ampliamente usado en el mundo, principalmente para la producción de energía eléctrica mediante centrales hidroeléctricas.

Las norias y turbinas hidráulicas han sido usadas históricamente para accionar molinos de diversos tipos, aunque eran bastante ineficientes. En el siglo XIX las

mejoras logradas en las turbinas hidráulicas permitieron que, allí donde se disponía de un salto de agua, pudiesen competir con la máquina de vapor.

En 1826 Benoit Fourneyron desarrolló una turbina de flujo externo de alta eficiencia (80%). El agua era dirigida tangencialmente a través del rodete de la turbina provocando su giro. En 1848 James B. Francis mejoró el diseño de Fourneyron y desarrolló una turbina con el 90% de eficiencia. Aplicó principios y métodos de prueba científicos para producir la turbina más eficiente elaborada hasta la fecha, sus métodos matemáticos y gráficos de cálculo mejoraron el conocimiento tecnológico en lo referente al diseño e ingeniería de turbinas. Sus métodos analíticos permitieron diseños seguros de turbinas de alta eficiencia.

La turbina Francis es una turbina de reacción, lo cual significa que el fluido cambia de presión a medida que se desplaza a través de la turbina, perdiendo su energía. Se necesita una carcasa para contener el caudal de agua.

El rodete de la Turbina Francis se puede clasificar en lento, normal y rápido, el fluido entra al rodete a presiones mayores a la atmosférica y sale del mismo a presiones menores o igual a la atmosférica.

La admisión tiene forma de espiral. Los álabes directrices dirigen el agua tangencialmente hacia el rodete. Este flujo radial actúa sobre los álabes del rodete, causando que éste gire. Los álabes directores pueden ser ajustables para permitir un funcionamiento eficiente en un rango amplio de condiciones del caudal de agua [5].

2.3 ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LAS TURBOMÁQUINAS O ECUACIÓN DE EULER

La ecuación de Euler es la ecuación fundamental para el estudio de las turbomáquinas, tanto de las turbomáquinas hidráulicas, como de las turbomáquinas

térmicas. Constituye, pues, la ecuación básica tanto para el estudio de las bombas, ventiladores, turbinas hidráulicas (turbomáquinas hidráulicas), como para el estudio de los turbocompresores, turbinas de vapor y turbinas de gas (turbomáquinas térmicas). Es la ecuación que expresa la energía intercambiada en el rodete de todas las máquinas [6].

2.3.1 TRIÁNGULO DE VELOCIDADES

Para estudiar el movimiento del agua en las turbinas hidráulicas se utiliza una nomenclatura universal que definen los triángulos de velocidades, a la entrada y salida del rodete como se muestra en la figura 2.1, de la siguiente manera:

\vec{U} : Velocidad tangencial o periférica de la rueda.

\vec{V} : Velocidad absoluta del agua.

\vec{W} : Velocidad relativa del agua.

α : Angulo que forman las velocidades \vec{V} y \vec{U} .

β : Angulo que forman la velocidades \vec{U} y \vec{W} .

El subíndice 0 es el referente a la entrada del agua en la corona directriz o distribuidor.

El subíndice 1 es el referente a la entrada del agua en el rodete.

El subíndice 2 es el referente a la salida del agua del rodete.

El subíndice 3 es el referente a la salida del agua del tubo de aspiración.

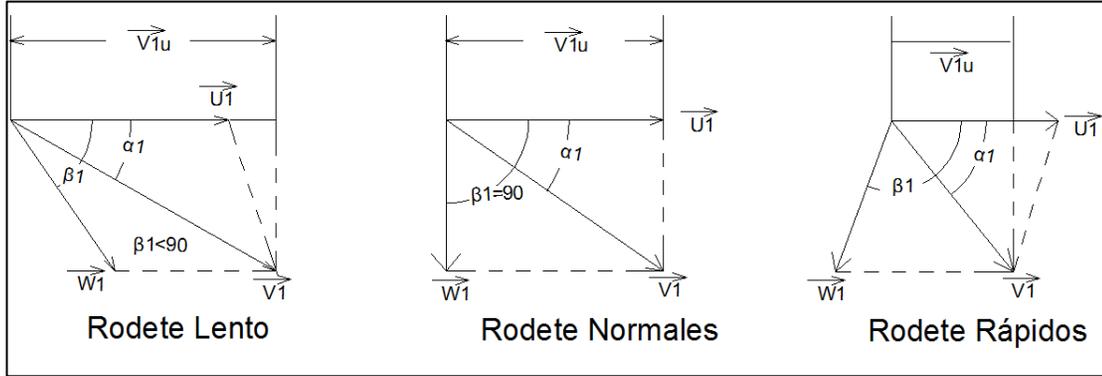


Fig. 2. 1 Triangulo de Velocidades en la entrada del Rotor [5]

2.3.2 PRIMERA FORMA DE LA ECUACIÓN DE EULER

La variación respecto al tiempo del momento cinético del sistema es igual al momento resultante de las fuerzas que actúan sobre él, como se muestra en la ecuación 2.1

$$\vec{T} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho(\vec{r} \times \vec{V}) dV + \int_{vc} \rho(\vec{r} \times \vec{V})(\vec{C}dA) \quad (2.1)$$

Si se tiene flujo permanente se tiene:

$$\vec{T} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho(\vec{r} \times \vec{V})(\vec{V}dA) \quad (2.2)$$

Simplificando, se obtiene

$$T = \sum F_x r = m \frac{d(rV_x)}{dt} \quad (2.3)$$

$$T_A = \dot{m}(r_2 V_{2u} - r_1 V_{1u}) \quad (2.4)$$

T_A es positivo (+) cuando las turbomáquinas son generadoras, y T_A es negativo (-) las turbomáquinas son motoras

Turbomáquinas Generadoras:

$$T_G = \dot{m}(r_2 V_{2u} - r_1 V_{1u}) \quad (2.5)$$

Turbomáquinas Motoras:

$$T_M = -\dot{m}(r_2 V_{2u} - r_1 V_{1u}) \text{ ó } T_M = \dot{m}(r_1 V_{1u} - r_2 V_{2u}) \quad (2.6)$$

Estas ecuaciones (Ec2.5 y Ec 2.6) reciben el nombre de ecuación fundamental de las turbomáquinas, además esta ecuación es independiente del fluido de trabajo y válida por tanto para fluidos en régimen compresible o incompresible.

Para turbomáquinas que operan en régimen incompresible, la ecuación de Euler se expresa de la siguiente forma:

$$H = \frac{W}{g} = \frac{1}{g}(U_1 V_{1u} - U_2 V_{2u}) \quad (2.7)$$

Como se muestra en la ecuación 2.7, si se multiplica el momento por la velocidad angular ω se tendrá la potencia transmitida.

$$\dot{W}_M = T_M \omega = \dot{m}(\omega r_2 V - \omega r_1 V_{1u}) \quad (2.8)$$

Como se representa en la ecuación 2.9, si se divide entre el flujo másico (\dot{m}), se tiene el trabajo específico

$$W_M = \frac{\dot{W}_M}{\dot{m}} = (U_1 V_{1u} - U_2 V_{2u}) \quad (2.9)$$

2.3.3 SEGUNDA FORMA DE LA ECUACIÓN DE EULER

Del triángulo de entrada se deduce trigonométricamente las ecuaciones 2.10 y 2.11:

$$W_1^2 = U_1^2 + V_1^2 - 2U_1V_1 \cos \alpha_1 = U_1^2 + V_1^2 - 2U_1V_{1u} \quad (2.10)$$

$$U_1V_{1u} = \frac{1}{2(U_1^2 + V_1^2 - W_1^2)} \quad (2.11)$$

Asimismo, del triángulo de salida se deduce la ecuación 2.12:

$$U_2V_{2u} = \frac{1}{2(U_2^2 + V_2^2 - W_2^2)} \quad (2.12)$$

En la ecuación 2.13 se lleva a la ecuación de Euler los valores de U_1V_{1u} y U_2V_{2u} y ordenando los términos, se tiene:

$$H_u = \pm \left(\frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g} + \frac{V_1^2 + V_2^2}{2g} \right) \quad (2.13)$$

Al analizar esta última ecuación, se puede descomponer en tres componentes, la primera componente (dinámica) como lo es el término $\frac{V_1^2 + V_2^2}{2g}$, la cual está asociada a los cambios de presión dinámica que experimenta el fluido al pasar a través de la corona de álabes móviles (aceleración del fluido en las máquinas generadoras y desaceleración del fluido en las máquinas motoras); la segunda componente (estática) como lo es el término $\frac{U_1^2 - U_2^2}{2g}$, la cual está asociada a los cambios de presión estática que experimenta el fluido al pasar a través de la corona de álabes móviles (debido al efecto centrífugo en las máquinas generadoras y debido al efecto centrípeto en las máquinas motoras) y la tercera componente (estática) como lo es el término $\frac{W_2^2 - W_1^2}{2g}$, la cual está asociada a los cambios de presión estática que experimenta el fluido al pasar a través de la corona de álabes móviles (debido al efecto difusivo o

desaceleración relativa en las máquinas generadoras o al efecto expansivo o aceleración relativa en las máquinas motoras) [6].

2.4 ECUACIÓN DE BERNOULLI

La variación de la energía del fluido por unidad de peso, tiene dimensiones de la longitud y se conoce como altura o carga, su expresión para una turbomáquina hidráulica en la cual se desprecia la variación de la energía interna y se considera la densidad como constante viene dada por la ecuación 2.14:

$$H = \frac{\Delta E}{m g} = \frac{m \Delta e}{m g} = \frac{\Delta e}{g} = \frac{1}{2} \Delta \left(\hat{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z \right) = \frac{\Delta p}{\rho g} + \frac{\Delta(v^2)}{2g} + \Delta z \quad (2.14)$$

En la ecuación 2.15 se desprecia las variaciones de energía potencial y cinética, frente al trabajo del flujo se tiene la altura determinada por la variación de presión:

$$H \cong \frac{\Delta p}{\rho g} \quad (2.15)$$

La variación de energía específica (Δe) viene dada por la potencia transmitida entre la turbomáquina y el fluido (P_h) (ver ec. 2.16):

$$\Delta e = \frac{-Y_u}{\rho Q} = g H \equiv -P_h = \rho g Q H \quad (2.16)$$

La altura se expresa en la ecuación:

$$H = \frac{-Y_u}{\rho g Q} = \frac{(\rho Q)(u_1 v_{1u} - u_2 v_{2u})}{\rho g Q} = \frac{u_1 v_{1u} - u_2 v_{2u}}{g} \quad (2.17)$$

La ecuación de Euler se puede expresar en función de la velocidad absoluta y relativa, a partir de un triángulo de velocidades como el de la Fig. 2.1, como se muestra en la ecuación 2.18 y 2.19:

$$v^2 + v_u^2 = w^2 - (u - v_u)^2 = w^2 - u^2 - v_u^2 + 2u v_u \quad (2.18)$$

$$2uv_2 = \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2} \quad (2.19)$$

Como se muestra en las ecuaciones 2.20 y 2.21 se puede expresar la altura H, de dos formas:

$$H_u = \frac{u_1 v_{1u} - u_2 v_{2u}}{g} = \frac{(u_2^2 + v_2^2 - w_2^2) - (u_1^2 + v_1^2 - w_1^2)}{2g} \quad (2.20)$$

$$H = \frac{\Delta p}{\rho g} + \frac{\Delta(v^2)}{2g} + \Delta z = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) \quad (2.21)$$

Igualando y simplificando se obtienen las ecuaciones 2.22 y 2.23:

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2g} + gz_2 - \frac{u_2^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2g} + gz_1 - \frac{u_1^2}{2} \quad (2.22)$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g} + gz - \frac{u^2}{2} = ctte \quad (2.23)$$

Al expresar la velocidad tangencial como $U = \omega r$, se obtiene la Ecuación de Bernoulli para campos centrífugos (ec 2.24):

$$p + \frac{1}{2}\rho\omega^2 + \rho gz - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = ctte \quad (2.24)$$

2.5 MODELACIÓN MATEMÁTICA

A continuación se presentan los modelos matemáticos utilizados para realizar la simulación del campo de flujo, a través de la geometría.

2.5.1 LEYES DE CONSERVACIÓN

Para describir el fenómeno del flujo a través del rotor de una turbina hidráulica tipo Francis son usadas las siguientes leyes de la conservación.

2.5.1.1 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.

En la ecuación 2.25 se expresa la ecuación de continuidad como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (2.25)$$

Donde $V = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ y $\nabla \cdot V$ es la divergencia de la velocidad y el termino $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ en realidad expresa la derivada material D/Dt , esta forma de la ecuación de continuidad no hace referencia a ningún sistema de coordenadas en específico, es la forma para expresarla empleando diversos sistemas de coordenadas, en el caso de un **flujo incompresible**, en el que la densidad de una partícula de fluido no cambia durante su trayecto $D\rho/Dt=0$, se puede ver que la **ecuación de continuidad** se expresa en forma diferencial (ec. 2.26) y vectorial (ec. 2.27) respectivamente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.26)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (2.27)$$

2.5.1.2 ECUACIÓN DE MOMENTUM.

En la ecuación 2.28 se expresa la ecuación de momentum como:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V x V) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + S_M \quad (2.28)$$

Como se muestra en la ecuación 2.29 el esfuerzo cortante τ , está relacionado con la velocidad de deformación por:

$$\tau = \mu(\nabla + (\nabla V)^T - \frac{2}{3}\delta \nabla \cdot V) \quad (2.29)$$

Las ecuaciones diferenciales de momentum se pueden escribir para flujos incompresibles, utilizando la derivada material (Ec. 2.30, 2.31 y 2.32):

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu \nabla^2 u \quad (2.30)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu \nabla^2 v \quad (2.31)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu \nabla^2 w \quad (2.32)$$

En forma vectorial (Ec. 2.33):

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p - \rho g + \mu \nabla^2 V \quad (2.33)$$

Se ha añadido tres ecuaciones adicionales a la ecuación de continuidad para obtener cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, u, v, w y p. Con las condiciones de frontera iniciales apropiadas, es posible obtener una solución que nos dé un campo de velocidad y presión para este flujo incompresible [3].

2.5.1.3 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA TOTAL.

Como se muestra en la Ecuación 2.34 la ecuación de energía total se expresa así:

$$\frac{\partial(\rho h_{tot})}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V h_{tot}) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (V \cdot \tau) + V \cdot S_M + S_E \quad (2.34)$$

Donde h_{tot} es la entalpía total, relacionada con la entalpía estática h (T, p) por la siguiente ecuación (Ec. 2.35):

$$h_{tot} = h + \frac{1}{2} U^2 \quad (2.35)$$

El término $\nabla \cdot (V \cdot \tau)$ representa el trabajo debido a los esfuerzos viscosos y es llamado término de trabajo viscoso.

El término $V \cdot S_M$ representa el trabajo debido a las fuentes de momentum externo y se desprecia en la actualidad.

2.6 ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones que definen el comportamiento dinámico de un fluido. Derivan de aplicar los principios de conservación de la mecánica y de la termodinámica al fluido, de donde se obtiene una formulación integral que generalmente se suele transformar en una formulación diferencial más práctica. Existen diferentes formulaciones para estas ecuaciones, en función del problema que se desea resolver.

Muchos fluidos exhiben una relación lineal entre las componentes del esfuerzo y los gradientes de velocidad. Se llaman fluidos newtonianos a tales materiales, que incluyen fluidos comunes tales como agua, aceite y aire. Si además de la linealidad se exige que el fluido sea isotrópico (las propiedades del fluido son independientes de la dirección) es posible relacionar las componentes del esfuerzo y los gradientes de velocidad empleando sólo dos propiedades del fluido, la viscosidad μ y el segundo coeficiente de viscosidad λ . Las relaciones esfuerzo-velocidad-gradiente, conocidas como ecuaciones constitutivas, se presentan en las ecuaciones 2.36; 2.37 y 2.38:

$$\sigma_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot V \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.36)$$

$$\sigma_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot V \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.37)$$

$$\sigma_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot V \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.38)$$

Para la generalidad de los gases, y con exactitud para los gases monoatómicos, el segundo coeficiente de viscosidad está relacionado con la viscosidad como se muestra en la ecuación 2.39:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.39)$$

Condición conocida como hipótesis de Stokes. Con esta relación el promedio negativo de los tres esfuerzos normales es igual a la presión (ec. 2.40), es decir:

$$-\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = P \quad (2.40)$$

Utilizando las ecuaciones 2.36; 2.37 y 2.38, se puede demostrar que esto siempre se cumple para un líquido en el que $\nabla \cdot V = 0$, y con la hipótesis de Stokes también se cumple para un gas.

Si sustituimos las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones diferenciales de momentum, se obtiene, utilizando las hipótesis de Stokes, las ecuaciones 2.41; 2.42 y 2.43:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.41)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.42)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.43)$$

Donde se ha supuesto un fluido homogéneo, es decir, que las propiedades del fluido (incluida la viscosidad) son independientes de la posición.

En el caso de un flujo incompresible la ecuación de continuidad permite reducir las ecuaciones anteriores como muestra las ecuaciones 2.44; 2.45 y 2.46:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.44)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.45)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.46)$$

Éstas se denominan ecuaciones de Navier-Stokes; con estas tres ecuaciones diferenciales y la ecuación diferencial de continuidad se tienen cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, u , v , w , y p . Se supone que las propiedades de viscosidad y densidad del fluido se conocen. Con las condiciones de borde apropiadas, es de esperar que se puedan resolver las ecuaciones. Varias geometrías relativamente sencillas permiten soluciones analíticas; aunque para muchos flujos de interés ingenieril se han determinado soluciones numéricas. Puesto que las ecuaciones son ecuaciones diferenciales parciales no lineales, no se puede confiar en que la solución que se obtenga se pueda reproducir realmente en el laboratorio; es decir, las soluciones no son únicas. Por ejemplo un flujo laminar y uno turbulento pueden tener condiciones iniciales y de frontera idénticas, a pesar de que los dos flujos (las dos soluciones) son muy diferentes.

Se puede expresar las ecuaciones de Navier-Stokes en forma vectorial multiplicando las ecuaciones 2.44; 2.45 y 2.46 por \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} , respectivamente, y sumando:

$$\frac{Du}{Dt}\hat{i} + \frac{Dv}{Dt}\hat{j} + \frac{Dw}{Dt}\hat{k} = \frac{DV}{Dt} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k} = \nabla p \quad (2.48)$$

$$\nabla^2 u\hat{i} + \nabla^2 v\hat{j} + \nabla^2 w\hat{k} = \nabla^2 V \quad (2.49)$$

Donde se ha utilizado el operador Laplaciano mostrado en la ecuación 2.50:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.50)$$

Combinando lo anterior, las ecuaciones de Navier-Stokes adoptan la forma vectorial mostrada en la ecuación 2.51:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \rho g + \mu \nabla^2 V \quad (2.51)$$

Esta forma nos permite utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando otros sistemas de coordenadas (rectangular, cilíndrico y esférico) [3].

2.7 MODELOS DE TURBULENCIA “EDDY VISCOSITY”

Una propuesta sugiere que la turbulencia se compone de pequeños remolinos que se forman y disipan continuamente, en la cual los esfuerzos de Reynolds se asumen proporcionales a los gradientes de la velocidad media. Esto define a los modelos “Eddy-Viscosity”.

Esta hipótesis supone que los esfuerzos de Reynolds pueden estar relacionados con los gradientes de velocidad promedio y la viscosidad de “Eddy”, a través de la hipótesis del gradiente de difusión. Se representan mediante la ecuación 2.52:

$$-\overline{\rho u \cdot x \cdot u} = \mu_t (\nabla U + (\nabla U)^T) - \frac{2}{3} \delta (\rho k + \mu_t \nabla \cdot U) \quad (2.52)$$

Donde μ_t es la viscosidad turbulenta o viscosidad de Eddy.

Análoga a la hipótesis de viscosidad de Eddy, la difusividad de Eddy es la hipótesis que afirma que los flujos de Reynolds son un escalar linealmente relacionadas con el gradiente de la media escalar como se muestra en la ecuación 2.53:

$$-\overline{\rho u \phi} = \Gamma_t \nabla \phi \quad (2.53)$$

Donde Γ_t , el número de turbulencia de Prandtl.

Las ecuaciones anteriores sólo pueden expresar los términos de las fluctuaciones de la turbulencia en función de la velocidad promedio si la viscosidad turbulenta μ_t se conoce, tomando en cuenta que tanto los modelos $k - \varepsilon$ y $k - \omega$ proporcionan esta variable; sujeto a esta hipótesis, tanto la ecuación de momento promedio de Reynolds y la ecuación escalar de transporte se pueden expresar como se muestra en la ecuación 2.54:

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \times U) = B - \nabla p' + \nabla \cdot (\mu_{\text{eff}}(\nabla U + (\nabla U)^T)) \quad (2.54)$$

Donde B es la suma de las fuerzas en el cuerpo y μ_{eff} es la viscosidad efectiva definida en la ecuación 2.55:

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t \quad (2.55)$$

Y p' es la presión modificada definida en la ecuación 2.56:

$$p' = p + \frac{2}{3}pk + \frac{2}{3}\mu_t \bar{\nabla}. \quad (2.56)$$

2.7.1 MODELO DE TURBULENCIA KAPPA- EPSILON K – E.

El modelo de turbulencia empleado para el flujo multifásico es una generalización del modelo K – ϵ para una sola fase. Implementando el modelo K – ϵ sólo para la fase continua no teniendo en cuenta los efectos de la fase dispersa sobre la turbulencia de la fase continua (Ec. 2.57, 2.58, 2.59, 2.60, 2.61 y 2.62).

$$\frac{\partial(r_\alpha \rho_\alpha k)}{\partial t} + \nabla \cdot (r_\alpha \rho_\alpha U_\alpha k) = \nabla \cdot \left(r_\alpha \frac{\mu_{\text{eff}\alpha}}{C_k} \nabla k \right) + P_k - \rho_\alpha \epsilon \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial(r_\alpha \rho_\alpha \epsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (r_\alpha \rho_\alpha U_\alpha \epsilon) = \nabla \cdot \left(r_\alpha \frac{\mu_{\text{eff}\alpha}}{C_\epsilon} \nabla \epsilon \right) + \frac{\epsilon}{k} (C_1 P_k - C_2 \rho_\alpha \epsilon) \quad (2.58)$$

$$P_k = 2\mu_t \epsilon(u): \epsilon(u) \quad (2.59)$$

$$\mu_{\text{eff}1} = \mu_t + \mu_1 \quad (2.60)$$

$$\mu'_{\text{eff}\beta} = r_\beta \mu_\beta + r_1 \mu_{\text{eff}1} \quad (2.61)$$

$$\mu_t = C_\mu \rho_\alpha \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.62)$$

Donde:

k =energía cinética de turbulencia, (Ver apéndice B)

ε = Disipación viscosa, (Ver apéndice B)

El modelo $k - \varepsilon$ tiene cinco constantes, que garantizan la homogeneidad dimensional. Las cuales son:

$$C_{\mu} = 0,09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92, \quad \sigma_k = 1,0, \quad \sigma_{\varepsilon} = 1,3$$

Si bien los modelos estándar de dos ecuaciones, como el modelo $k - \varepsilon$, dan una buena predicción para muchos problemas de fluidos en ingeniería, existen otras aplicaciones para las cuales estos modelos pueden no ser los más adecuados. Entre estos se encuentran: Flujos con separación de capa límite, corrientes con cambios bruscos en la tasa promedio de los esfuerzos, flujos rotativos., flujos sobre superficies curvas.

Las principales ventajas e inconvenientes del modelo son las siguientes:

Ventajas:

- Sólo se necesita fijar las condiciones iniciales y de contorno.
- Resultados satisfactorios para una gran cantidad de flujos.
- Es el modelo turbulento más ampliamente utilizado en la mayoría de flujos en aplicaciones industriales.
- Se dispone de leyes de pared desarrolladas como condiciones de contorno para este tipo de modelos.

Inconvenientes:

- Implementación más compleja que los modelos algebraicos debido a la introducción de dos ecuaciones diferenciales adicionales.

Pobres resultados en casos como: flujos no confinados, flujos con grandes gradientes longitudinales, flujos turbulentos completamente desarrollados en conductos no circulares.

2.7.2 MODELO DE TURBULENCIA KAPPA-OMEGA K – Ω.

Una de las ventajas de la formulación $k - \omega$ es el tratamiento para zonas cercanas a la pared para cálculos con bajo número de Reynolds. El modelo no requiere la resolución de ecuaciones no lineales complejas, como en el modelo $k - \varepsilon$ y por lo tanto es más preciso y más robusto.

El modelo $k - \omega$ asume que la viscosidad turbulenta está relacionada con la energía cinética de la turbulencia, mediante la relación (Ec. 2.63) siguiente:

$$\mu_f = \rho \frac{k}{\omega} \quad (2.63)$$

Donde:

ω = Rata de disipación específica, (Ver apéndice B)

El punto inicial de la presente formulación es que el modelo $k - \omega$ desarrollado por Wilcox resuelve dos ecuaciones de transporte, una para la energía cinética de la turbulencia, k y otra para la frecuencia de la turbulencia. Estas se muestran en las ecuaciones 2.64 y 2.65 respectivamente:

Ecuación k .

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U k) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P_k - B' \rho k \omega \quad (2.64)$$

Ecuación ω

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \omega) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k\omega}} \right) \nabla \omega \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - B' \rho k \omega^2 \quad (2.65)$$

Las variables independientes, la densidad, ρ , y el vector de velocidad, U , son tratadas como variables conocidas provenientes del método de Navier-Stokes. P_k es la tasa de producción de turbulencia, la cuales se calculan en el modelo $k - \varepsilon$.

Las constantes del modelo que garantizan la homogeneidad dimensional son las siguientes:

$$\beta' = 0,09$$

$$\alpha = 5/9$$

$$\beta = 0,075$$

$$\sigma_k = 2$$

$$\sigma_\omega = 2$$

2.7.3 MODELO “SHEAR STRESS TRANSPORT” (SST).

El modelo k- ω basado en el transporte de esfuerzos cortantes, brinda una alta precisión en la predicción de la aparición y cantidad de la separación de flujos bajo condiciones de gradientes de presión adversas; esta alta precisión se obtiene limitando la formulación de “Eddy Viscosity”: mediante las siguientes expresiones mostradas en las ecuaciones 2.66 y 2.67:

$$V_f = \frac{a_1 k}{\max(a_{1\omega}, SF_2)} \quad (2.66)$$

Dónde.

$$V_f = \frac{\mu_t}{\rho} \quad (2.67)$$

F_2 es una función de mezcla, al igual que F_1 , la cual restringe el limitador de la capa límite de la pared y S es un invariante de medida de la velocidad de deformación.

La mezcla de funciones es esencial para el éxito del método. Su formulación se basa en la distancia más cercana a la superficie y en las variables de flujo. Estas formulaciones se muestran en las ecuaciones 2.68, 2.69, 2.70, 2.71:

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (2.68)$$

Con:

$$\arg_1 = \min \left(\max \left(\frac{\sqrt{x}}{B' \omega y}, \frac{500v}{y^2 \omega} \right), \left(\frac{4\rho k}{CD_{kw} \sigma_{\omega 2} Y^2} \right) \right) \quad (2.69)$$

Donde Y es la distancia a la pared más cercana, además:

$$CD_{kw} = \max \left(2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \nabla k \nabla \omega, 1.0 \times 10^{-10} \right) \quad (2.70)$$

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2)$$

Con:

$$\arg_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{B' \omega y}, \frac{500V}{y^2 \omega} \right) \quad (2.71)$$

2.8 MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA CAPA LÍMITE.

La capa límite es la zona del campo fluido próxima a un contorno sólido en la que se manifiestan especialmente los efectos viscosos. Debido a la viscosidad y a la condición de no deslizamiento, cerca de cualquier contorno sólido aparece un gradiente de velocidades en la dirección normal a dicho contorno. Este gradiente de velocidades condiciona el intercambio energético entre las distintas partículas de fluido con velocidades diferentes, originando vorticidad y turbulencia.

El problema básico para la modelización numérica del intercambio energético en la capa límite sobre cualquier frontera sólida consiste en la definición correcta de las velocidades de las partículas en una zona muy próxima a dicha frontera. Esto implica una densidad de mallado muy elevada, necesaria para capturar los distintos fenómenos que se producen dentro de la capa límite.

Esta dificultad se ha abordado usando varias aproximaciones, que se pueden englobar en cuatro grupos: modelos de distribución de las pérdidas, modelos de capa de cortadura, modelos de capa límite y leyes de pared, que son brevemente explicados a continuación. [3]

2.8.1 MODELOS DE DISTRIBUCIÓN DE LAS PÉRDIDAS (“DISTRIBUTED LOSS MODELS”).

Este tipo de modelos constituye una aproximación muy usada en flujos internos (el fluido está confinado en un canal de paso limitado por paredes sólidas). La hipótesis básica consiste en suponer que el efecto de las tensiones cortantes debidas a la viscosidad es equivalente a una fuerza de rozamiento distribuida a lo largo del canal de paso y definida por valores semi-empíricos conocidos del problema a resolver.

Aunque con este tipo de modelos se puede predecir el flujo en gran parte de la geometría, es claro que se pierde la definición en zonas cercanas a las superficies sólidas. A veces esta falta de precisión en la definición del flujo no es tolerable y se requiere superponer algún modelo de capa límite complementario.

Los modelos de distribución de pérdidas fueron muy populares en los inicios de las técnicas CFD cuando la potencia de cálculo hacía difícil de llevar a la práctica cualquier otro tipo de modelo. [3]

2.8.2 MODELOS DE CAPA LÍMITE (“BOUNDARY LAYER APPROXIMATIONS”).

Derivado de los estudios de Prandtl sobre la estructura del flujo para elevados valores del número de Reynolds. Bajo estas condiciones, el campo de velocidades en un fluido se puede separar en dos zonas, una de flujo no viscoso alejada de los contornos sólidos y otra dominada por los efectos de la viscosidad, denominada capa límite. Las ecuaciones de este tipo de modelos se pueden derivar de las del modelo de la capa de cortadura simplificándolas aún más mediante la hipótesis del valor despreciable de la velocidad en la dirección normal a la superficie considerada en comparación con la velocidad en la dirección de las líneas de corriente. [3]

2.8.3 MODELOS DE LA CAPA DE CORTADURA (“THIN SHEAR LAYER, TSL”).

Son métodos apropiados para flujos con elevados números de Reynolds en los que las zonas de influencia viscosa, estelas o capas de cortadura ocupan una extensión muy reducida dentro de la geometría del problema estudiado. Fuera de estas zonas, resulta suficiente con considerar el modelo de fluido ideal.

Para este tipo de modelos se requiere una discretización espacial muy densa en las zonas en las que se espera influencia de los términos viscosos. En realidad, se trata de un cálculo ligeramente más avanzado que el correspondiente al modelo de capa límite, porque en este caso la geometría de la capa límite es resultado del cálculo y no se introducen hipótesis adicionales. Este tipo de modelos ha sido aplicado a multitud de problemas relacionados con aplicaciones aerodinámicas. [3]

2.8.4 LEYES DE LA PARED.

Una posibilidad distinta a los modelos mencionados consiste en incluir en los cálculos alguna aproximación para la distribución de velocidades esperada. Con tal fin, se pueden utilizar las distribuciones de velocidad obtenidas

experimentalmente, pero la práctica habitual consiste en utilizar los datos de distribuciones teóricas. En el contexto de los métodos numéricos, las funciones o “leyes de pared” constituyen un conjunto de fórmulas semi-empíricas que relacionan los valores de las distintas variables en las zonas próximas a los contornos sólidos y sobre dichos contornos. Normalmente incluyen tanto las relaciones para las variables medias y formulas para el tratamiento de la turbulencia en zonas próximas a los contornos sólidos.

La definición de las distintas fórmulas, con rangos de aplicación variables, proviene de los estudios sobre capa límite y parten de la definición de las variables adimensionales características de dichos estudios. Suelen distinguirse dos zonas que dan lugar a la utilización de las denominadas leyes para capas internas y leyes para capas externas. [3]

2.9 NIVELES DE APROXIMACIÓN EMPLEADOS EN LAS TÉCNICAS NUMÉRICAS.

El desarrollo de las técnicas numéricas y su aplicación a cualquier ciencia o tecnología han dado lugar al desarrollo y a la concienciación generalizada de uno de los conceptos básicos en ingeniería como es el de grado de aproximación. Esta idea es bastante clara si se considera que lo que se pretende con cualquier técnica numérica es conocer las variables físicas a partir de la resolución numérica de una serie de ecuaciones que gobiernan el fenómeno.

Se han de definir y establecer las distintas aproximaciones que introducen los métodos numéricos. En lo referente a la Mecánica de Fluidos, la primera aproximación que aparece es el planteamiento del modelo físico-matemático que defina el comportamiento real de un determinado flujo. Dicho modelo matemático está habitualmente basado en la hipótesis del continuo, válida para la mayor parte de problemas industriales, pero que tiene sus limitaciones para casos extremos de flujos de gases. Una vez hecha esta salvedad, aplicando las leyes

básicas de la física clásica se puede establecer una serie de ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento matemático de toda partícula fluida. La resolución exacta de dichas ecuaciones serviría para determinar completamente cualquier movimiento en el seno de un fluido. Se puede decir que un modelo matemático se define únicamente tras haber considerado el nivel de aproximación a la realidad requerido a la hora de obtener la exactitud deseada en el cálculo de una serie de variables dependientes. Desafortunadamente, debido a la complejidad de las ecuaciones diferenciales que aparecen, a la complejidad geométrica de los flujos, y a la complejidad de las condiciones de contorno iniciales, no resulta posible obtener soluciones analíticas de dichas ecuaciones de gobierno.

Establecidas las ecuaciones de gobierno resulta imprescindible introducir una segunda aproximación al problema. La forma clásica de abordarlo sería construir un modelo a escala reducida del flujo en cuestión y analizarlo experimentalmente en el laboratorio. La aproximación numérica implica introducir algunas hipótesis simplificadas que aproximen lo más posible los resultados finales a los que se obtendrían si se pudiera calcular la solución exacta. Dichas hipótesis se dirigen habitualmente hacia la simplificación tanto de la geometría a estudiar como de las ecuaciones a resolver. Obviamente, al no disponerse de la solución analítica exacta resulta bastante complicado establecer de antemano qué hipótesis sirven y cuales son descartables y, por tanto, en cualquier simulación aplicada a la Mecánica de Fluidos, es preciso dedicar mucho esfuerzo al análisis de los resultados obtenidos antes de aceptarlos como válidos.

Una vez definidas las ecuaciones diferenciales simplificadas, aparece otro problema relacionado con el posible tratamiento que se pueda hacer de dichas ecuaciones usando técnicas computacionales. Por medio de los ordenadores resulta muy fácil resolver una ecuación o sistema de ecuaciones algebraico, sin

embargo, las ecuaciones que estudian el movimiento de los fluidos son ecuaciones diferenciales no lineales. Resulta obligatorio realizar la transformación de las ecuaciones de forma que puedan ser resueltas por un ordenador. El paso de las ecuaciones diferenciales a sus equivalentes lineales constituye otro nivel de aproximación y normalmente recibe el nombre de discretización de las ecuaciones.

En cuanto a la geometría a estudiar, se debe señalar que la aproximación a la que debe someterse no sólo es de orden descriptivo respecto a su contorno sino que además ha de establecerse la definición del espacio ocupado por el fluido. En este sentido, resulta imprescindible referir los puntos a un determinado sistema de coordenadas en los que se pretenderá resolver las ecuaciones para obtener soluciones de las variables deseadas. Aunque el campo fluido sea un continuo, no se puede pretender resolver las ecuaciones en todos los puntos de un determinado volumen, porque entonces se tendría un número enorme de ecuaciones a resolver. Por tanto, hay que elegir cierto conjunto de puntos en los que se resolverán las mencionadas ecuaciones y que serán los puntos dónde finalmente se conocerán los valores de las variables fluidas. La definición de estos puntos es lo que se denomina habitualmente discretización espacial del dominio (también se habla de generación del mallado). El proceso descrito no deja de ser otra aproximación que se introduce en el cálculo y que define el nivel de aproximación espacial.

En el caso de tener ecuaciones que dependan de la variable tiempo (flujo no estacionario) es esencial la definición de un nivel de aproximación temporal. No es posible tampoco estudiar la evolución de las variables en el tiempo de forma continua. El nivel indicará la forma de modelizar la evolución real introduciendo lo que se denomina discretización temporal del sistema de ecuaciones. A partir de la solución calculada se podrá realizar un promediado

temporal oportuno para estudiar ciertas características medias del flujo que dependan de la evolución de las variables con el tiempo.

Finalmente, se pueden manipular las ecuaciones eliminando ciertos términos cuya influencia en un determinado problema se considere despreciable. La conclusión de que algún término no afecta a la solución de un determinado flujo se debe alcanzar tras analizar detenidamente la sensibilidad del problema ante valores dispares de dicho término. Normalmente dicho estudio se hace tras dimensionalizar convenientemente las ecuaciones y realizar el correspondiente análisis de semejanza (técnicas asintóticas). Esta cuestión es de importancia capital en la Mecánica de Fluidos y está en el origen de cualquier estudio experimental. Desde el punto de vista numérico, la eliminación de algún término en las ecuaciones introduce lo que se denomina nivel de aproximación dinámico de las ecuaciones consideradas.

Resumiendo, desde el modelo matemático (ecuaciones diferenciales no lineales) que aproxima la realidad física en un medio continuo se llega a un número finito de ecuaciones algebraicas que eliminan algún término de las ecuaciones de partida y que aproximan la evolución temporal real que, tras resolver con técnicas apropiadas, proporcionan una aproximación al valor de las variables incógnita en los puntos elegidos como discretización espacial del dominio de cálculo. En definitiva, se establece un nivel de aproximación numérico límite por debajo del cual será imposible acercarse al valor real de las variables en los puntos elegidos. Sin embargo, desde un punto de vista ingenieril, el proceso descrito es perfectamente válido y ha significado a lo largo de la evolución de las técnicas numéricas, la posibilidad de mejorar diseños y ahorrar mucho esfuerzo que de otra manera supondría trabas insalvables a la evolución de muchos sectores industriales. En la figura 2.2 se muestra gráficamente la panorámica explicada en este apartado. [3]

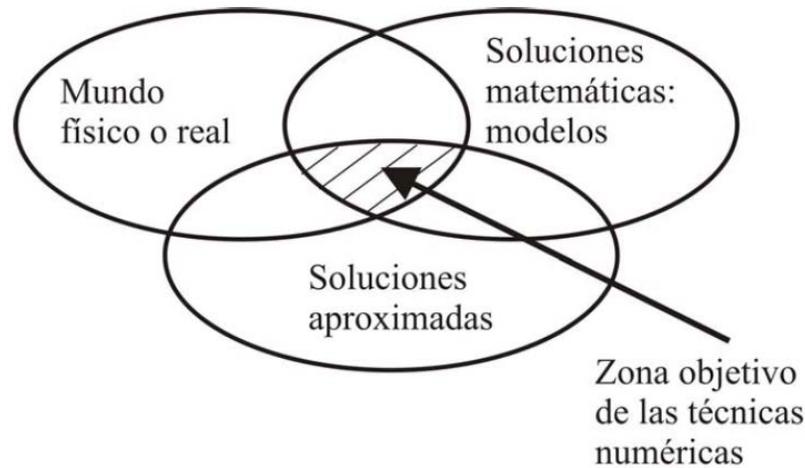


Fig. 2. 2 Las técnicas numéricas en la Mecánica de Fluidos. [3]

2.10 COMPONENTES DE UN MÉTODO DE SOLUCIÓN NUMÉRICA.

2.10.1 MODELO MATEMÁTICO.

Existen dos métodos fundamentales para el diseño y el análisis de sistemas en ingeniería relacionados con el flujo de fluidos: uno es la experimentación y otro es el cálculo. La experimentación, es basada mediante la construcción de modelos que son ensayados en instalaciones, mientras el segundo, el cálculo significa la resolución de ecuaciones diferenciales, estas ecuaciones se resuelven por métodos analíticos tradicionales o por métodos alternativos como se aplica a este trabajo, la cual es el método de volumen finito, en ambos métodos se puede hacer el uso de las herramientas computacionales para rapidez de cálculos.

Ambos métodos se complementan entre si, por ejemplo, los ingenieros podrían obtener propiedades globales, como sustentación, fuerza de arrastre, caída de presión o potencia, experimentalmente; pero emplean la CFD para obtener detalles acerca del campo de flujo, como los esfuerzos de corte,

velocidad y perfiles de presión y líneas de corriente. Además, los datos experimentales se emplean con frecuencia para validar soluciones de CFD al comparar cantidades globales determinadas de manera computacional y experimental. La CFD se emplea para reducir la cantidad necesaria de análisis experimental.

Actualmente la dinámica de fluidos computacional puede manejar flujos laminares, pero los flujos turbulentos de interés práctico son difíciles de resolver sin tener que recurrir a los modelos de turbulencia. Por desgracia, ningún modelo de turbulencia es universal y una buena solución en CFD de flujo turbulento depende de que tan apropiado sea el modelo de turbulencia aplicado. A pesar de esta limitación, los modelos estándares producen resultados razonables para muchos problemas prácticos de ingeniería.

Continuando con lo antes dicho, se tiene que el punto de partida de cualquier método numérico es el modelo matemático, la selección las ecuaciones diferenciales o integrales y las condiciones de borde. Se elige un modelo apropiado para la aplicación (flujos compresibles o incompresibles, turbulentos, de dos o tres dimensiones, etc.). Como ya dijimos, este modelo podría incluir simplificaciones de las leyes de conservación. Un método de solución es designando un modelo para una ecuación en particular seleccionada. [3]

2.10.2 MÉTODO DE DISCRETIZACIÓN.

Después de seleccionar el modelo matemático, se tiene que elegir un método de discretización apropiado, un método de aproximación de las ecuaciones diferenciales por un sistema de ecuaciones algebraicas para las variables en estudio de localizaciones discontinuas en espacio y tiempo. Hay muchos enfoques, pero los más importantes son: diferencia finita (FD), volumen finito (FV) y los métodos de elemento finito (FE).

Cada método produce la misma solución si el mallado es muy refinado. Sin embargo, algunos métodos son más apropiados para alguna clase de problemas que otros. A menudo la preferencia es determinada por la actitud del desarrollador. [3]

2.10.3 COORDENADAS Y BASES DEL SISTEMA VECTOR.

Las ecuaciones de conservación pueden ser escritas de muchas formas diferentes, dependiendo del sistema coordenado y el uso de las bases de vectores. Por ejemplo se puede seleccionar, cartesiano, cilíndrico, esférico, ortogonal curvilíneo o sistemas coordenados no ortogonales, que pueden ser fijos o variables. La elección depende de la circulación del flujo, y puede influir al método de discretización y el tipo de mallado.

Se debe seleccionar la base en la que los vectores y tensores serán definidos (fijos o variables, covariables o contravariante, etc.). Dependiendo de esta elección, el vector velocidad y el tensor pueden ser expresados en términos de componentes cartesianos, contra variante, físico o coordenadas orientadas no físicas. [3]

2.10.4 MALLADO o DISCRETIZACIÓN NUMÉRICA.

La generación de la malla donde se definen las celdas que es el punto de partida para el cálculo de las variables de flujo (velocidad y presión, etc.), en todo el dominio computacional. Los modernos paquetes comerciales de CFD vienen con sus propios generadores de malla y también están disponibles programas para generar mallas independientes.

Las ubicaciones discontinuas en las que las variables calculadas son definidas por la discretización numérica que es esencialmente una representación discontinua del dominio geométrico sobre el cual el problema será solucionado. Divide el dominio de solución en un número finito de subdominios (elementos,

volúmenes de control, etc.). Algunas de las opciones disponibles son las siguientes:

Mallas regulares estructuradas:

Consta por celdas planas con cuatro lados (2D) o celdas volumétricas con seis caras (3D). Aunque la forma rectangular de las celdas podría estar distorsionada, cada celda se enumera de acuerdo con los índices (i,j,k) que no necesariamente corresponden a las coordenadas “x”, “y” y “z”.

A continuación en la figura 2.3 se muestra un ejemplo de malla estructurada bidimensional con nueve nodos y ocho intervalos en el lado superior e inferior, y cinco nodos y cuatro intervalos en los lados derecho e izquierdo. Se muestran los índices i y j. La celda sombreada esta en (i=4, j=3)

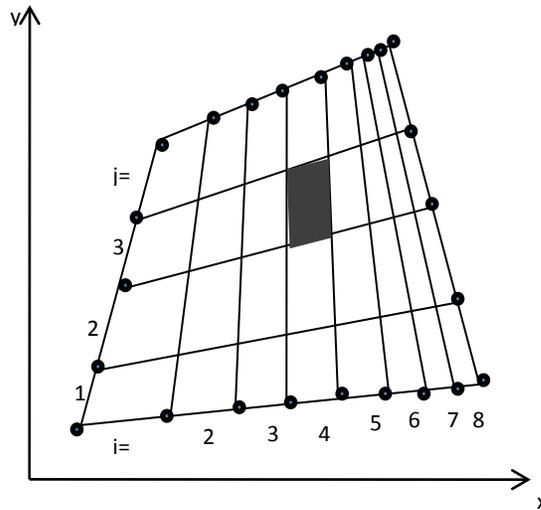


Fig. 2. 3 Malla estructurada

El mallado estructurado o regular está constituido por familias de cuadrículas lineales con la propiedad de que miembros de una familia no cruzan con otras y cada miembro cruza con otra familia sólo una vez. Esto permite que las líneas de una selección en particular sean enumeradas consecutivamente. La

posición de cualquier punto de la cuadrícula (o el volumen de control) dentro del dominio es excepcionalmente identificado para la selección de dos o tres dimensiones. Esta es la estructura de cuadrícula más simple, ya que es de manera lógica equivalente a una cuadrícula cartesiana. Cada punto tiene cuatro vecinos cercanos en dos dimensiones y seis en tres dimensiones; uno de los índices de cada vecino del punto p (i, j, k) es diferente por ± 1 del índice correspondiente de P . Un ejemplo de una cuadrícula de 2D estructurada es indicado la figura 2.4.

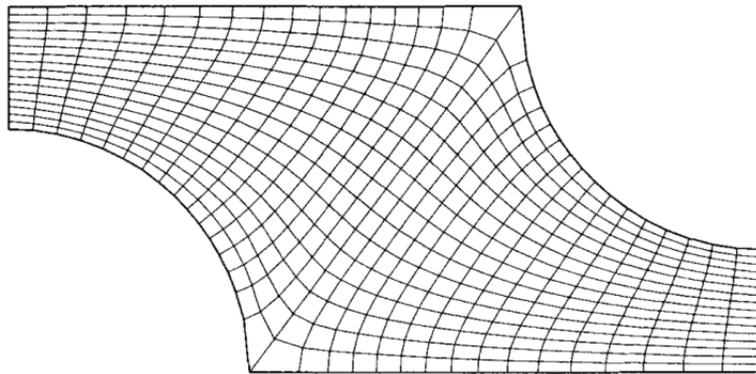


Fig. 2. 4 Ejemplo en 2D de una cuadrícula estructurada, mallado no ortogonal, designada para el cálculo del flujo en un segmento simétrico de un banco de tubería escalonada

Efectivamente, hay muchos solvers eficientes aplicables solamente a cuadrículas estructuradas. La desventaja de cuadrículas estructuradas es que pueden ser usadas solamente para dominios de solución geométrica simple. Otra desventaja es que podría ser difícil controlar la distribución de los puntos de la cuadrícula: la concentración de puntos en una región para razones de exactitud producen pequeños espacios innecesarios en otras partes del dominio solución y un desperdicio de recursos. Este problema es exagerado en los casos de 3D. Las celdas largas también podrían afectar la convergencia adversamente.

Mallado estructurado en bloque.

En las cuadrículas estructurada en un bloque, hay dos (o más) niveles de subdivisión del dominio solución. Sobre el nivel rugoso, hay bloques en el que son relativamente grandes los segmentos del dominio; su estructura podría ser irregular y pueden o no ser superpuestos. Sobre el nivel (dentro de cada bloque) es definida una cuadrícula estructurada. El trato especial es necesario en las interfaces. En la figura 2.5 un mallado estructurado de bloque con combinación en las interfaces, es designado para el cálculo de la circulación del flujo en 2D alrededor de un canal cilíndrico y contiene tres bloques.

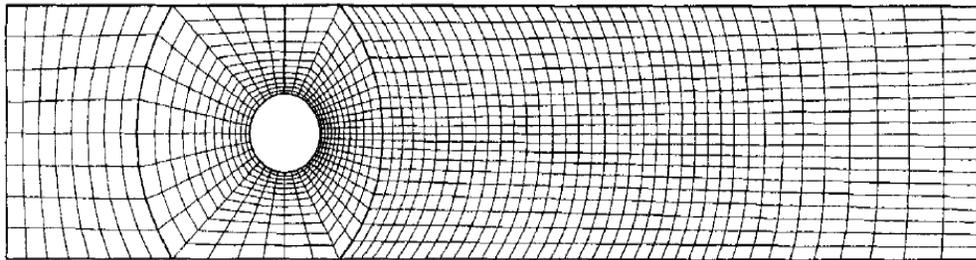


Fig. 2. 5 Ejemplo de un mallado estructurado en bloque que se ajusta a la interface, usado para el cálculo del flujo alrededor de un canal cilíndrico.

En la figura 2.6 se presenta un mallado estructurado en bloque sin ajuste en la interface; usado para calcular la circulación alrededor de un hidrodenslizador sumergido (hydrofoil). Consta de cinco bloques de cuadrículas de diferentes tamaños. Esta clase de cuadrícula es más flexible que los previos, cuando admite el uso de cuadrículas más finas en las regiones donde es requerida una gran resolución. El no ajuste en las interfaces puede ser tratado de una manera completamente conservadora. La programación es más difícil que para tipos de cuadrícula descritos antes. El Solver para mallas estructuradas puede ser aplicable como bloque, y los dominios de flujo complicados pueden ser tratados

con estas cuadrículas. Es posible la refinación local del modo bloque (la cuadrícula puede ser refinada en algunos bloques).

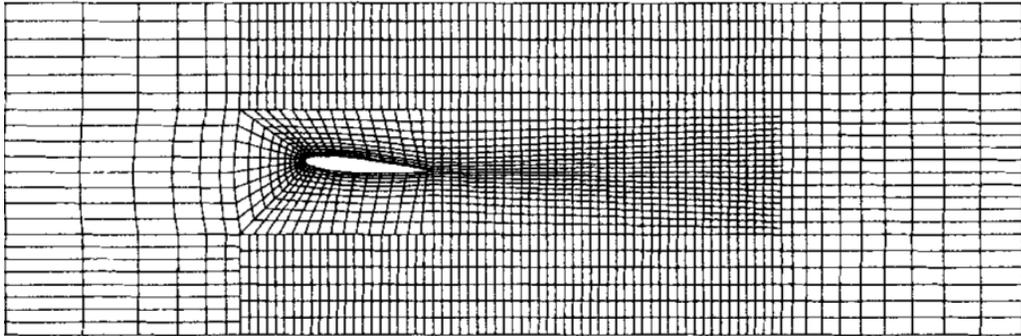


Fig. 2. 6 Ejemplo de un mallado estructurado en bloque en 2D al no ajustarse las interfaces, designado para el cálculo del flujo alrededor de un hydrofoil sumergido en agua.

Las cuadrículas estructuradas con bloques con superposición se muestran en la figura 2.7. En la región de superposición, las condiciones de bordes para un bloque son obtenidas interpolando la solución del otro bloque (en superposición). La desventaja de estas cuadrículas es que las leyes de conservación no se hacen cumplir fácilmente en los límites del bloque. La ventaja de este enfoque es que los dominios complicados son arreglados con más facilidad y puede ser usado en los siguientes cuerpos móviles: un bloque es fijado al cuerpo y se mueve con él, mientras que una cuadrícula inactiva cubre los entornos. Este tipo de cuadrícula no es usada a menudo, aunque tiene sus partidarios.

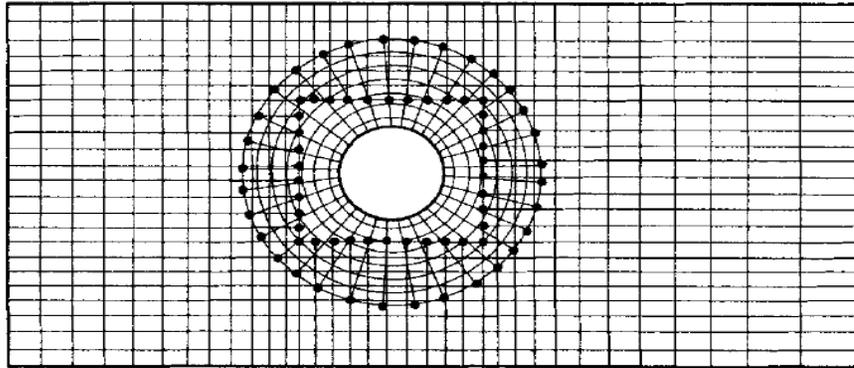


Fig. 2. 7 Ejemplo de un mallado compuesto en 2D, usado para calcular el flujo alrededor de un canal cilíndrico.

Cuadrículas (mallado) poco estructuradas.

Consta de celdas de varias formas, comúnmente se emplean triángulos o cuadriláteros (2D) o tetraedros o hexaedros (3D). Se generan dos mallas no estructuradas para el mismo dominio que el de la figura 2.12, con la misma distribución de intervalo en los lados. A diferencia de la malla estructurada, en la no estructurada, no puede identificarse a las celdas de manera única mediante los índices i y j , en cambio, las celdas se numeran internamente de alguna otra manera por el paquete de la CFD.

Para configuraciones geométricas complejas, por lo general, es más fácil para el usuario del paquete de generación de malla crear una no estructurada. Por ejemplo, algunos paquetes de CFD (usualmente antiguos) están escritos de manera específicas para mallas estructuradas, estos convergen con mayor rapidez y con mayor exactitud, por utilizar la identificación celdas por índices como se hace en caso de mallas estructuradas; los modernos paquetes de CFD de aplicación general ya no presentan este problema ya que pueden manejar mallas estructuradas y no estructuradas. Por lo que se generan menos celdas con una malla estructuradas que con una no estructurada.

En la figura 2.4 la malla estructurada de $8 \times 4 = 32$ celdas, mientras que la malla triangular no estructurada de la figura 2.8 (a) tiene 76 celdas, y la malla cuadrilátera no estructurada de la figura 2.8 (b) tiene 38 celdas, aun cuando se aplica la distribución de nodos en los lados de los tres casos.

A continuación se presenta un ejemplo de malla no estructurada bidimensional con 9 nodos y 8 intervalos en los lados superior e inferior, y 5 nodos y 4 intervalos en los lados izquierdo y derecho. También la misma distribución de nodos que en la figura 2.8 (a) malla triangular no estructurada y (b) malla cuadrilátera no estructurada. La celda sombreada en (a) es levemente sesgada.

Malla triangular no estructurada. Malla cuadrilátera no estructurada.

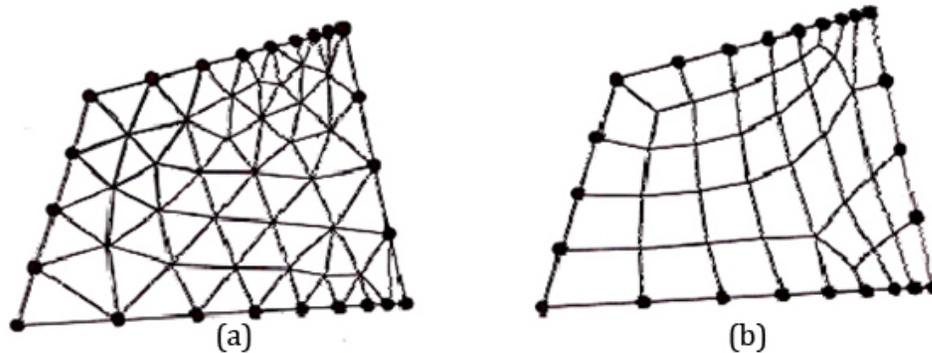


Fig. 2. 8 Malla no estructurada.

Útil para configuraciones muy complicadas, es el tipo de cuadrícula más flexible que puede ajustarse al límite de un dominio solución arbitrario. En principio, tales cuadrículas podían ser usadas con cualquier plan de discretización, pero se adaptan mejor al volumen finito y aproximaciones a elemento finito. Los elementos o los volúmenes de control podrían tener cualquier forma; no hay una restricción sobre el número de elementos vecinos o

nodos. En la práctica, las cuadrículas hechas de triángulos o cuadriláteros en 2D, y tetraedros o hexaedros en 3D son usados a menudo. Tales cuadrículas pueden ser generadas automáticamente por los algoritmos existentes. Si se desea, la cuadrícula puede ser hecha de forma ortogonal, el radio de aspecto es fácilmente controlado, y la cuadrícula puede ser refinada fácilmente a nivel local. La ventaja de la flexibilidad es compensada por la desventaja de la irregularidad de la estructura de los datos. Las ubicaciones de los nodos y las conexiones vecinas necesitan ser especificadas explícitamente. Los “Solvers” para los sistemas de ecuaciones algebraicas son generalmente más lentos que para cuadrículas regulares.

Las mallas poco estructuradas son usadas con métodos de elemento finitos, y cada vez más, con los métodos de volumen finitos. Los códigos de computación para cuadrículas poco estructuradas son más flexibles. No necesitan ser cambiados cuando la cuadrícula es refinada a nivel local, o cuando son usados los elementos o volúmenes de control de formas diferentes. Sin embargo, la generación del mallado y el pre-procesamiento son generalmente más difíciles. Un ejemplo de una cuadrícula poco estructurada, se muestra en la figura 2.9.

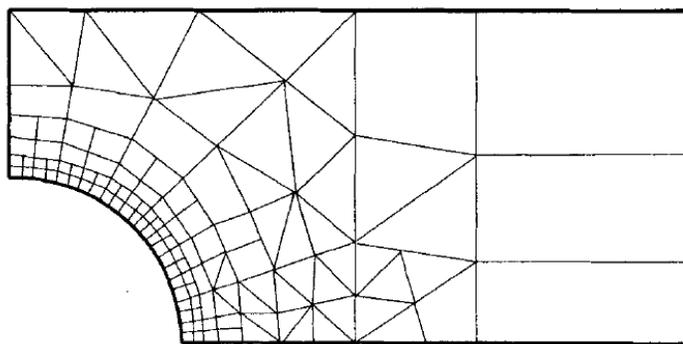


Fig. 2. 9 Ejemplo de un mallado no estructurado en 2D.

En las capas límite, donde las variables de flujo cambian con rapidez en la dirección normal de la pared y requieren de mallas de alta resolución en la

cercanía de ésta, las mallas estructuradas permiten una resolución mucho más fina que las no estructuradas para el mismo número de celdas. Las celdas de mallas estructuradas son más delgadas y están muy compactadas cerca del lado derecho a diferencia que las celdas de mallas no estructuradas (ver figuras 2.4 y 2.8 (a) y (b)).

Se debe enfatizar que sin importar el tipo de malla que se vaya a utilizar (estructurada o no estructurada, cuadrilátera o triangular, etc.), es la calidad de la malla lo que es más imprescindible para soluciones confiables de CFD. En particular, debe tenerse cuidado que cada una de las celdas no esté muy sesgada porque esto puede crear dificultades e inexactitudes en convergencia en la solución numérica. La celda de la figura 2.10 (a) es una celda con sesgo moderadamente alto, es la desviación respecto de la simetría. Existen varias clases de sesgo, tanto para celdas de dos como de tres dimensiones, el tipo de sesgo apropiado para celdas bidimensionales es el sesgo equilátero, definido en la ecuación 2.72:

Sesgo triangulo:

$$\theta_{EAS} = M\acute{A}X\left(\frac{\theta_{max}-\theta_{igual}}{180^{\circ}-\theta_{igual}}, \frac{\theta_{igual}-\theta_{min}}{\theta_{igual}}\right) \quad (2.72)$$

Dónde: θ_{min} y θ_{max} son los ángulos mínimo y máximo (en grados) entre dos lados cualesquiera de la celda. θ_{igual} es el ángulo entre dos lados de una celda equilátera ideal con el mismo número de lados.

En celdas triangulares el $\theta_{igual}=60^{\circ}$ y para celdas cuadriláteras $\theta_{igual}=90^{\circ}$. Se muestra mediante la ecuación 2.66 que $0<\theta_{EAS}<1$ para cualquier celda de 2D. Por definición, un triangulo equilátero tiene sesgo cero. De la misma manera, un cuadrado o rectángulo también tienen sesgo cero. Un elemento triangular o cuadrilátero muy distorsionado podría tener un sesgo inaceptable alto (figura

2.10 (b)). Algunos paquetes de generación de malla emplean esquemas numéricos para emparejar la malla con el fin de reducir el sesgo.

Uno de los factores que afectan la calidad de la malla pueden ser los cambios abruptos en el tamaño de celda, esto conduce al programa de CFD a dificultades numéricas o de convergencia. También, las celdas con una razón de sus dimensiones muy grande a veces pueden causar problemas. Aunque es posible reducir la cantidad de celdas al usar una malla estructurada en vez de una no estructurada, depende de la forma del dominio computacional.

A continuación se muestra el sesgo (a) para un triángulo equilátero, donde tiene sesgo cero, pero para un triángulo muy distorsionado tiene un sesgo alto. (b) de manera similar se muestra un rectángulo que tiene sesgo cero, pero una cuadrilátera muy distorsionada que tiene sesgo alto.

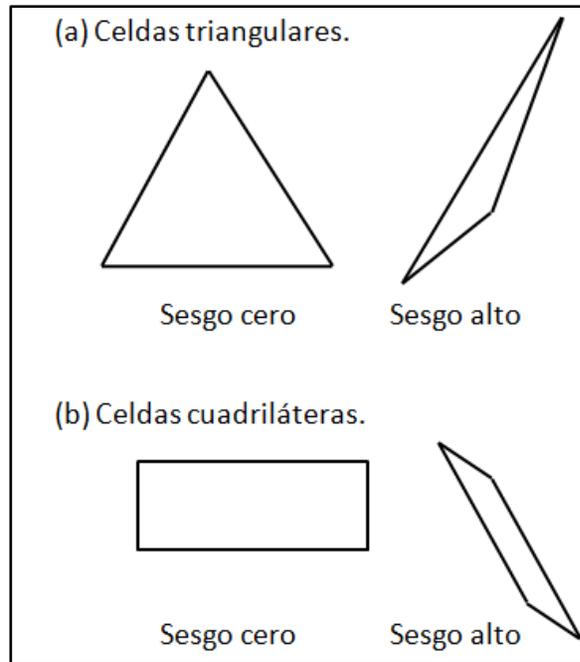


Fig. 2. 10 Sesgo en celdas.

Mallas híbridas.

Una malla híbrida es la que combina regiones o bloques de mallas estructuradas y no estructuradas. Por ejemplo, se puede juntar una malla estructurada cercana a una pared con un bloque de malla no estructurada fuera de la región de influencia de la capa límite. Con frecuencia se emplea una malla híbrida para permitir alta resolución cerca de una pared sin necesitar alta resolución lejos de la pared. Cuando se genera cualquier tipo de malla estructurada, no estructurada e híbrida, debe tenerse cuidado siempre de que cada una de las celdas no esté muy sesgada. [3]

2.11 PROCEDIMIENTO PARA LA SOLUCIÓN EN CFD.

Para resolver de manera numérica las ecuaciones de gobierno del problema a estudiar en este trabajo se tienen los siguientes pasos:

1. Se elige un dominio computacional y se genera una malla (conocida también como red de nodos); este dominio se divide en muchos elementos pequeños llamados celdas. Para dominios de dos dimensiones (2D), las celdas son áreas, mientras que para dominios tridimensionales (3D) las celdas son volúmenes. Un dominio computacional es la región en el espacio en la cual las ecuaciones de movimiento se resuelven mediante la CFD. Una celda es un subconjunto pequeño del dominio computacional. Los límites de un dominio bidimensional se denominan lados, y los límites de un dominio tridimensional se llaman caras.
2. Se especifican las condiciones de frontera en cada lado del dominio computacional (flujos 2D) o en cada cara del dominio (flujos 3D).
3. Se especifica el tipo de fluido (agua, aceite, gasolina, entre otros), junto con las propiedades del fluido (temperatura, densidad, viscosidad, etc). La

mayoría de los paquetes de CFD tienen integrada bases de datos de propiedades de algunos fluidos.

4. Se seleccionan los parámetros numéricos y los algoritmos de solución.
5. Los valores de la primera aproximación para las variables del campo de flujo se especifican para cada celda. Estas son condiciones iniciales, que podrían ser correctas o no, pero son necesarias como punto de partida, para que la iteración pueda seguir.
6. Al comenzar con los valores de la primera aproximación, las formas discretizadas de las ecuaciones de gobierno se resuelven por iteración, en el centro de cada celda. Si se trasladan todos los términos de la ecuación 2.39 a un lado para obtener cero del otro lado de la ecuación, la solución numérica sería “exacta” cuando al sumar todos estos términos, el residuo, se volviera cero para cada celda del dominio en una solución de CFD, esta suma nunca es cero, pero suele disminuir al hacer las iteraciones. Un residuo se considera como una medida de la desviación de una solución numérica para determinada ecuación de conservación o transporte respecto a la solución exacta, se debe monitorear el residuo promedio relacionado con cada ecuación de conservación o transporte para ayudar a determinar cuándo converge la solución. A veces se necesitan cientos, o hasta miles, de iteraciones para que converja la solución a una solución final.
7. Cuando converge la solución, las variables del campo de flujo como la velocidad y la presión se trazan y analizan gráficamente, Los usuarios pueden definir a y analizar otras funciones particulares que se forman mediante combinaciones algebraicas de variables de campo de flujo. La mayoría de los paquetes de CFD tienen integrados post- procesadores, diseñados para analizar el campo de flujo de manera gráfica y rápida, también hay paquetes post-procesadores autónomo.

8. Las propiedades globales del campo de flujo, como la caída de presión, las propiedades integrales, como las fuerzas (de sustentación y de arrastre), los torques que actúan sobre un cuerpo, se calculan a partir de la solución que se obtiene por convergencia. Con la mayoría de los paquetes de CFD esto puede hacerse “sobre la marcha” a medida que proceden las iteraciones, en numerosos casos, de hecho, es aconsejable monitorear estas cantidades junto con los residuos durante el proceso de iteración; cuando converge una solución, las propiedades globales e integrales deben establecerse en valores constantes también. [3]

2.12 VERIFICACIÓN DE LA GEOMETRÍA.

2.12.1 VERIFICACIÓN DE EJES “SLIVER EDGE CHECKING”.

Realiza una búsqueda de los ejes más pequeños en la geometría, los cuales pueden producir una malla de baja calidad en regiones cercanas a estos; usando como criterio el valor de tolerancia de longitud mínima de un eje, $1.6E-1$ [mm].

2.12.2 VERIFICACIÓN DE CARAS “SLIVER FACE CHECKING”.

Es un factor de verificación de geometría que relaciona el perímetro con el área para cada cara. Caras con un factor de “SliverFace” pueden resultar en mallas con una pobre calidad superficial. El Sliver Factor es calculado mediante la siguiente fórmula (ec. 2.73):

$$\text{Sliver factor} = \frac{(\text{perimetro})^2}{4\pi\text{Area}} \quad (2.73)$$

El valor máximo permisible de “Sliver Factor” es 25.

2.12.3 VERIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN “PARAMETRIZATION FACE CHECKING”.

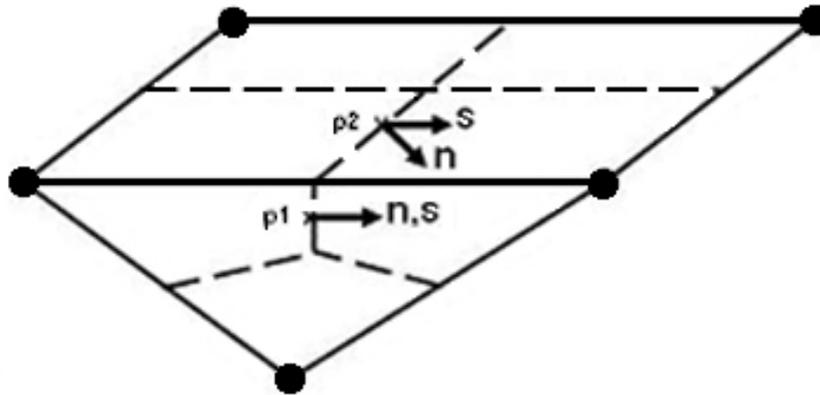
Es un parámetro que mide la distorsión de las caras, la máxima distorsión aceptada normalmente es 10.

2.13 CALIDAD DE LA MALLA.

Usar una malla con adecuada calidad es una parte importante para controlar los errores de discretización. La calidad de la malla puede ser medida mediante el cálculo de tres valores principalmente como lo son:

2.13.1 ORTOGONALIDAD DE MALLADO “MESH ORTOGONALITY”.

El concepto de malla ortogonal se refiere al ángulo entre caras de elementos adyacentes o el ángulo entre ejes de elementos adyacentes, estén cerca de su ángulo óptimo (por ejemplo, 90° para cuadrilátero y los 60° para elementos de caras triangulares). La medida más relevante de la ortogonalidad de la malla, se ilustra a continuación en la figura 2.11. Se trata del ángulo entre el vector que une a dos (volumen de control) nodos (s) y el vector normal en cada punto de integración de superficie (n) asociados con el borde. El mínimo ángulo de ortogonalidad aceptable es de 20° .



2.13.2 FACTOR DE EXPANSIÓN DE LA MALLA “MESH EXPANSION FACTOR”

Este factor se refiere a la mayor tasa de cambio de volumen entre volúmenes de control adyacentes y se calcula de manera aproximada relacionando el radio máximo con el radio mínimo de volúmenes de control adyacentes. El “Mesh expansión factor” recomendado para las aplicaciones es de 20. Un esquema de este factor se puede observar en la figura 2.12.

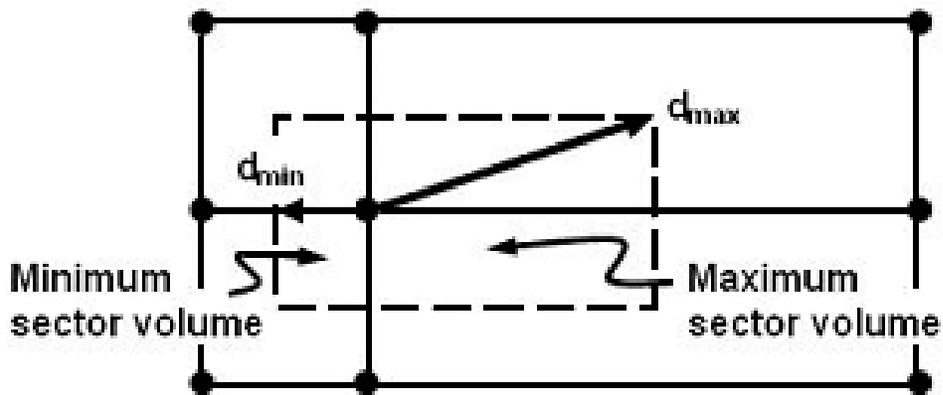


Fig. 2. 12 Factor de expansión de la malla “Mesh expansión factor”.

2.13.3 ASPECTO DE RADIO DE LA MALLA “MESH ASPECT RADIO”.

El concepto de “MeshAspect Radio” estudia los elementos de la malla a medida que estos se van estrechando en mayor medida y envuelve la relación entre la máxima distancia y la mínima área adyacentes a cada nodo a través de todo el dominio. Como se ilustra en la figura 2.13, un rango aceptable de “MeshAspect Radio” sería <100 .

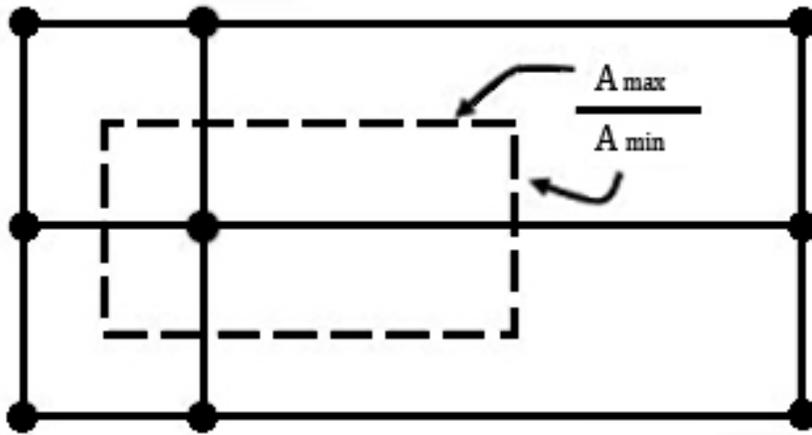


Fig. 2. 13 Aspecto del radio de la malla “MeshAspect Radio”

2.14 CRITERIO DE CONVERGENCIA “RMS”.

El Residuo llamado “Raíz Cuadrada Media”, RMS por sus siglas en inglés “Root Mean Squar”, consiste en sumar todos los residuos del dominio, determinar la media de los residuos y por último calcular la raíz cuadrada de la media obtenida. Una medida de cuán bien converge la solución puede ser obtenida por el trazado de los residuos para cada ecuación al final de cada intervalo de tiempo de la simulación (iteración) o “TimeStep”. Para la determinación del valor de RMS razonable para evaluar la convergencia pueden tenerse en cuenta los siguientes lineamientos:

- Valores por encima de $1 \cdot 10^{-4}$ puedan ser suficientes para obtener una evaluación cualitativa del campo de flujo
- $1 \cdot 10^{-4}$ es una convergencia relativamente precisa, pero puede ser suficiente para muchas aplicaciones de ingeniería
- $1 \cdot 10^{-5}$ representa una buena convergencia y usualmente suficiente para la mayoría de aplicaciones de ingeniería.
- $1 \cdot 10^{-6}$ o menor representa una convergencia bastante alta y es ocasionalmente requerida para problemas sensibles a la geometría. En muchos casos no es posible obtener este nivel de convergencia, particularmente utilizando un programa de solución de ecuaciones de precisión simple. [3]

2.15 ANÁLISIS DIMENSIONAL APLICADO A LAS TURBOMÁQUINAS

En un fenómeno físico existen variables independientes y variables dependientes; las primeras son aquellas entidades que pueden sufrir modificaciones sin que las restantes variables independientes se alteren. Obviamente las variables dependientes son función de las independientes, función que evidentemente existe, que es inalterable, que define el fenómeno físico, pero que en la mayoría de los casos el ser humano la desconoce.

En los hechos físicos existen variables que son absolutamente determinantes y definitorias, las cuales presiden el fenómeno y una ligera variación suya alteran substancialmente el comportamiento de aquel. Sin embargo hay otras entidades de menor importancia relativa que, aunque sean independientes, tienen un papel poco

significativo; estas entidades en un tratamiento del fenómeno riguroso habría que tenerlas en cuenta, pero uno pragmático o posibilista prescindiría de ellas.

El fenómeno estudiado depende de las seis variables independientes siguientes:

- Diámetro del rodete - D
- Densidad del fluido - ρ
- Viscosidad cinemática del fluido - ν
- Caudal - Q
- Velocidad de giro - N
- Aceleración de la gravedad - g

De estas seis variables independientes se derivan todas las restantes entidades que entran en juego en el fenómeno, como puede ser la diferencia de presiones entre a entrada y la salida de la máquina, la potencia, cualquier altura, la energía por unidad de masa, el rendimiento, el par mecánico, etc.

Por ejemplo la diferencia de presiones P vendrá expresada por la ecuación 2.74:

$$\nabla P = f(D, \rho, \nu, Q, N, g) \quad (2.74)$$

El estudio en profundidad de un fenómeno físico que depende de siete variables resulta extraordinariamente laborioso y al borde de lo imposible, bien sea realizado mediante ensayos experimentales o gracias a arquetipos matemáticos.

Para abordar el problema con mayor facilidad se recurre al análisis dimensional y, principalmente, al teorema de π o de Vaschy-Buckingham, que permite que la dependencia del fenómeno se limite a un número de variables menor.

Recordemos que dicho teorema expresa que si un fenómeno físico depende de $(m - 1)$ variables independientes, tal hecho puede ser estudiado con arreglo a las variaciones

que sufren (m - n) parámetros adimensionales, siendo n el número de magnitudes fundamentales del sistema de unidades que se emplee.

Es decir que si un fenómeno físico se define mediante la ecuación 2.75:

$$f (E_1, E_2, \dots E_m) = 0 \quad (2.75)$$

Igualmente se definirá por la ecuación 2.76:

$$f (\pi_1, \pi_2, \dots \pi_{m-n}) = 0 \quad (2.76)$$

Designando por π los parámetros adimensionales.

El teorema de π afirma que existe una ecuación que relaciona tales parámetros y que como tal representa el comportamiento del fenómeno, pero dicha expresión sigue siendo desconocida.

Para conocer los parámetros adimensionales se sigue cualquiera de los procedimientos conocidos. Aquí se utiliza el método de las ecuaciones, para ello se empieza presentando el cuadro de dimensiones de cada una de las entidades que aparecen en la ecuación que define el problema (ver tabla 2.1).

Tabla 2. 1 Dimensiones de entidades (Teorema de Pi)

	∇P	D	ρ	γ	Q	N	g
M	1	0	1	0	0	0	0
L	-1	1	-3	2	3	0	1
T	-2	0	0	-1	-1	-1	-2

Se adoptan como variables repetidas, D, r y N. Entre estas entidades acumulan las tres magnitudes fundamentales, tal como es necesario.

Capítulo II Marco Teórico

Para el cálculo del primer parámetro adimensional se procede como se muestra en la ecuación 2.77:

$$\pi_1 = \Delta p D^\alpha \rho^\beta N^\gamma = [M^1 L^{-1} T^{-2}] [L^\alpha] [M^\beta L^{-3\beta}] [T^{-\gamma}] = [M^0 L^0 T^0] \quad (2.77)$$

De donde se obtienen las ecuaciones 2.78, 2.79 y 2.80:

$$1 + \beta = 0 \quad (2.78)$$

$$-1 + \alpha - 3\beta = 0 \quad (2.79)$$

$$-2 - \gamma = 0 \quad (2.80)$$

De donde $\alpha = -2$; $\beta = -1$ y $\gamma = -2$; con lo que se obtiene el primer parámetro adimensional mostrado en la ecuación 2.81:

$$\pi_1 = \frac{\nabla P}{\rho D^2 N^2} \quad (2.81)$$

Continuando en el proceso obtenemos la ecuación 2.82:

$$\pi_2 = Q D^\alpha \rho^\beta N^\gamma = [L^3 T^{-1}] [L^\alpha] [M^\beta L^{-3\beta}] [T^{-\gamma}] = [M^0 L^0 T^0] \quad (2.82)$$

De donde se obtienen las ecuaciones 2.83, 2.84, 2.85:

$$B = 0 \quad (2.83)$$

$$3 + \alpha - 3\beta = 0 \quad (2.84)$$

$$-1 - \gamma = 0 \quad (2.85)$$

Es decir $\alpha = -3$; $\beta = 0$ y $\gamma = -1$; con lo que tiene la relación mostrada en la ecuación 2.86:

$$\pi_2 = \frac{Q}{ND^3} \quad (2.86)$$

Por ultimo se obtiene la ecuación 2.87:

$$\pi_3 = g D^\alpha \rho^\beta N^\gamma = [L^3 T^{-1}] [L^\alpha] [M^\beta L^{-3\beta}] [T^{-\gamma}] = [M^0 L^0 T^0] \quad (2.87)$$

De igual forma se obtienen las ecuaciones 2.88, 2.89 y 2.90:

$$\beta = 0 \quad (2.88)$$

$$1 + \alpha - 3\beta = 0 \quad (2.89)$$

$$-2 - \gamma = 0 \quad (2.90)$$

Con lo que $\alpha=-1$; $\beta=0$; y $\gamma= -2$ siendo por lo tanto la expresión mostrada en la ecuación 2.91:

$$\pi_3 = \frac{g}{N^2 D^1} \quad (2.91)$$

A continuación se efectúan determinadas modificaciones en los parámetros obtenidos permitidas por el teorema de π , con el fin de deducir otros parámetros más conocidos y que la experiencia ha mostrado como más útiles (ver ec 2.92 y 2.93).

$$\pi_1 = \frac{\nabla P}{\rho D^2 N^2} = \frac{\rho g H}{\rho D^2 N^2} = \frac{g H}{N^2 D^2} \quad (2.92)$$

$$\pi_3 = \frac{g}{N^2 D^1} = \frac{N^2 D^1}{g} = \frac{N^2 D^2}{g D} = \frac{V^2}{g D} = F \quad (2.93)$$

Los parámetros adimensionales definitivos resultantes, conocidos con el nombre de parámetros de Rateau, son, por lo tanto, los mostrados en las ecuaciones 2.94, 2.95, 2.96 y 2.97:

a) Parámetro de altura o altura específica

$$\mu_R = \frac{g H}{N^2 D^2} \quad (2.94)$$

b) Parámetro de caudal o caudal específico

$$\delta_R = \frac{Q}{ND^3} \quad (2.95)$$

c) Número de Reynolds

$$R_e = \frac{VD}{\nu} \quad (2.96)$$

d) Número de Froude

$$F = \frac{V^2}{gD} \quad (2.97)$$

Teniendo en cuenta el teorema de π expresado anteriormente, existen otras ecuaciones que definen fenómenos físicos en una turbomáquina, en las turbinas Francis se utilizan ecuaciones obtenidas a partir de dicho teorema, o bien modificando alguna de las anteriores, como se muestra en la ecuación 2.98:

$$n_{ED} = V D^\alpha \rho^\beta N^\gamma = [L^1 T^{-1}] [L^\alpha] [M^\beta L^{-3\beta}] [T^{-\gamma}] = [M^0 L^0 T^0] \quad (2.98)$$

De donde se obtienen las ecuaciones 2.99 y 2.100:

$$1 + \alpha - 3\beta = 0 \quad (2.99)$$

$$-1 - \gamma = 0 \quad (2.100)$$

$$\beta = 0$$

con lo que $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$, quedando la ecuación 2.101:

$$n_{ED} = V D^{-1} \rho^0 N^{-1} \quad (2.101)$$

De donde se obtiene la expresión mostrada en la ecuación 2.102:

$$n_{ED} = \frac{ND}{V} \quad (2.102)$$

Luego aplicando la ecuación de Euler, en condición de salida totalmente axial y máxima eficiencia (ver ec. 2.103):

$$H = \frac{1}{g} U_1 V_{1u} \quad (2.103)$$

Donde:

$$U_1 V_{1u} = V^2 \quad (2.104)$$

Finalmente quedando un número adimensional conocido como Factor de Velocidad mostrado en la ecuación 2.105:

$$n_{ED} = \frac{ND}{\sqrt{gH}} \quad (2.105)$$

De igual forma, y aplicando el mismo teorema se obtienen otras ecuaciones de números adimensionales utilizados para caracterizar y comparar Turbinas Hidráulicas, algunas de éstas se muestran en las ecuaciones 2.106, 2.107, 2.108, 2.109:

a) Coeficiente de energía Especifico

$$\psi = \frac{gHD^4}{Q^2} \quad (2.106)$$

b) Coeficiente de circulación

$$\tau = \frac{t(V_{U1} - V_{U2})}{D\sqrt{2gH}} \quad (2.107)$$

c) Grado de reacción

$$\varepsilon = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2gH} \quad (2.108)$$

d) Deflexión del fluido

$$\varepsilon = \beta_1 - \beta_2 \quad (2.109)$$

CAPÍTULO 3

Marco Metodológico

3.1 NIVEL DE INVESTIGACIÓN

La investigación puede ser de varios tipos, y en tal sentido se puede clasificar de distintas maneras, sin embargo es común hacerlo en función de su nivel, de acuerdo a esto podemos clasificarlas en: Investigación exploratoria, la cual se efectúa sobre un tema u objeto desconocido o poco estudiado y su resultado constituye una visión aproximada de dicho objeto, Investigación descriptiva, la cual consiste en la caracterización de un hecho, fenómeno, individuo o grupo con el fin de establecer su estructura o comportamiento, y la Investigación explicativa que se encarga de buscar el porqué de los hechos mediante el establecimiento de relaciones causa y efecto

Esta investigación será de tipo exploratoria, ya que se caracteriza por explorar el comportamiento del campo de flujo incompresible que pasa a través del rotor de una turbina hidráulica tipo Francis mediante la manipulación de las variables envueltas en el mismo, a través de aproximaciones numéricas, utilizando los adelantos de la Dinámica de Fluidos Computacional o CFD, y comparándolo con resultados de trabajos anteriores.

3.2 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

En cuanto al diseño de investigación, este no es más que la estrategia general que adopta el investigador para responder al problema planteado. En atención al diseño, la investigación se clasifica en: documental, de campo y Experimental.

Diseño Documental: consiste en un proceso basado en la búsqueda, recuperación, análisis, crítica e interpretación de datos secundarios

Diseño de Campo: Consiste en la recolección de datos directamente de los sujetos investigados, o de la realidad donde ocurren los hechos

Diseño Experimental: Consiste en someter a un objeto o grupo de individuos a determinadas condiciones, estímulos o tratamiento (variable independiente), para observar los efectos o reacciones que se producen (variable dependiente).

Esta investigación es del tipo experimental, ya que se espera interpretar los datos que se obtendrán mediante la manipulación de las variables involucradas en el campo de flujo incompresible que pasa a través del rotor de una turbina hidráulica tipo Francis, mediante la aplicación de la Dinámica de Fluidos Computacional o CFD, en una situación rigurosamente controlada. Se trata de un experimento ya que se va a provocar una situación, introduciendo variables de estudio, y observando el efecto de la variable en las conductas observadas.

3.3 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Revisión bibliográfica de tesis y otras publicaciones relacionadas con el estudio del campo de flujo incompresible que interactúa con el rotor de una turbina hidráulica tipo Francis con el fin de determinar los parámetros físicos involucrados en este proceso, así como también determinar los modelos matemáticos y leyes fundamentales que lo definen.

3.4 SELECCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS

Una vez realizada la revisión bibliográfica satisfactoria, se determinan los modelos matemáticos más apropiados para la realización de la simulación numérica basándose en la interpretación de la investigación bibliográfica y de ser necesario la comparación de los resultados obtenidos en la simulación de modelos similares al seleccionado en esta investigación.

3.5 DISEÑO DEL ROTOR A ESTUDIAR MEDIANTE UN PROGRAMA DE DISEÑO ASISTIDO POR COMPUTADORA (CAD)

El diseño del rotor a estudiar se realiza utilizando los datos (diámetro interno, diámetro externo, altura de los alabes etc.) Suministrados por la empresa Andritz Hydro Brasil y EIR (empresa industrial técnica s.a.), y a su vez recreando dichos datos mediante un software de diseño asistido por computadora como se indica en la figura 3.1.

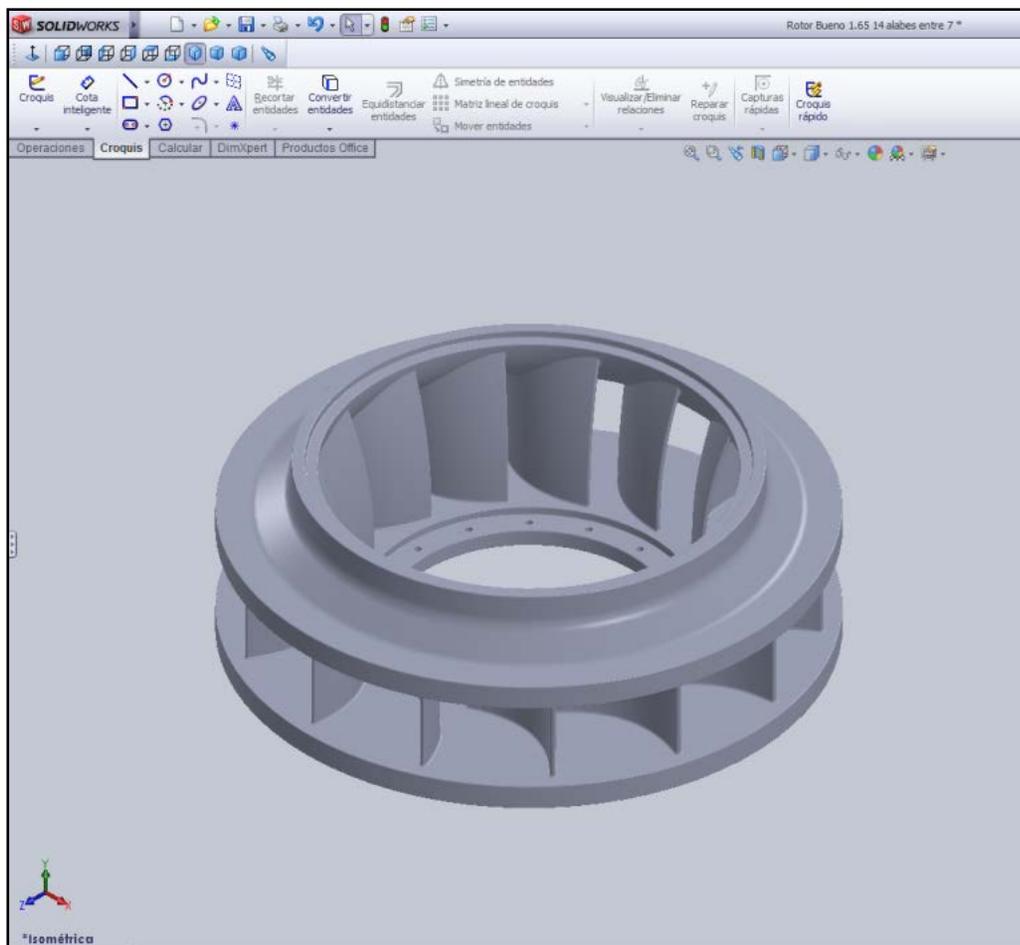


Fig. 3. 1 Geometría recreada a partir de datos suministrados

3.6 ESTABLECIMIENTO Y DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO DEL MODELO

Una vez creada la geometría del Rotor de la Turbina Francis a estudiar, se obtiene, a partir de ella el volumen interior del rotor por el cual se desplazará el fluido como se muestra en la figura 3.2

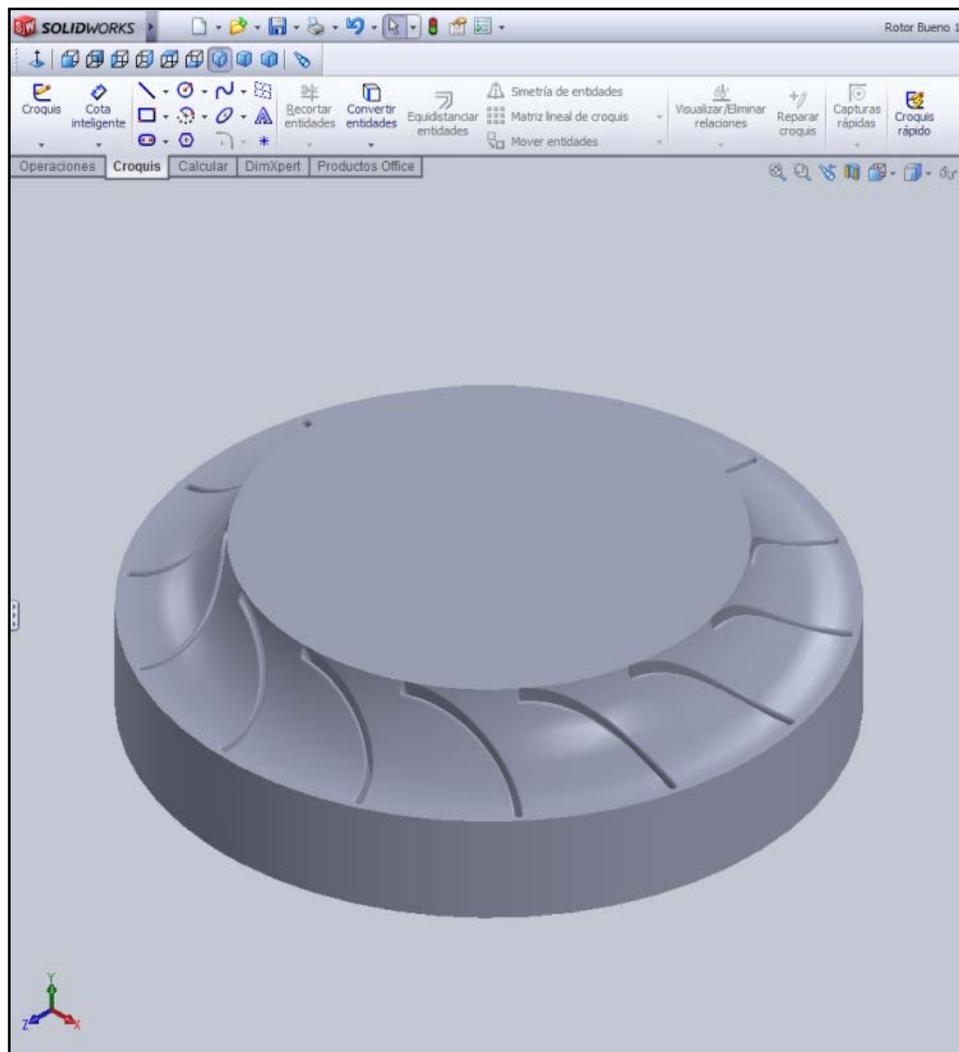


Fig. 3. 2 Dominio Fluidizado en el interior del rotor

Para disminuir la complejidad del mallado así como reducir los tiempos de simulación se fracciona el volumen extraído (véase figura 3.3), de manera tal que la figura mantenga su simetría al momento de aplicarle una periodicidad rotacional y así evitar que se genere superposición de material. Para realizar esta división se consideran dos álabes como mínimo para garantizar que el análisis realizado considere todas las condiciones físicas presentes entre este par de álabes.

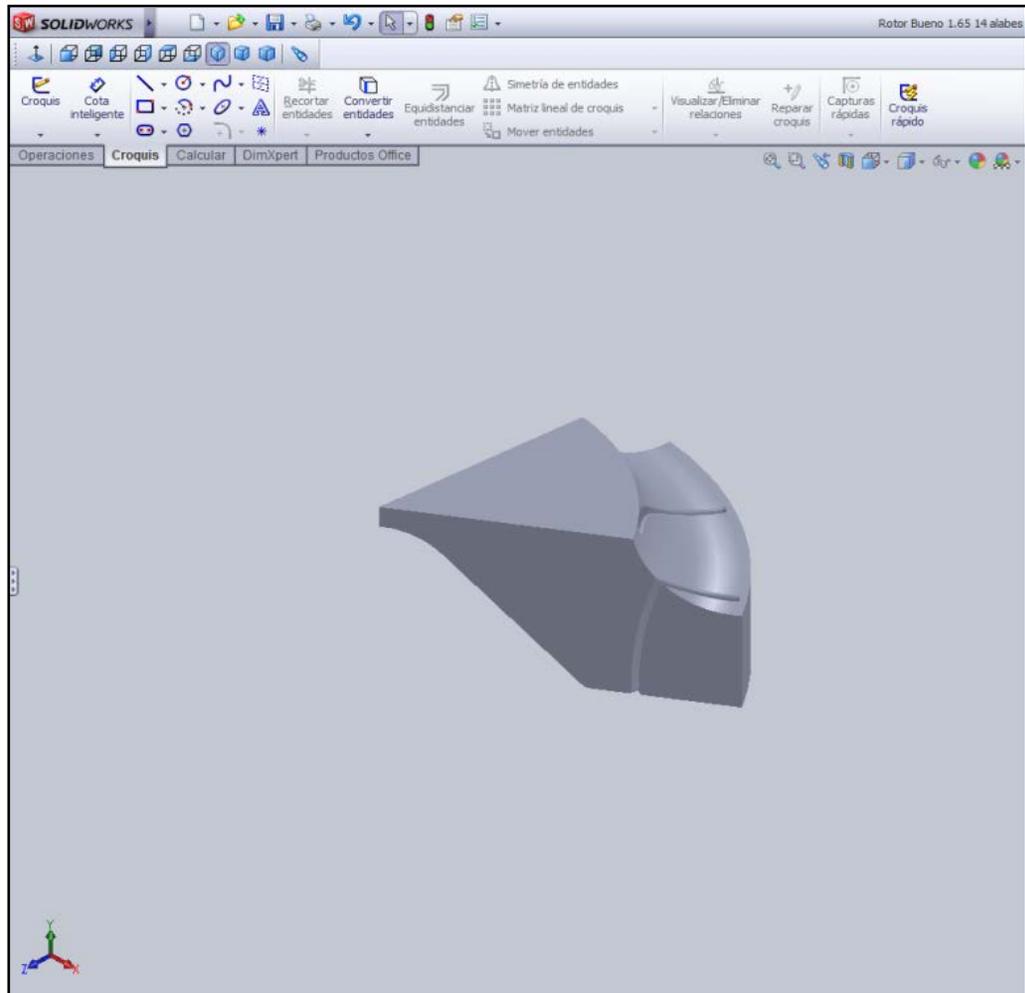


Fig. 3. 3 Un séptimo del dominio fluidizado

Posteriormente se importa el modelo hacia el programa de mallado CFX MESH perteneciente al paquete computacional ANSYS CFX. Luego de importar la geometría al programa de mallado se selecciona la preferencia física la cual puede ser CFD, mecánica o electromagnética, en nuestro caso Dinámica de Fluido Computacional (CFD) por tratarse de una turbomáquina como se muestra en la figura 3.4 Posteriormente se indica el programa con el cual se realizará la solución de las ecuaciones de gobierno para el análisis numérico correspondiente.

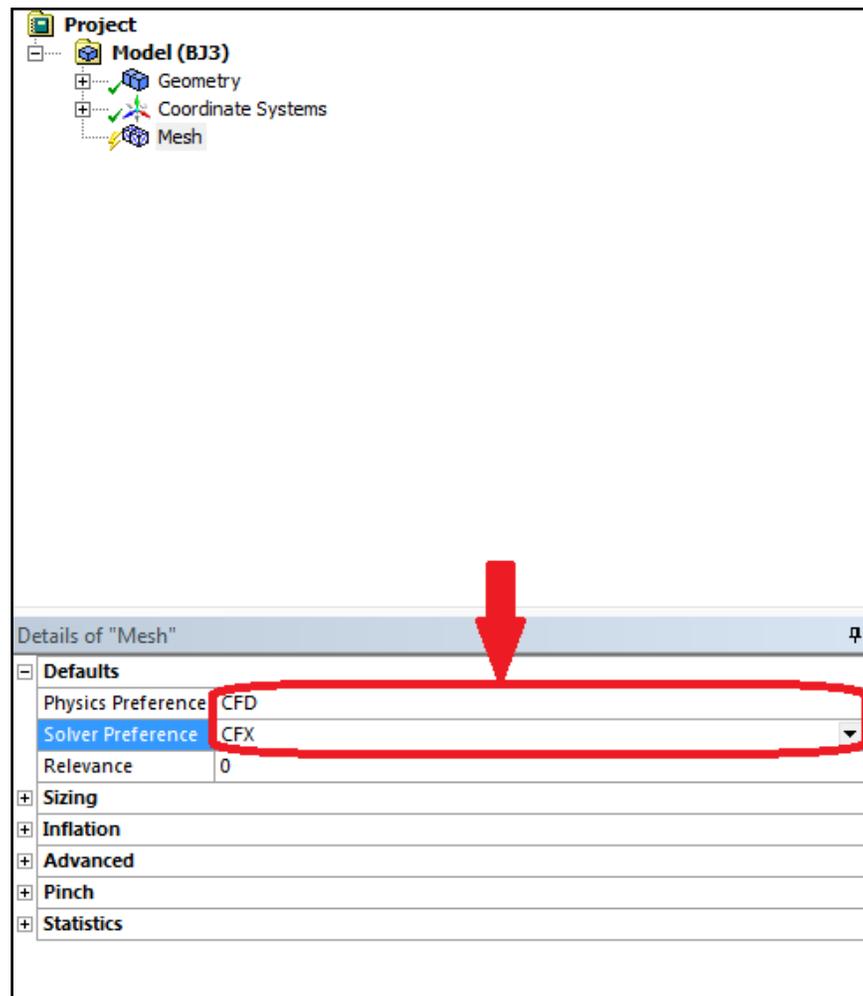


Fig. 3. 4 Preferencia del mallado (físicas y de solución)

Luego, se seleccionan los nombres a cada una de las caras de la geometría, las cuales son: la entrada, la salida, y las caras laterales para facilitar la selección de las secciones (véase figura 3.5), que más adelante serán utilizadas como condiciones de borde.

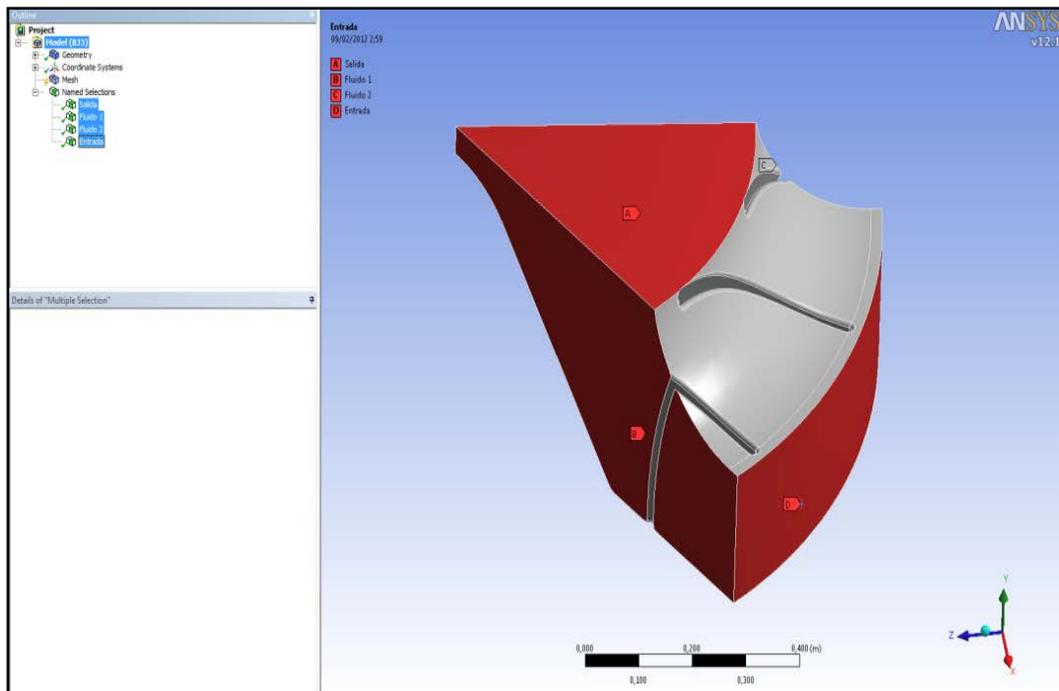


Fig. 3. 5 Selección de nombres de las caras

Para la creación del mallado, la herramienta ofrece varios métodos, los cuales utilizan elementos tetraédricos, hexaédricos, pirámides de base cuadrada, entre otros. Mediante un análisis de la calidad de mallado, así como el número de elementos y nodos, se seleccionó un mallado utilizando la configuración automática del programa, la cual utilizó elementos tetraédricos, y se modificó el algoritmo denominado Patch Independent por el Patch Conforming, como se muestra en la figura 3.6, lo cual garantiza una superficie uniforme que permita mayor homogeneidad en la superficie del dominio. El mallado generado bajo estas condiciones se muestra en la figura 3.7.

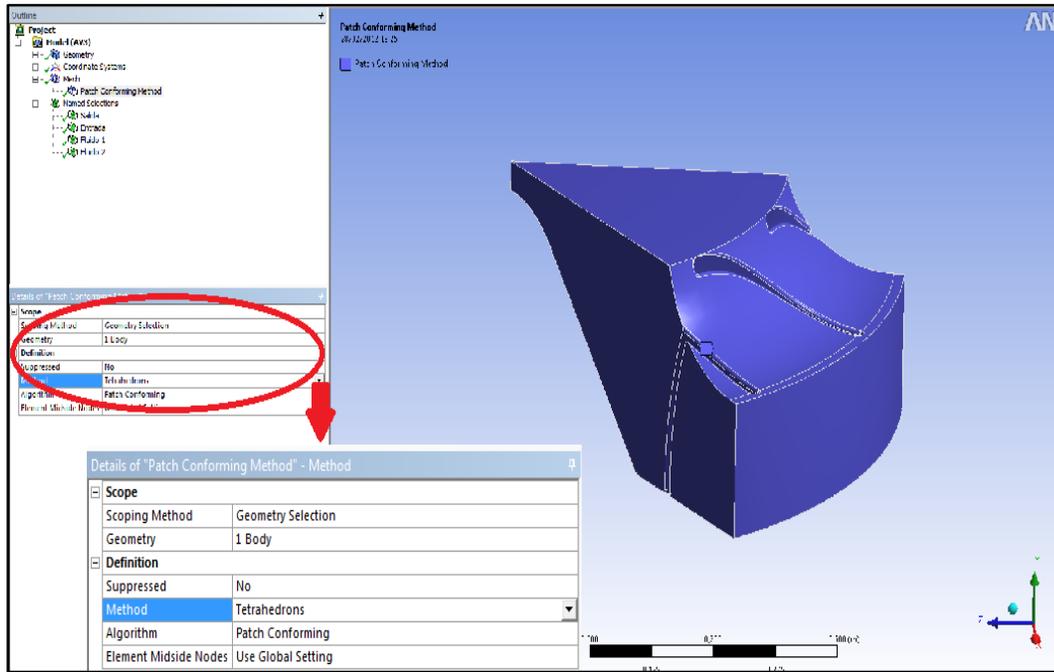


Fig. 3. 6 Selección del modelo de mado

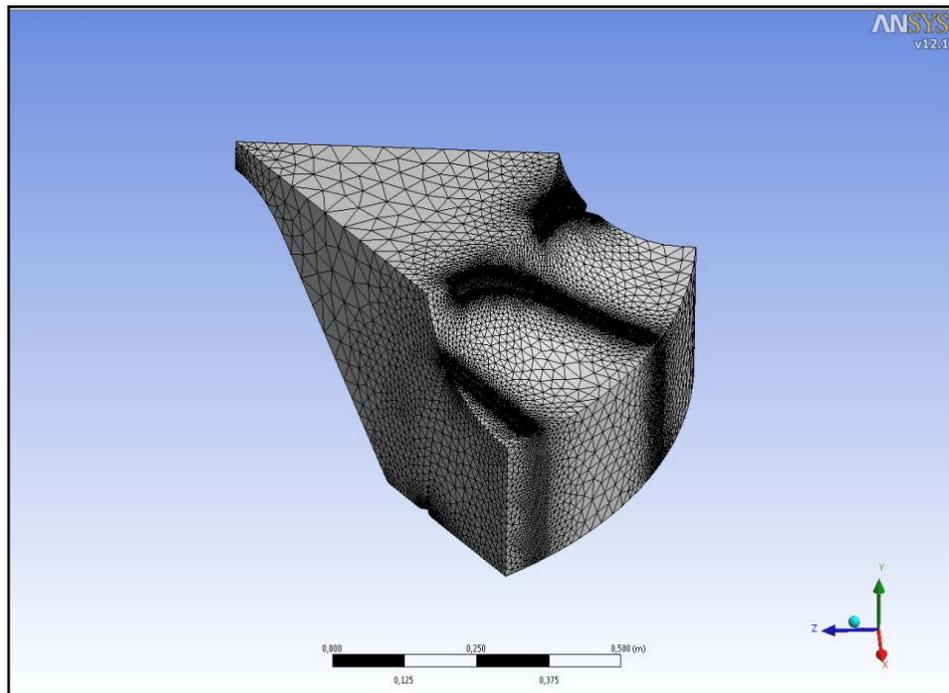


Fig. 3. 7 Malla generada

3.7 CONFIGURACIÓN DE LAS CONDICIONES DEL DOMINIO

Se configura inicialmente el dominio creando una interface correspondiente a las superficies de la porción del rotor a estudiar que son periódicas a nivel rotacional, para realizar una simulación a solo un séptimo del rotor completo tomando en cuenta que se trata de una geometría simétrica como se indica en la figura 3.8.

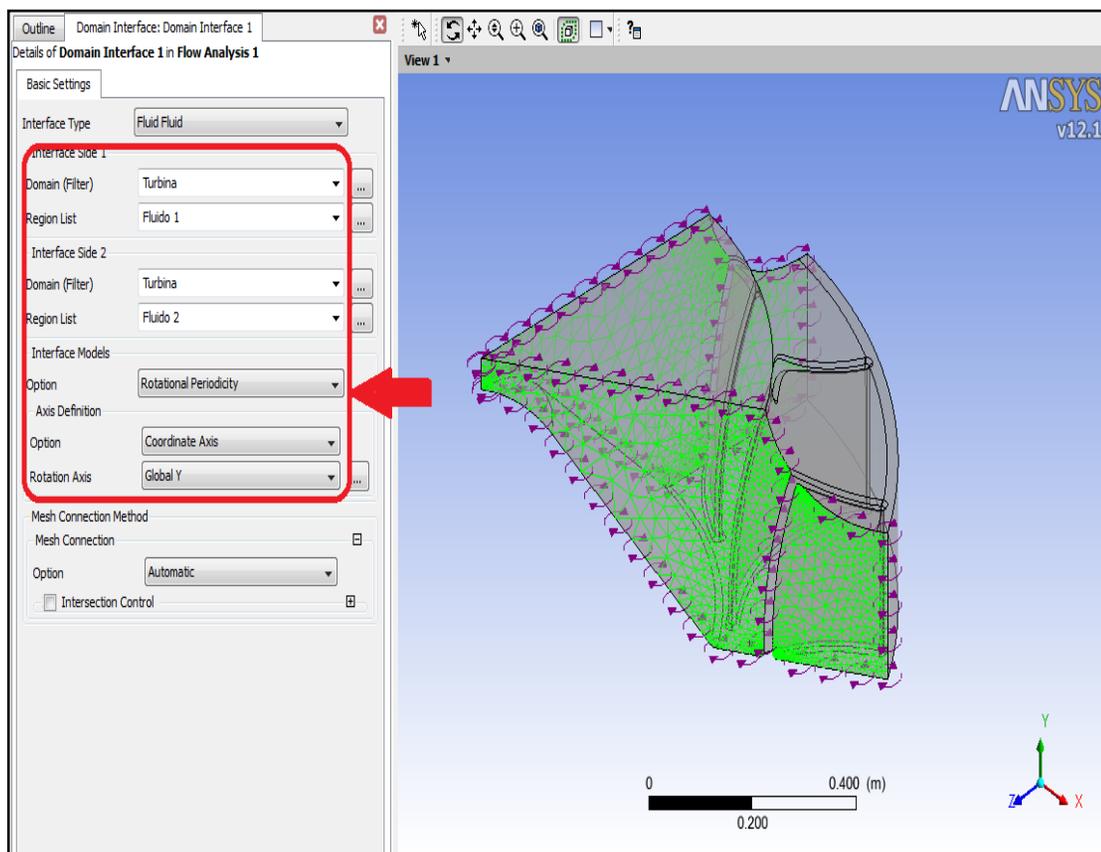


Fig. 3. 8 Configuración de la periodicidad rotacional

Luego, se selecciona el fluido que circulara a través del dominio, el cual será agua. Seguidamente se seleccionan la presión de referencia, la cual fue establecida

como 1 atm. De tal manera que las presiones colocadas como condición de borde, así como las presiones arrojadas por el software en los resultados serán presiones manométricas. También se selecciona el eje de rotación que será el Eje “Y”, así como la velocidad de rotación del dominio que será según los datos suministrados por la empresa 327,3 rpm (ver tabla 4.1).

Por último se selecciona el modelo de transferencia de calor, como Isotérmico considerando que el fluido no cambia de temperatura en el recorrido, así como el modelo de turbulencia Kappa-Épsilon (K- ϵ) o Kappa-Omega (K- Ω) SST, según sea el caso. La configuración de estas condiciones se pueden visualizar en la figura 3.9 y 3.10.

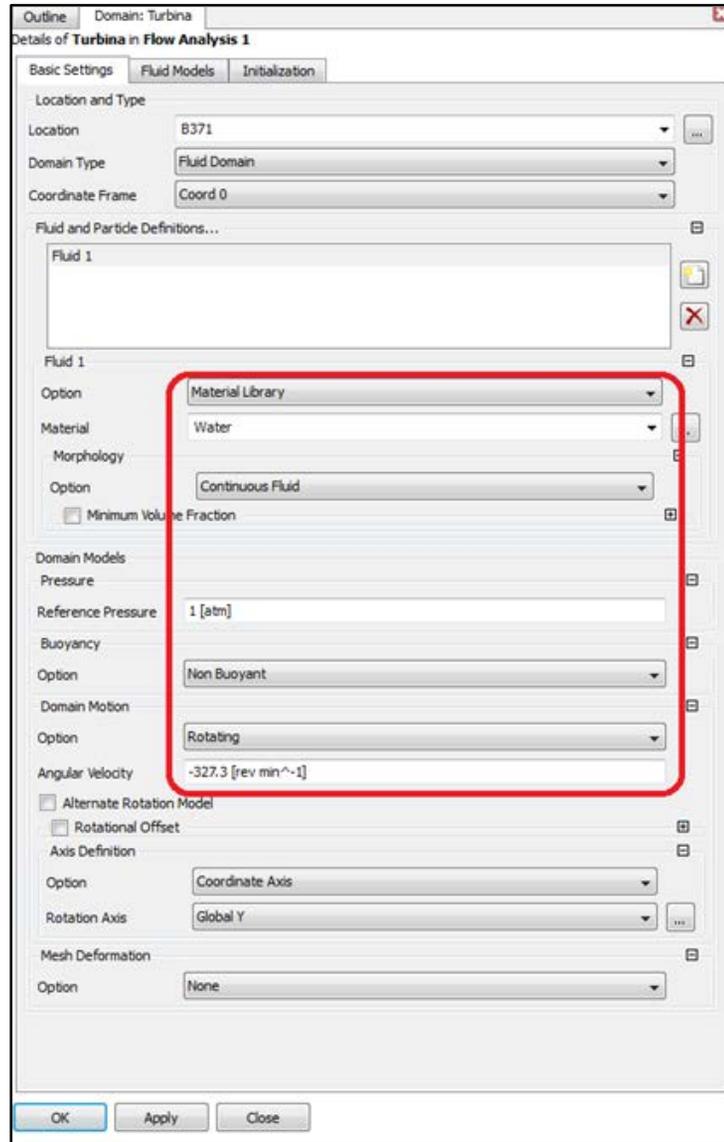


Fig. 3. 9 Configuración de las condiciones del dominio (a)

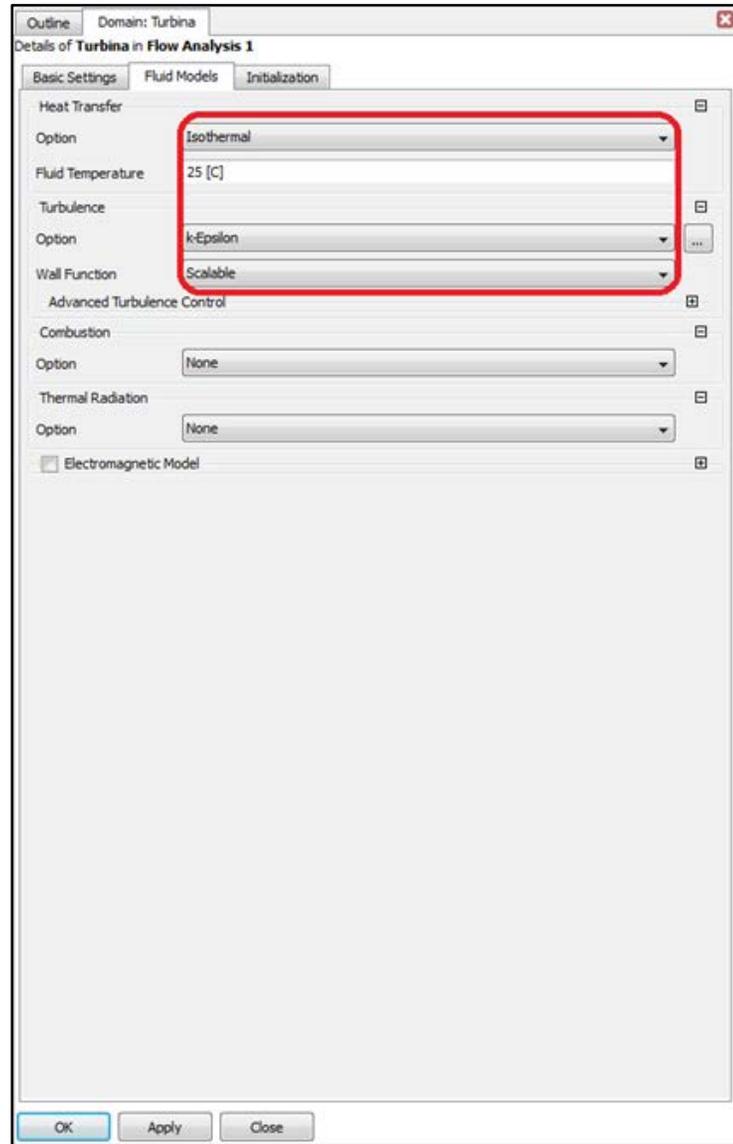


Fig. 3. 10 Configuración de las condiciones del dominio (b)

3.8 CONFIGURACIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE

Se debe configurar las zonas del modelo donde irán las condiciones de borde establecidas como pueden ser presiones, velocidades, caudal, flujo másico entre otras, que van a ser ubicadas en las entradas y salidas del flujo del dominio.

Se selecciona la condición de “Inlet” a la cara llamada Entrada, colocando un régimen de flujo se establece como subsónico, debido a la posibilidad de choque si se establece otro régimen. La turbulencia se establece con gradiente cero, sin afectar los resultados de la simulación y aumentar la rapidez de la convergencia de las ecuaciones de gobierno. Se selecciona la condición conocida a cada una de las superficies, tal como se muestra en las figuras 3.11 y 3.12 en nuestro caso se asigna la velocidad de entrada al impulsor, la cual variará entre 3 m/s y 4 m/s.

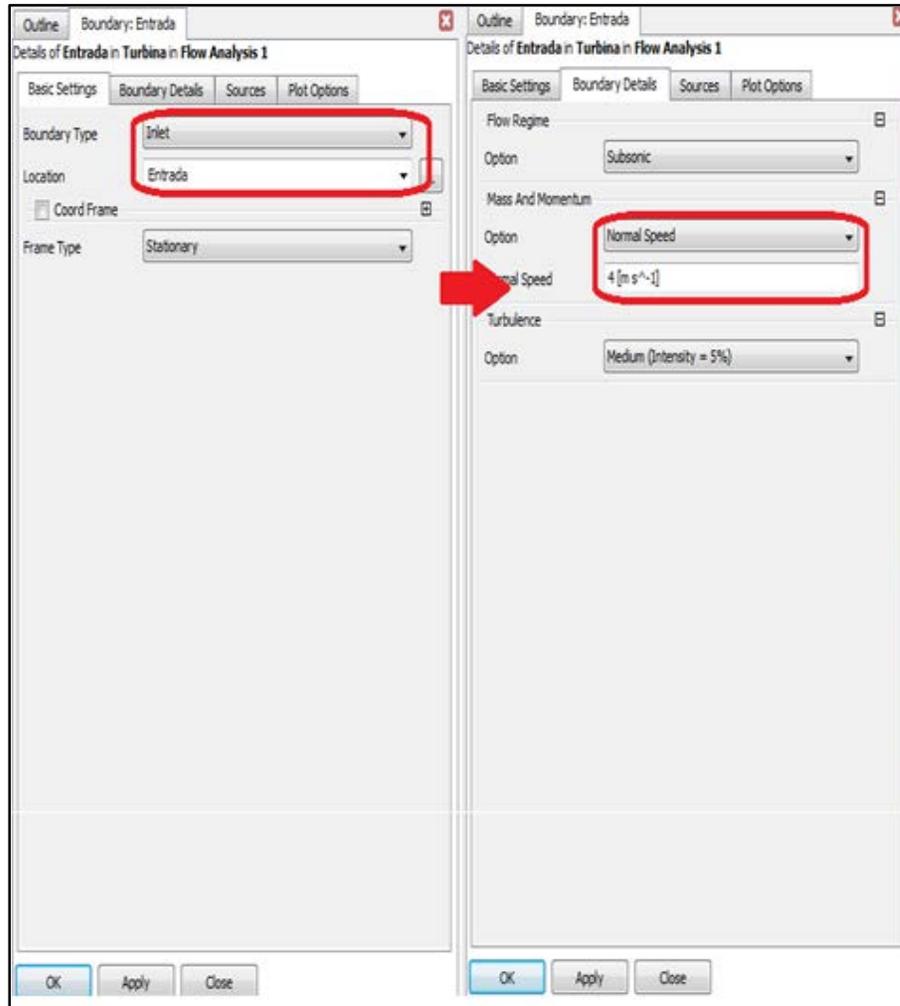


Fig. 3. 11 Configuración de las condiciones de entrada del fluido (a)

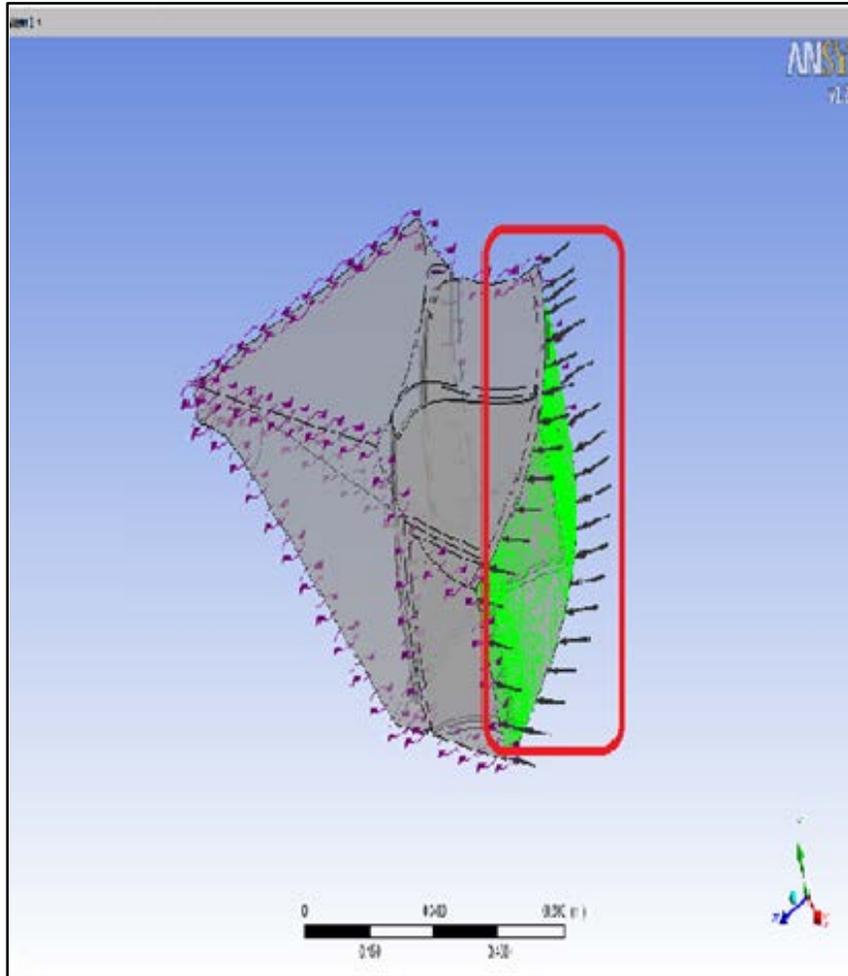


Fig. 3. 12 Configuración de las condiciones de entrada del fluido (b)

De igual forma se selecciona la condición conocida en la cara llamada Salida como “Outlet”, igualmente en régimen de flujo subsónico por lo mencionado anteriormente. En este caso la condición conocida será la presión de referencia promedio la cual será 0 Pa, como se muestra en las figuras 3.13 y 3.14.

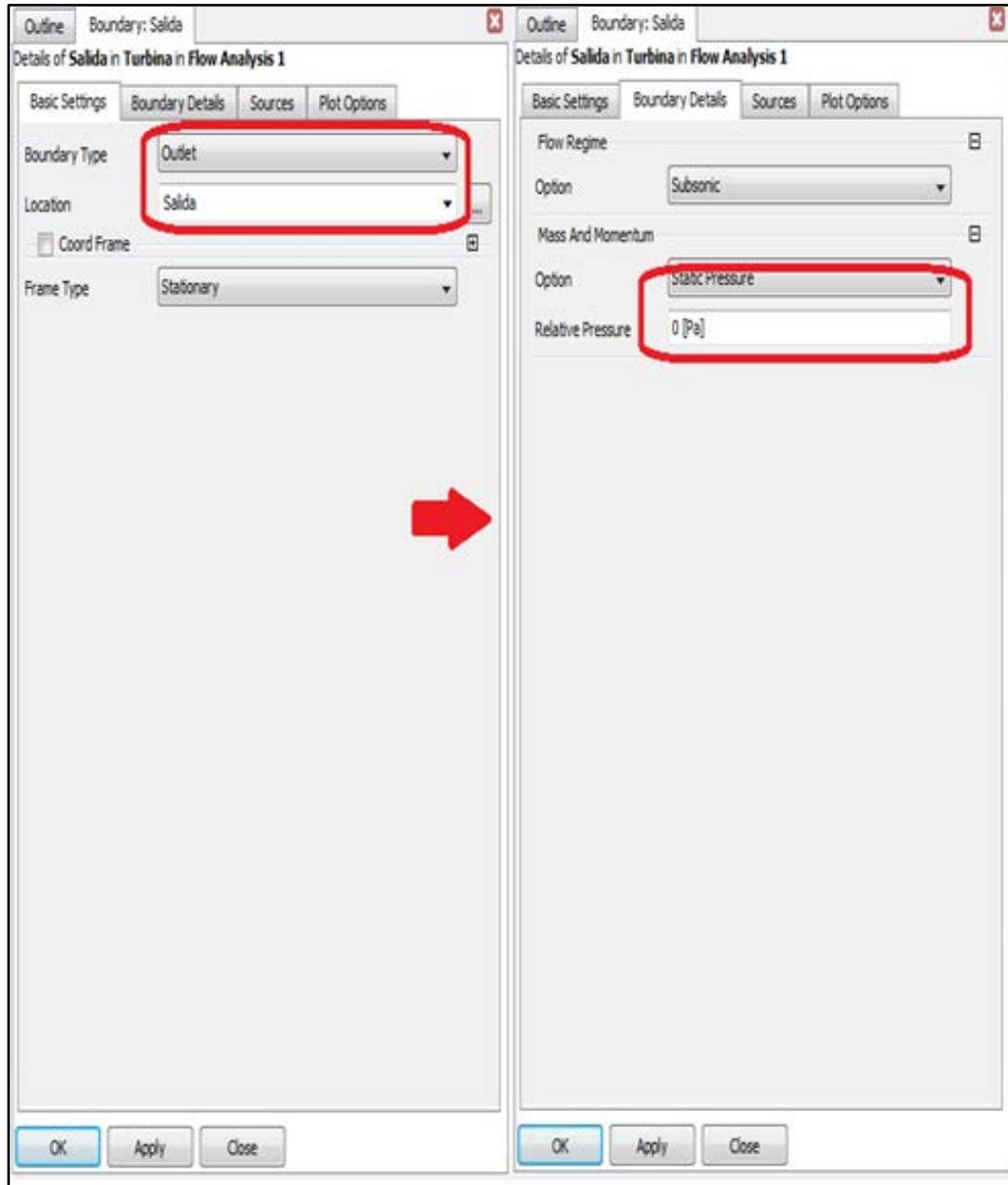


Fig. 3. 13 Configuración de las condiciones de salida del fluido (a)

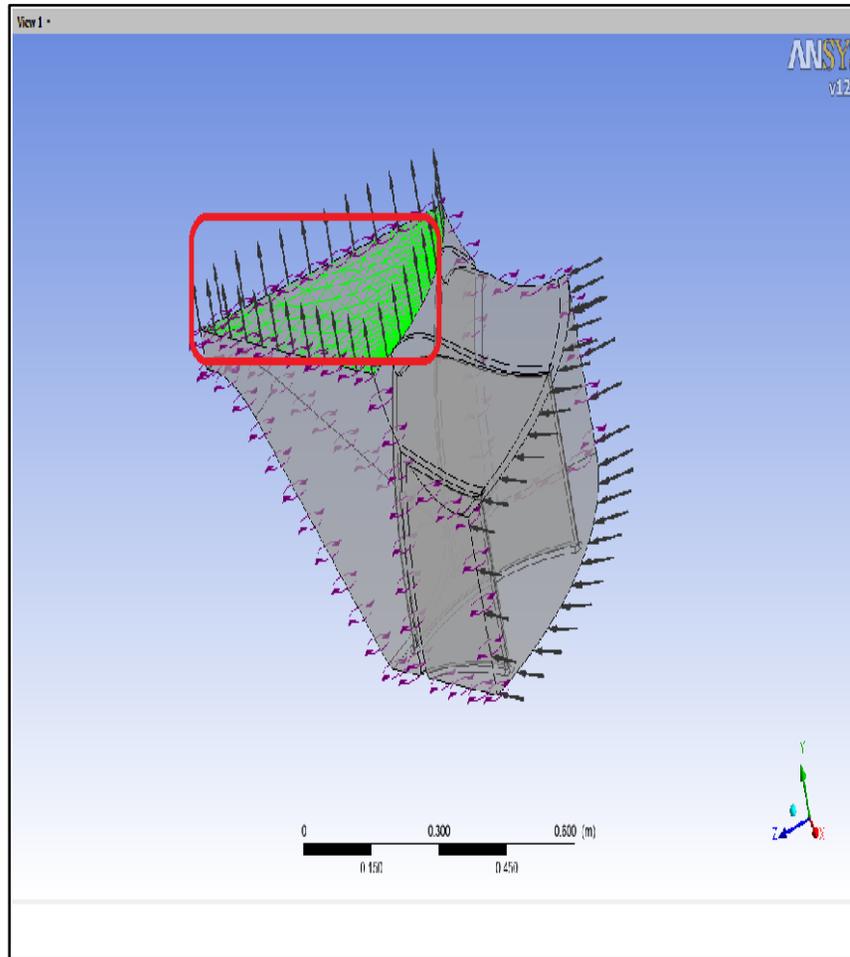


Fig. 3. 14 Configuración de las condiciones de salida del fluido (b)

3.9 CONFIGURACIÓN DEL SOLVER

La configuración del Solver, se refiere a los criterios de convergencia que tendrá el software a la hora de realizar los cálculos, para esto se ingresa al panel de configuración solver control como se muestra en la figura 3.15.

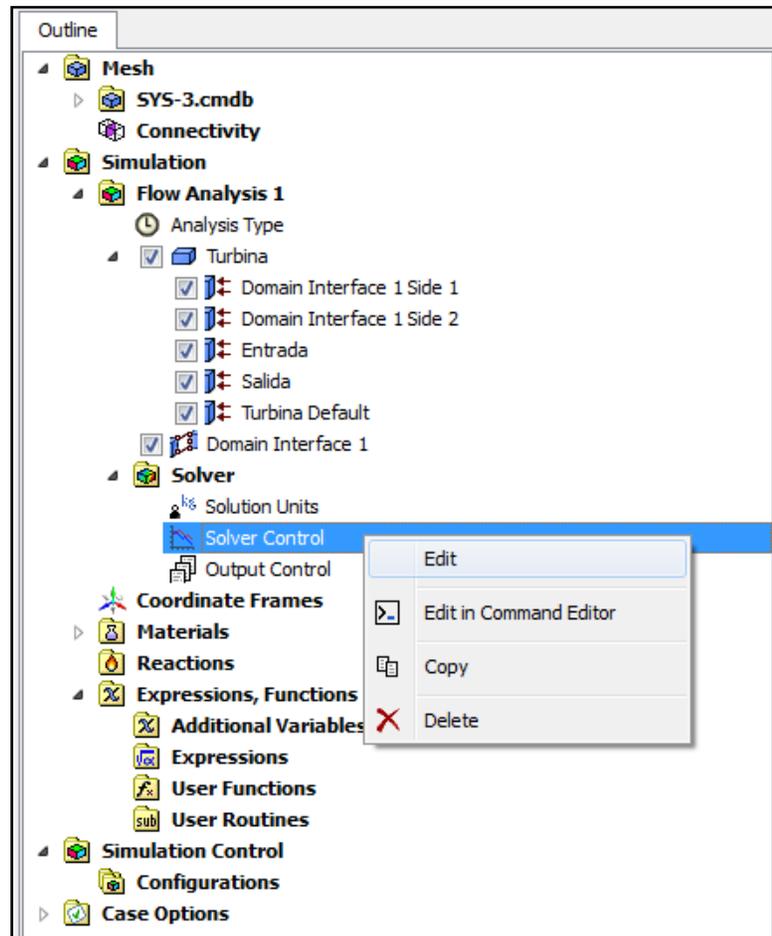


Fig. 3. 15 Configuración del Solver

Donde se especifica el número máximo de iteraciones o pasos a realizar para el cálculo, así como el valor objetivo del criterio de convergencia ya sea residual o máximo como se muestra en la figura 3.16. El cálculo se detendrá al cumplirse cualquiera de estas dos condiciones.

Para el criterio de convergencia Residual, el valor seleccionado para la convergencia es 1.E-4, y un máximo de iteraciones de 1000. También se activa el Conservation Target con un valor de 0.05, el cual indica al programa que si el error

en el Imbalance es mayor al 5 % las iteraciones no deben detenerse aun cuando se hayan cumplido los dos criterios mencionados anteriormente.

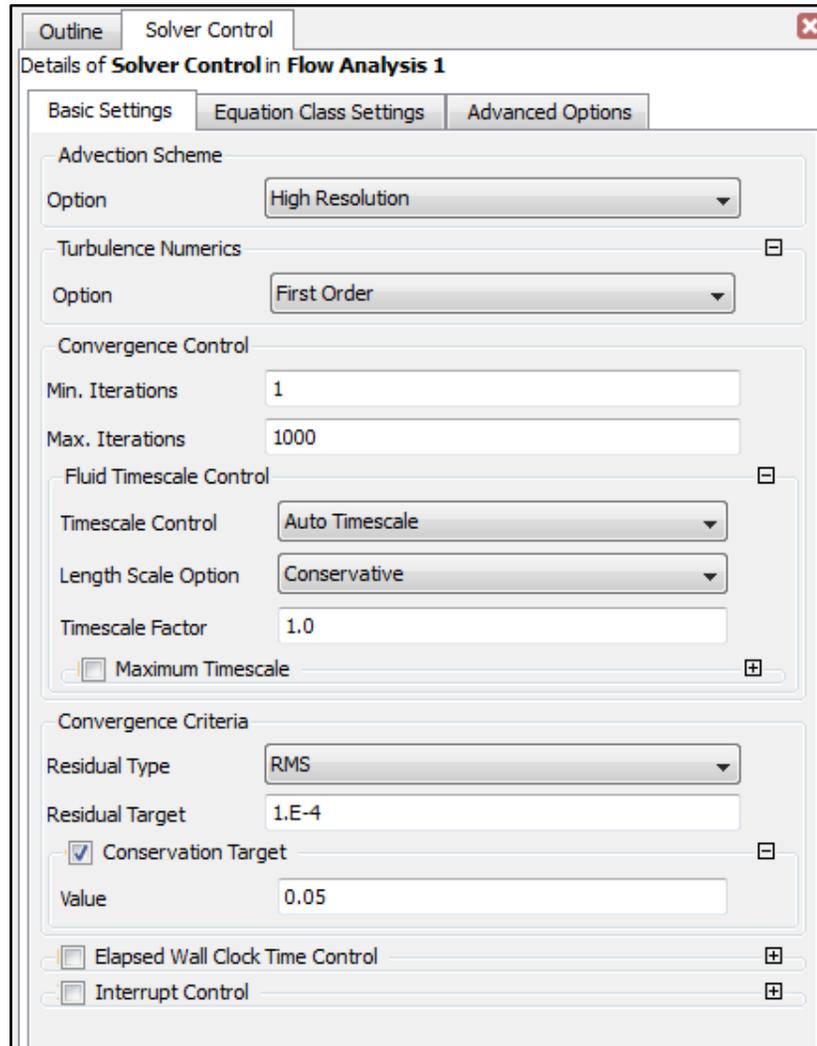


Fig. 3. 16 Edición de los valores prefijados en el solver

3.10 OBTENCIÓN Y VALIDACIÓN DE RESULTADOS

Se obtienen los resultados por medio de gráficos, videos, o en forma de datos (Caudal, presiones, Fuerza etc.).

Con la aplicación de la ecuación 2.24 se realizara la validación de los resultados, con la cual se observara el error entre la entrada y la salida en referencia a las leyes de conservación.

De igual manera se comparan gráficos obtenidos a través del software con algunos extraídos de antecedentes para verificar las tendencias de las curvas con el fin de validar los resultados.

CAPÍTULO 4

Desarrollo de la Investigación

4.1. GENERACIÓN DE DOMINIO

4.1.1. OBTENCIÓN DE LA GEOMETRÍA

La geometría se generó a partir de datos obtenidos de un rotor comercial localizado en la web, los cuales fueron suministrados por las empresas ANDRITZ HYDRO Brasil y EIR (Empresa Industrial Técnica S.A.). Los parámetros del diseño suministrados por la empresa se muestran en la tabla N° 4.1. Dicha turbina pertenece al proyecto de la pequeña central hidroeléctrica de Sitio Grande, ubicada en el municipio de São Desidério, cerca de la ciudad de Barreiras, Estado de Bahia, en Brazil, los cuales fueron utilizados para, mediante un programa de diseño 3D, recrear el rotor obteniendo así una aproximación de la curvatura real de los álabes como se muestra en la figura N° 4.1

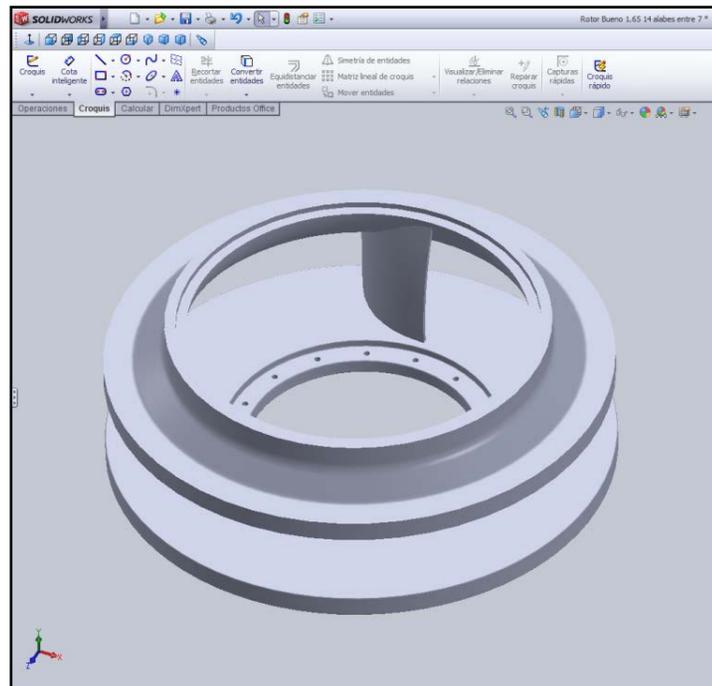


Fig. 4. 1 Generación del perfil del alabe para el modelo del rotor

Tabla 4. 1 Parámetros suministrados por la empresa

Parámetro	Valor
Diámetro Externo (m)	1,650
Diámetro Interno (m)	0,900
Espesor de entrada del alabe (mm)	30,000
Espesor de salida del alabe (mm)	26,800
Altura de entrada del alabe (m)	0,250
Altura de salida del alabe (m)	0,900
Nº de álabes	14
Velocidad de Rotación (rpm)	327,3

Cabe destacar que los diámetros mencionados anteriormente son referentes a la distancia medida hasta la zona interna y externa de los álabes según sea el caso.

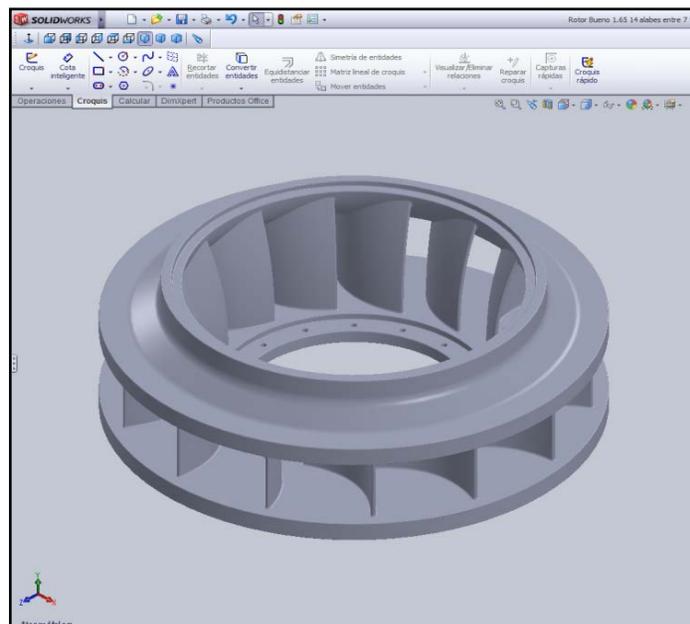


Fig. 4. 2 Rotor generado

Una vez especificados todos los parámetros del diseño, se obtuvo la geometría final realizando una matriz, donde se obtuvieron los 14 álabes de iguales características como se muestra en la figura N° 4.2

4.1.2. GENERACIÓN Y VERIFICACIÓN DE LA CALIDAD DEL MALLADO

El mallado fue generado en el programa CFX Mesh, donde se definió el método Patch Conforming, la cual está conformada por pequeños elementos en forma de tetraedros tanto en el borde como en el interior del volumen. Dichos tetraedros se encuentran en contacto a través de sus caras y en sus vértices se conforman los denominados nodos, puntos en los cuales el solver resuelve cada una de las ecuaciones de gobierno.

Antes de realizar la simulación el programa CFX analiza la calidad del mallado donde se verifica los parámetros en torno a la calidad de la misma, arrojando los resultados que se muestran en la tabla 4.2. El mínimo ángulo de ortogonalidad debe ser mayor a 20°, el máximo factor de expansión debe ser menor de 20 y que el máximo radio de aspecto debe ser menor de 100.

Tabla 4. 2 Estadística de la calidad del mallado

Estadísticas del mallado									
Nombre del dominio	Angulo de ortogonalidad			Factor de expansión			Factor de aspecto de malla		
Turbina	Mínimo (grados)			Máximo			Máximo		
		40	ok		15	ok		6	OK
Turbina	%!	%ok	%OK	%!	%ok	%OK	%!	%ok	%OK
	0	<1	100	0	3	97	0	0	100

En el diagnóstico de la calidad del mallado se especifican los valores relevantes para cada parámetro y rangos de interpretación para los parámetros indicados en la tabla 4.2. Dichos rangos son considerados como “bueno”, “aceptable” y “malo” y son visualizados en la tabla mediante los símbolos “%OK”, “%ok” y “%!” en forma de porcentajes, respectivamente. Para los valores dentro del rango “bueno” los elementos no tienen ninguna tendencia a producir errores numéricos en el proceso de solución de las ecuaciones. Para los valores dentro del rango “aceptable”, se puede obtener ciertos errores en las soluciones si estas incluyen cálculos de flujos en regímenes transitorios, estudios específicos en capas límite y flujos en secciones de dimensiones reducidas. Sin embargo para condiciones de flujo en régimen permanente, el error se estabiliza y se reduce acorde aumenta el número de iteraciones por lo que no se requiere un refinamiento mayor, a menos que sea estrictamente necesario para el estudio, o que la solución no converja. Cuando los valores se encuentran en el rango no aceptable aumentan las probabilidades de errores en el cálculo y convergencia por lo que se recomienda realizar un refinamiento de la malla.

En la Tabla 4.3 se muestran las características del mallado, donde se especifican la cantidad de elementos totales así como la cantidad de nodos y el tipo de elementos.

Tabla 4. 3 Características del mallado

Características del mallado				
Nombre del dominio	Cantidad total de nodos	Cantidad total de elementos	Tipos de elementos	Numero de Caras
Turbina	215477	1141413	Tetraédricos	96936

El tipo de elementos utilizados fueron los tetraédricos ya que son los elementos más populares y utilizados en aplicaciones tridimensionales, y este modelo fue el que arrojó mejor calidad de mallado, luego de haber comparado este modelo con la calidad de otros mallados generados con diferentes parámetros.

4.2. SELECCIÓN DEL MODELO DE TURBULENCIA

Se realiza la selección del modelo de turbulencia luego de desarrollar un estudio comparativo entre dos modelos altamente recomendados para las simulaciones de turbomáquinas y analizar los resultados obtenidos, basados en las leyes de conservación.

Los modelos estudiados fueron los siguientes: el modelo Kappa-Épsilon ($\kappa\text{-}\epsilon$) por su robustez y amplio campo de aplicación en soluciones de ingeniería, y el modelo de Transporte de Esfuerzos Cortantes (SST ó “Shear Stress Transport”) basado en ecuaciones Kappa-Omega ($\kappa\text{-}\omega$) por su capacidad de predicción del comportamiento del flujo en zonas de geometrías reducidas y cercanas a las paredes del dominio.

Ya que en la resolución numérica de las ecuaciones realizadas por el programa existe un margen de error para los diferentes modelos, se realizaron simulaciones con el fin de observar el comportamiento de la conservación de las ecuaciones de continuidad en la entrada y la salida del dominio.

Las simulaciones fueron realizadas bajo una condición de presión a la salida del dominio de 0 Pa y una velocidad de rotación de 327,3 rpm donde se varió la velocidad a la entrada del dominio y comparando las variaciones del flujo másico entre la entrada y la salida del dominio, como se indica en la tabla N° 4.4.

Tabla 4. 4 Comparación de los modelos de turbulencia

Modelo	Velocidad de entrada (m/s)	Flujo másico en la Entrada (Kg/s)	Flujo másico en la Salida (Kg/s)	Error (%)
k-ε	3.6	646,2480	646,2610	0,002011571
k-ε	3.8	682,1510	682,4120	0,03824669
k-ω	3.6	646,248	646,336	0,013615209
k-ω	3.8	682,151	682,415	0,038686137

Luego de observar los resultados arrojados por el programa para los diferentes modelos de turbulencia seleccionados, y basándonos en las leyes de continuidad se seleccionó el modelo Kappa-Épsilon (κ - ϵ) ya que este obtuvo menores errores porcentuales en el flujo másico entre la entrada y la salida del impulsor, aunque también observamos que el modelo Kappa-Omega (κ - ω) no genera valores muy bajos de error y por lo tanto también cumple las leyes de conservación con bastante precisión.

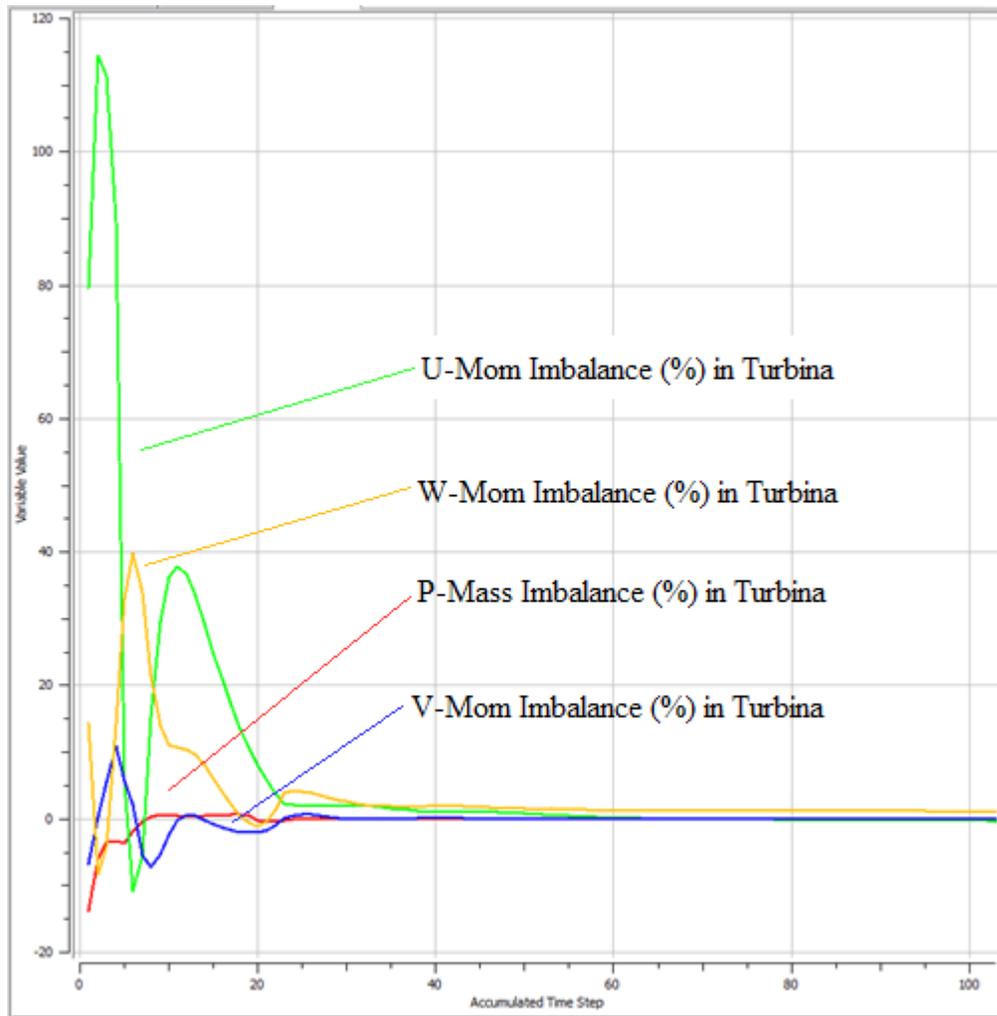


Fig. 4. 3 Imbalance del modelo Kappa Omega

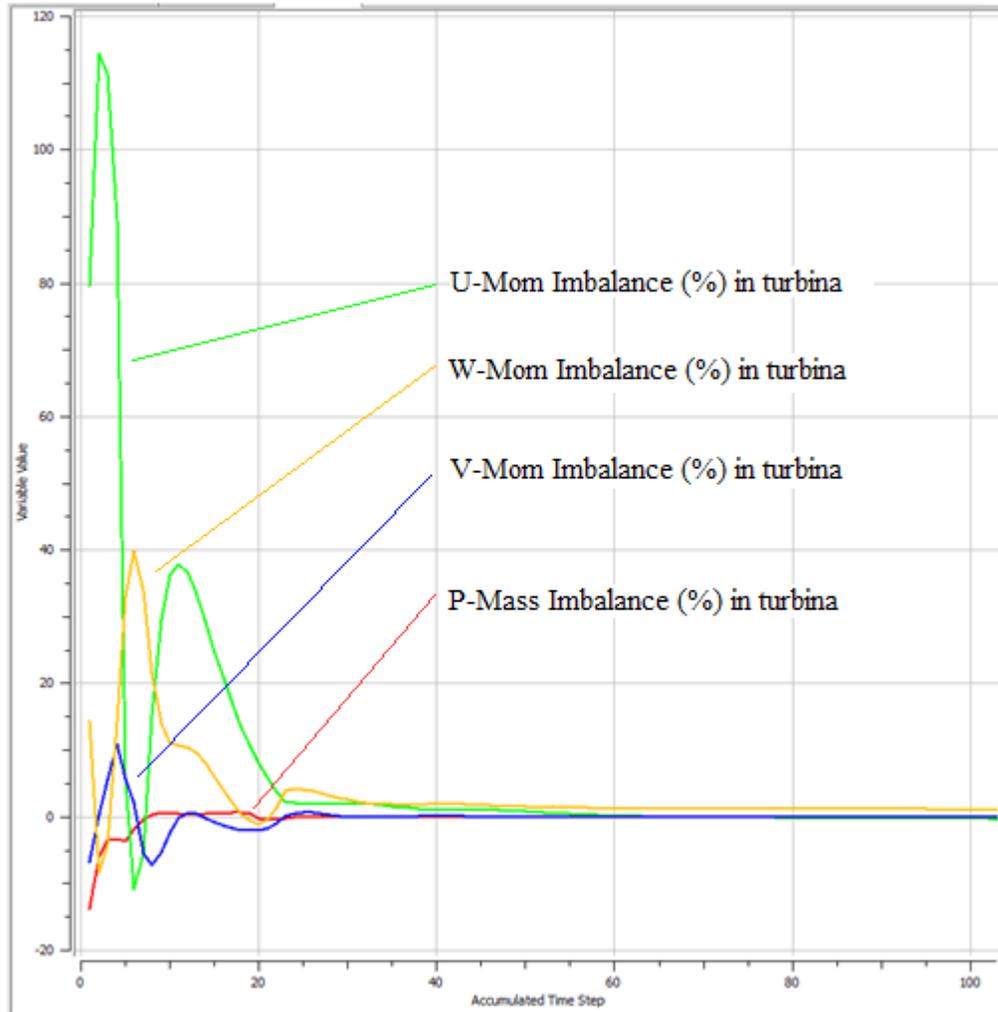


Fig. 4. 4 Imbalance del modelo Kappa Epsilon

En las Figuras 4.3 y 4.4 se observa el comportamiento del imbalance utilizando ambos Modelos de Turbulencia, el cual es similar entre ambos, con la única diferencia que el Modelo Kappa-Omega (κ - Ω) convergió en una menor cantidad de iteraciones, aun así se selecciona el modelo (k- ϵ) debido a que el tiempo de simulación total en cada una de las ellas fue menor debido a que las iteraciones del modelo Kappa-Omega se demoraban un tiempo mayor en realizarse.

4.3. CONVERGENCIA DE LA SIMULACIÓN NUMÉRICA

A continuación se demuestra la convergencia de los modelos matemáticos durante la simulación a través del comportamiento de las curvas de masa y momento, turbulencia e imbalance para la malla del dominio. Estas simulaciones fueron realizadas variando la velocidad de entrada entre 3 y 4 (m/s), ya que este es el rango de velocidad que, según datos suministrados por la empresa encargada del proyecto, ingresa el fluido al rotor de la turbina Francis instalada.

4.3.1 CONVERGENCIA DE LA SIMULACIÓN PARA $V_{entrada}=3$ (m/s)

En la figura N° 4.5 se muestra como las iteraciones se detienen en el momento que alcanzan un valor residual de 0.0001 ($1 * 10^4$), el cual se había establecido anteriormente como criterio de convergencia.

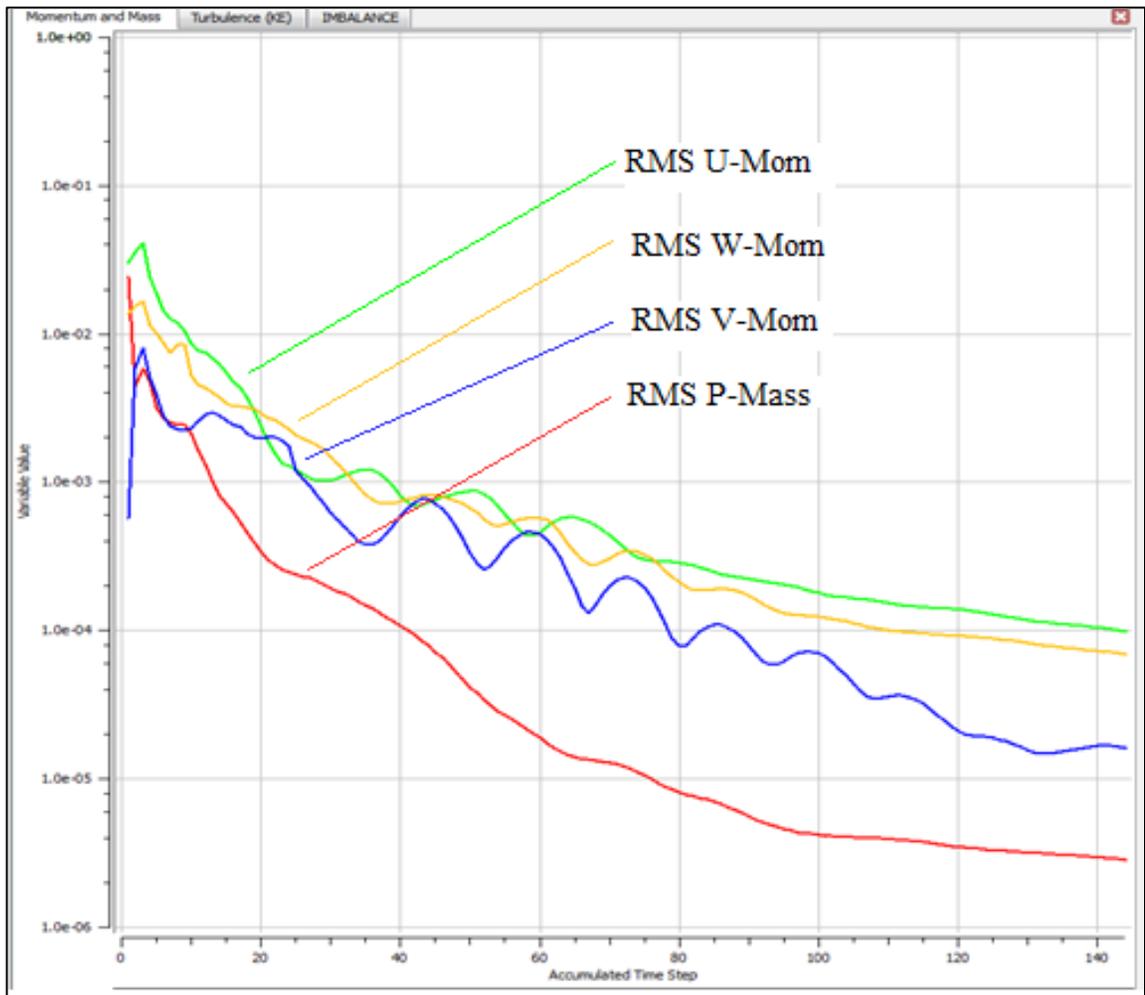


Fig. 4. 5 Convergencia de las ecuaciones de masa y momento para $V_{entrada}=3$ (m/s)

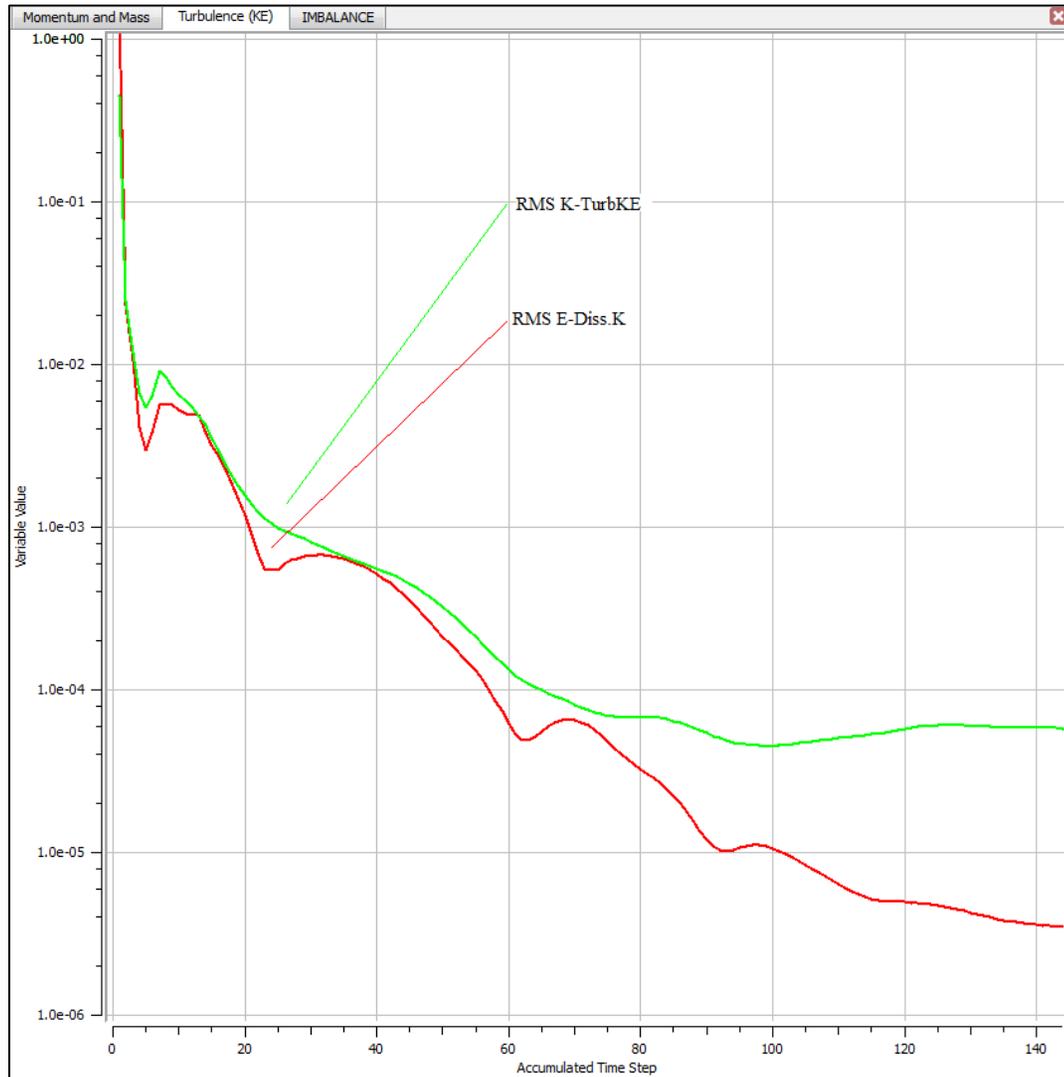


Fig. 4. 6 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para Ventrada=3 (m/s)

En la figura N° 4.6 se observa el comportamiento de las curvas correspondiente al modelo de turbulencia, las cuales alcanzaron el valor del residuo (RMS) definido anteriormente como criterio de convergencia, La precisión de estos resultados dependerá de que tan bajo sean los valores de RMS de las ecuaciones de masa y momento.

4.3.2 CONVERGENCIA DE LA SIMULACIÓN PARA $V_{entrada}$ entre 3,2 y 4 (m/s)

Al realizar las simulaciones con los distintos valores de velocidad de entrada del fluido a la turbina (3.2, 3.6, 3.8 y 4 m/s) se obtuvieron gráficos de convergencia similares al mostrado en las figuras 4.5 y 4.6 (Ver Apéndice A), por lo cual los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.5, donde se indica el número de iteraciones que realizó el solver hasta que el valor residual (RMS) mínimo de 1.0E-04 el cual fue anteriormente establecido como criterio de convergencia, fue alcanzado por todas las ecuaciones de masa y momento.

Tabla 4. 5 Valores residuales RMS de cada simulación

	3,2 (m/s)		3,8 (m/s)	
Curva	Nº Iteraciones	RMS	Nº Iteraciones	RMS
U-Mom	132	1.0E-04	103	1.0E-04
V-Mom	132	1.9E-05	103	2.9E-05
W-Mom	132	7.2E-05	103	7.2E-05
P-Mass	132	3.1E-06	103	4.1E-06
K-TurbKE	132	5.2E-05	103	3.7E-05
E-Diss.K	132	3.7E-06	103	6.3E-06
	3,6 (m/s)		4 (m/s)	
Curva	Nº Iteraciones	RMS	Nº Iteraciones	RMS
U-Mom	110	9.9E-05	93	9.9E-05
V-Mom	110	2.4E-05	93	3.4E-05
W-Mom	110	7.1E-0	93	8.6E-05
P-Mass	110	3.8E-06	93	4.6E-06
K-TurbKE	110	4.2E-05	93	3.8E-05
E-Diss.K	110	5.5E-06	93	9.4E-06

4.4. VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS POR LA ECUACIÓN DE BERNOULLI PARA CAMPOS CENTRÍFUGOS.

Para asegurar que los resultados obtenidos por medio de la simulación numérica tengan validación dentro de las leyes de la física, se aplica la ecuación de Bernoulli para campos centrífugos en cada simulación realizada.

Para aplicar ecuación de Bernoulli se utilizaran los datos obtenidos de una línea de flujo a partir de una gráfica de presión vs. trayectoria como se indica en la figura 4.7

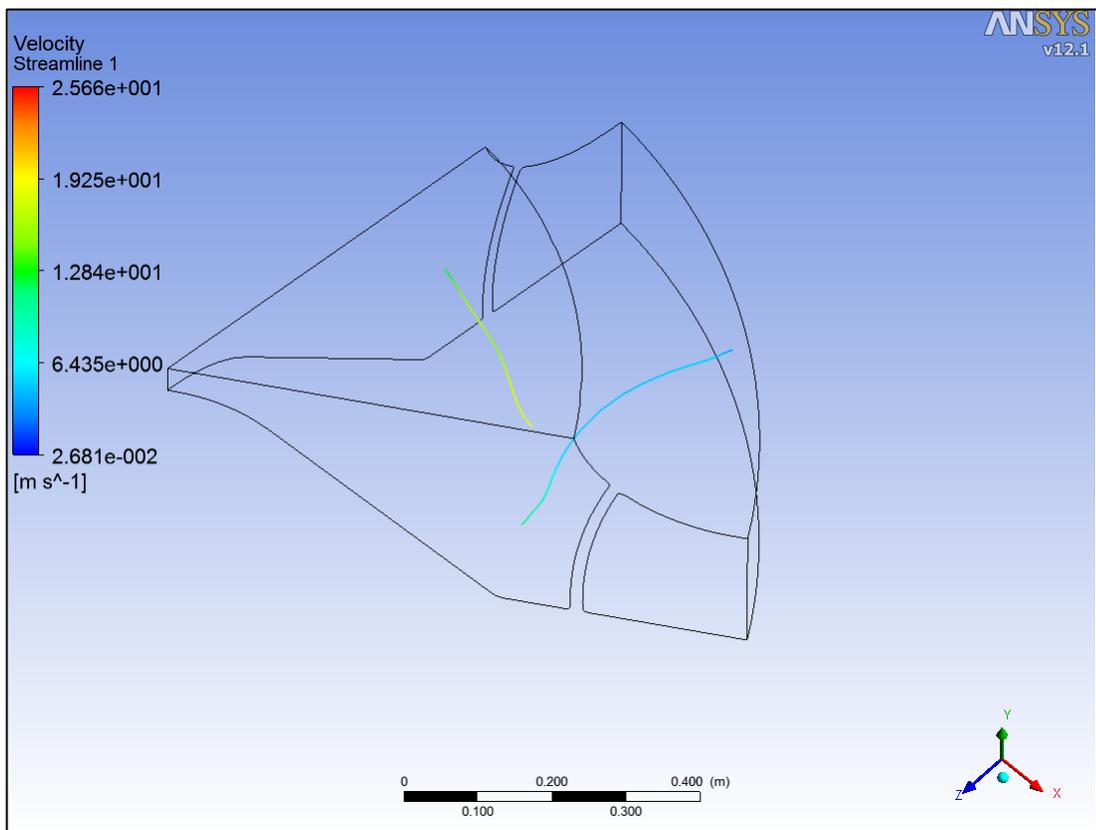


Fig. 4. 7 Visualización de la línea de flujo en el dominio

Las presiones correspondientes a la entrada y a la salida son obtenidas de una gráfica en la cual se muestra la presión sobre una línea de flujo que va desde la entrada del rotor hasta la salida del mismo, dicha grafica se muestra en la figura 4.8.

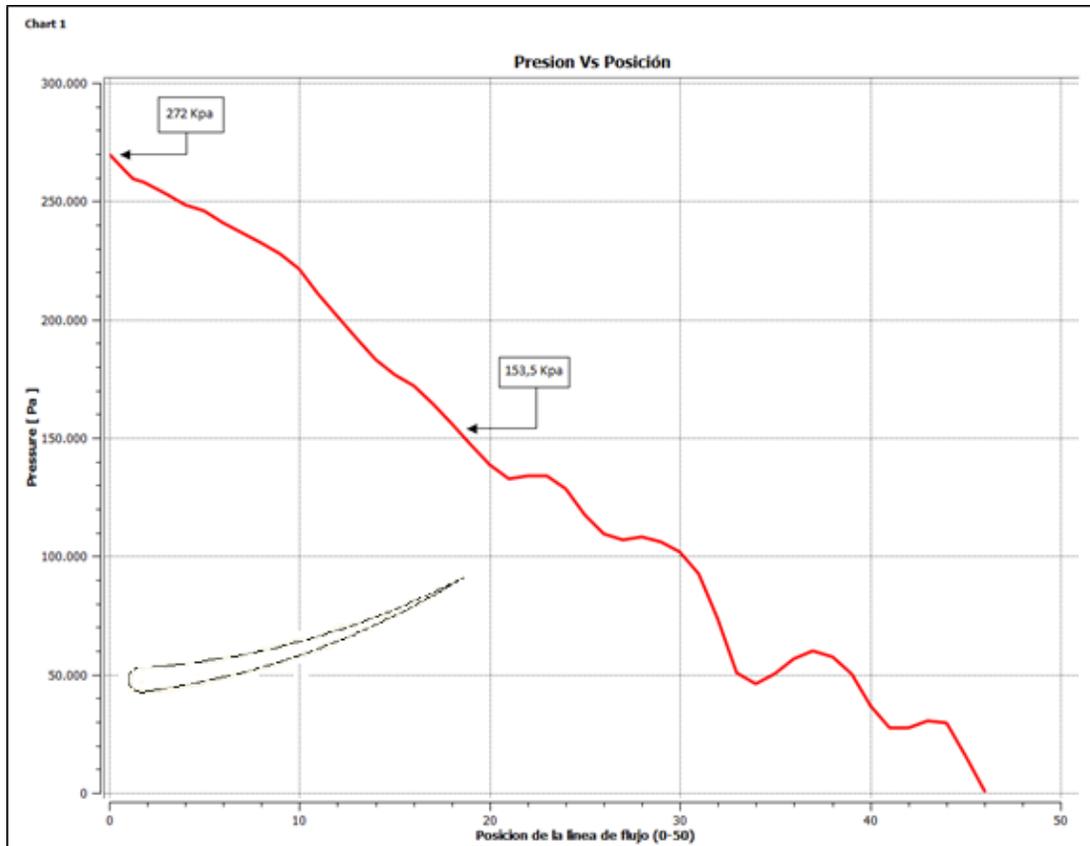


Fig. 4. 8 Grafica Presión Vs. Posición de la línea de flujo

La presión de 272 Kpa corresponde a la entrada de los álabes del impulsor y la de 153,5 Kpa corresponde a la salida de los alabes, las velocidades relativas fueron calculadas a través del programa y estas son mostradas en la tabla 4,5, partiendo de estos datos aplicaremos la ecuación de Bernoulli para campos centrífugos, cabe destacar que se considera el valor de la densidad del agua igual a $1000 \text{ Kg}/\text{m}^3$.

Capítulo IV Desarrollo de la Investigación

$$272Kpa + \frac{1000 \text{ Kg}/\text{m}^3 * (25,026 \text{ m/s})^2}{2} - \frac{1000 \text{ Kg}/\text{m}^3 * (28,276 \text{ m/s})^2}{2}$$

$$= 153,5Kpa + \frac{1000 \text{ Kg}/\text{m}^3 * (17,2 \text{ m/s})^2}{2} - \frac{1000 \text{ Kg}/\text{m}^3 * (15,4236 \text{ m/s})^2}{2}$$

Esto queda:

$$185362,81 \text{ Pa} \approx 182475,524 \text{ Pa}$$

De esta manera el porcentaje de error nos queda:

$$\frac{185362,81 - 182475,524}{185362,81} * 100 = 1,58\%$$

Con esta magnitud de error se pueden valorar los resultados como físicamente reales, aunque para asegurar la valides en todas las simulaciones se aplicó la ecuación 2.24 para cada una de estas dando como resultado los mostrados en la tabla 4.6.

Tabla 4. 6 Aplicación de la ecuación de Bernoulli

V1(m/s)	U1(m/s)	W1(m/s)	W2(m/s)	P1(Pa)	P2(Pa)	U2(m/s)	Entrada(Pa)	Salida(Pa)	% Error
3,00	28,2767	25,5612	15,25	212000	140000,0000	15,4236	138902,3415	137336,7737	1,14
3,20	28,2767	25,3825	16,20	234000	142000,0000	15,4236	156349,1643	154275,5237	1,34
3,60	28,2767	25,0259	17,20	272000	153500,0000	15,4236	185362,8099	182475,5237	1,58
3,80	28,2767	24,8481	17,50	285000	157000,0000	15,4236	193929,6326	191180,5237	1,44
4,00	28,2767	24,6707	18,00	300000	159500,0000	15,4236	204536,4554	202555,5237	0,98

4.5.VALIDACIÓN POR COMPORTAMIENTO DE CURVAS.

A continuación se muestra la comparación entre curvas obtenidas de manera experimental mediante el programa CFX y curvas teóricas extraídas de bibliografías. Las curvas a comparar no son similares en cuanto al rango de estudio, siendo las curvas experimentales las que poseen un rango de estudio menor, debido a que para realizar un estudio que abarque el rango de las curvas teóricas se necesita una mayor cantidad de tiempo computacional así como mayor tiempo en la investigación. A pesar de ello el estudio realizado será mediante la verificación de las tendencias de las curvas experimentales en el rango de estudio correspondiente.

4.5.1 COMPORTAMIENTO DE LA CURVA POTENCIA VS CAUDAL

En la figura 4.9 se presenta la curva donde se observa el comportamiento de la potencia (Kw) generada por la turbina a diferentes velocidades de entrada del fluido. La potencia fue calculada utilizando datos obtenidos directamente del programa los cuales se muestran en la tabla 4,7

Tabla 4. 7 Data para gráfico de potencia Vs. caudal

Ht (m)	Q (m ³ /s)	Pot (Kw)
23,4609643	3,77073	866,956627
25,3924125	4,022112	1000,88504
28,5623127	4,524876	1266,56105
30,0233265	4,776258	1405,3117
30,6020067	5,02764	1507,78756

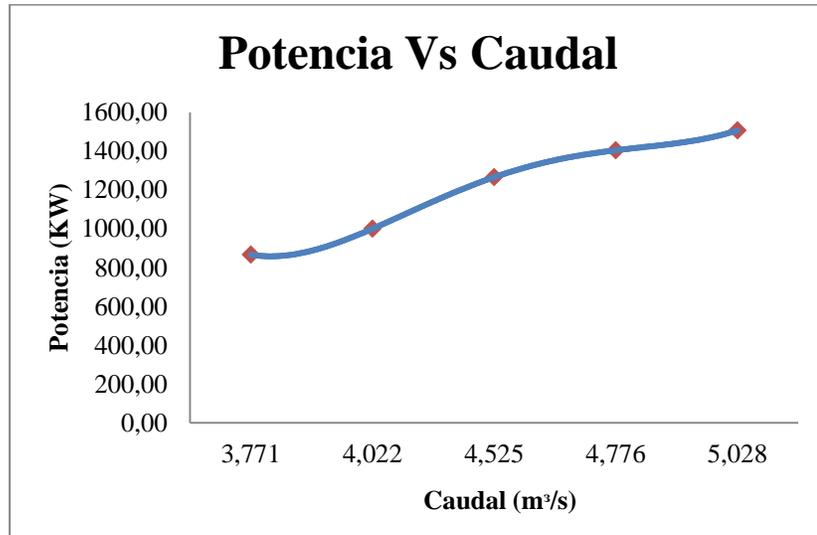


Fig. 4. 9 Potencia Vs. Caudal

A continuación en la figura 4.10 se muestra el comportamiento de la potencia generada por una turbina Francis de manera experimental y numérica, la cual fue estudiada anteriormente por Lain S. et al [8] en su trabajo titulado “CFD numerical simulations of francis turbines simulación numérica (CFD) de turbinas Francis” con la cual se validan los resultados obtenidos por medio de la comparación de la tendencia de dichas curvas.

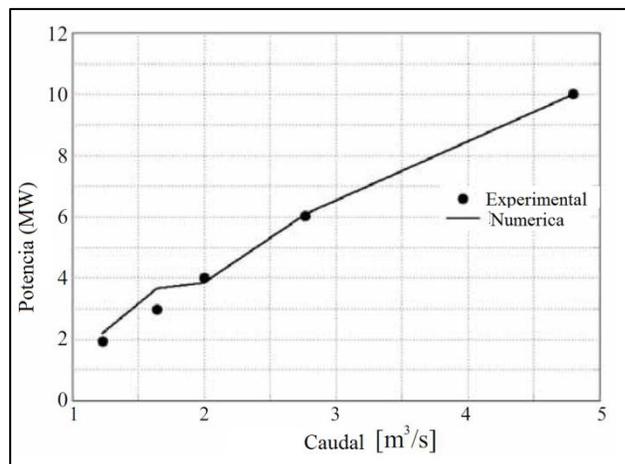


Fig. 4. 10 Potencia Vs Caudal Numérica y Experimental [8]

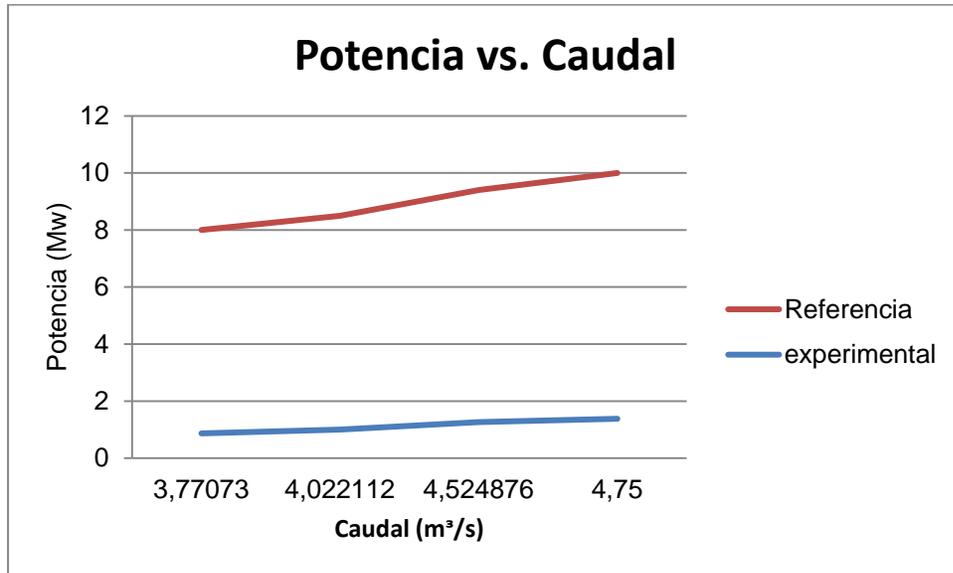


Fig. 4. 11 Comparación de curvas de potencia Vs Caudal

4.5.2 COMPORTAMIENTO DE LA CURVA FACTOR DE VELOCIDAD VS. COEFICIENTE DE CIRCULACIÓN.

En la figura 4.12 se muestra el comportamiento de los valores del factor de velocidad y coeficiente de circulación, para los cuales los valores fueron calculados a partir de data extraída del programa, tanto el factor de velocidad como coeficiente de circulación son valores adimensionales, y permite observar la circulación del fluido a través del rotor a medida que varía la velocidad del mismo.

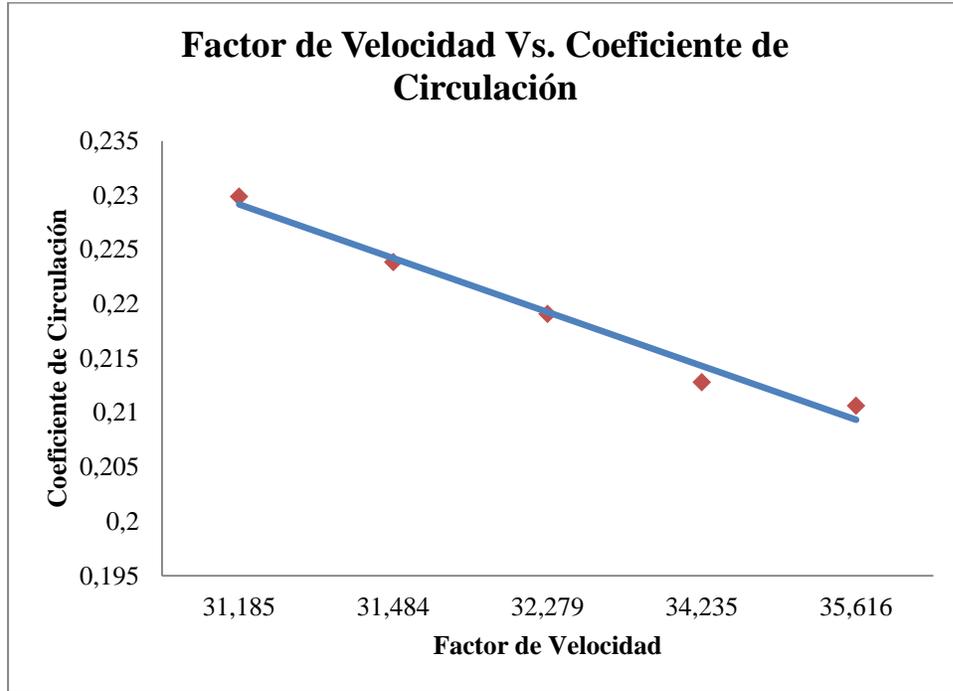


Fig. 4. 12 Factor de Velocidad Vs Coeficiente de Circulación

En la figura 4,13 extraído de “Effect Of Operating Regime On Hydrodynamic Parameters Of Mixed Flow Hydraulic Turbine” [7] trabajo realizado por Khare R. et al en el instituto nacional de tecnología de la India, se muestra igualmente la variación del coeficiente de circulación con respecto al factor de velocidad, la cual nos permite verificar una vez más la certeza de los resultados obtenidos en cada una de las simulaciones realizadas en la investigación, observando la similitud en las tendencias de dichas curvas.

Se puede notar que en la figura 4.12 el factor de velocidad varía entre 31,185 y 35,616 lo que solo representa una porción de la curva mostrada en la figura 4.13, esto debido a la alta demanda de recursos computacionales que cada una de las simulaciones exigía, de igual forma se muestra que con este pequeño intervalo se puede estimar la tendencia de la curva.

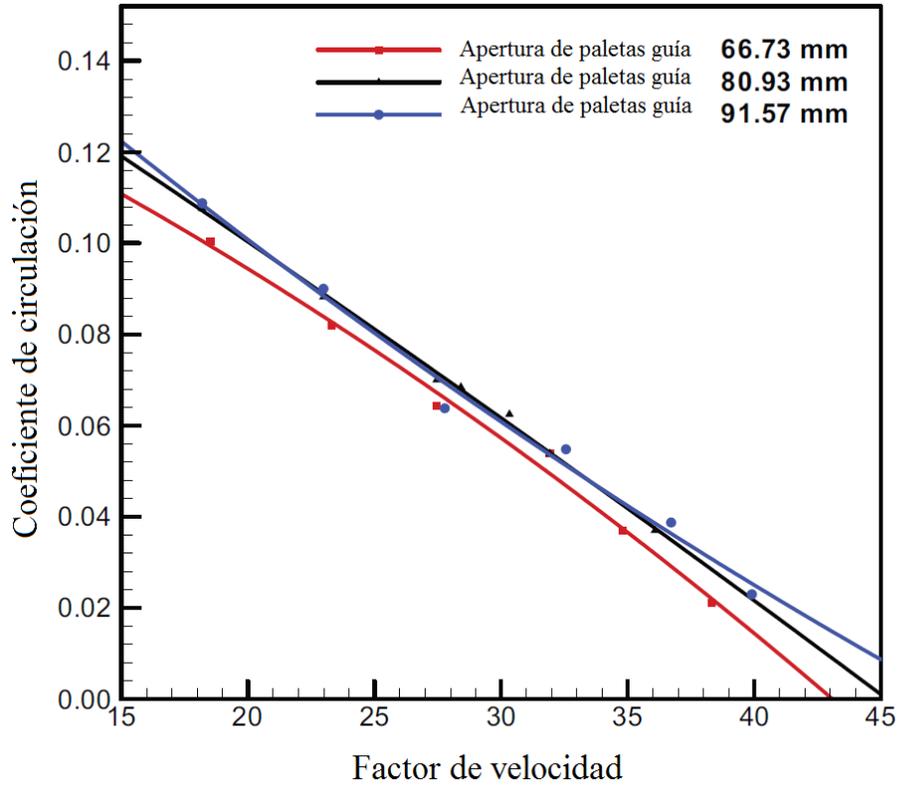


Fig. 4. 13 Representación de coeficiente de circulación Vs. Factor de velocidad

4.5.3 COMPORTAMIENTO DE LA CURVA COEFICIENTE DE ENERGÍA ESPECÍFICA VS FACTOR DE VELOCIDAD

En la figura 4,14 se muestra el comportamiento de los valores del factor de velocidad y coeficiente de energía específica, para los cuales, de igual manera que en el caso anterior los valores fueron calculados a partir de data extraída del programa, tanto el factor de velocidad como coeficiente de energía específica son valores adimensionales que permiten observar la los cambios de energía a través del rotor a medida que varía la velocidad del mismo.

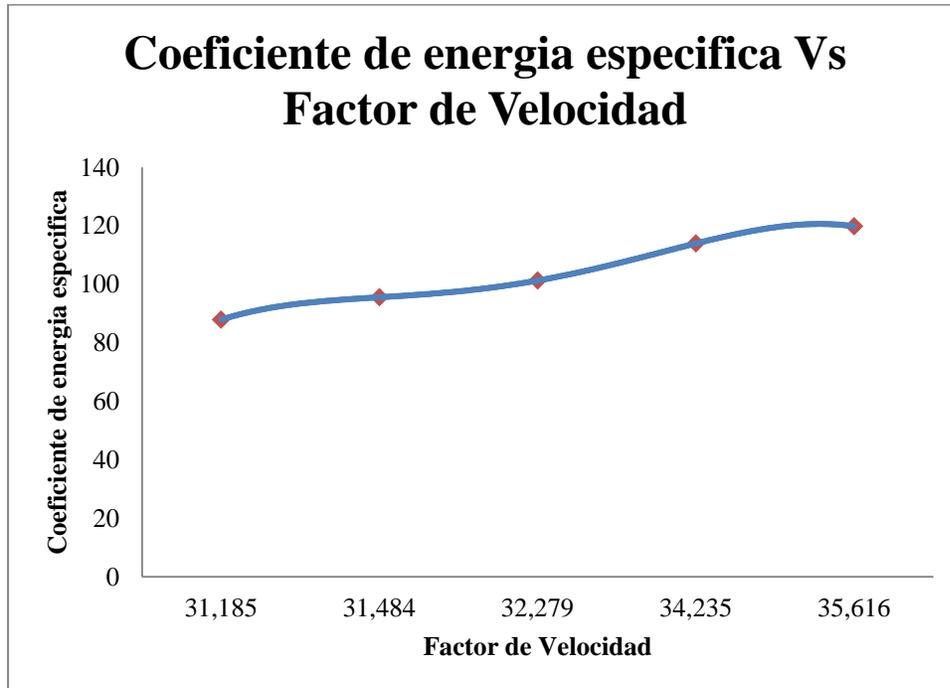


Fig. 4. 14 Coeficiente de energía específica Vs. Factor de Velocidad

En este caso se muestra la variación del coeficiente de energía específica con respecto al factor de velocidad, la cual nos permite verificar una vez más la certeza de los resultados obtenidos en cada una de las simulaciones realizadas en la investigación, observando la similitud en las tendencias de la curva mostrada en la figura 4.14. en comparación con la curva mostrada en la figura 4.15.

Al comparar los gráficos se observa que el comportamiento es similar al caso mencionado en el ítem 4.5.3 donde se explica que solo se trabaja con una porción, pero que de igual modo con esta zona se obtiene una buena aproximación de las curvas deseadas.

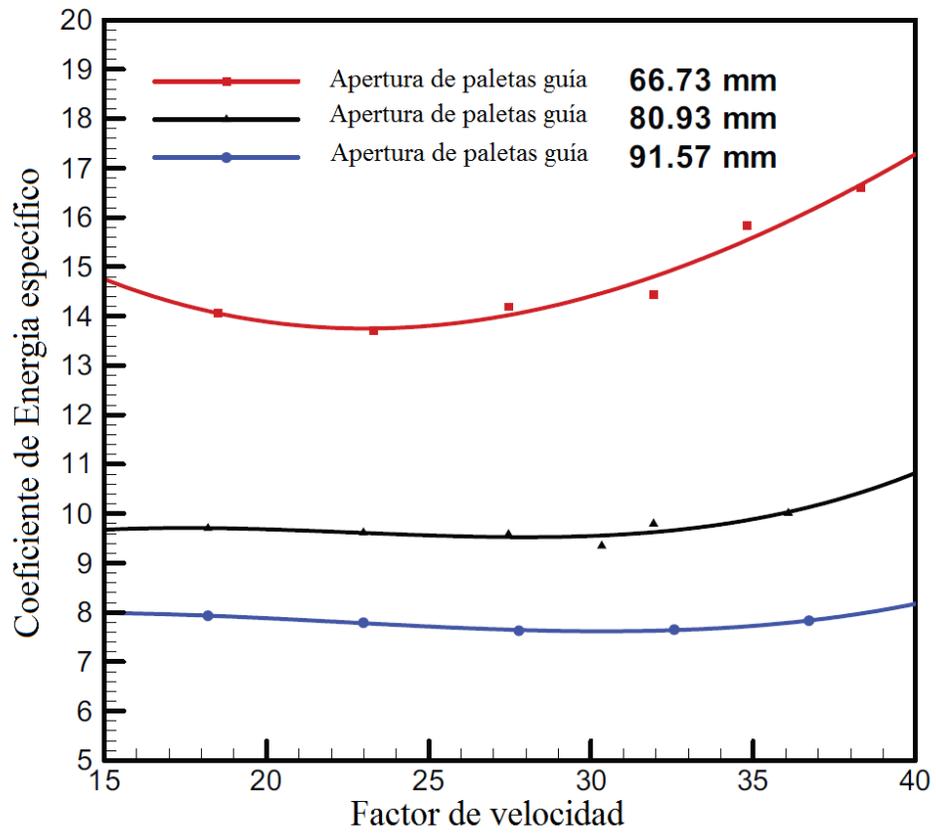


Fig. 4. 15 Representación del coeficiente de energía específico Vs. factor de velocidad

CAPÍTULO 5

Análisis de Resultados

5.1 GENERACIÓN DE DOMINIO

La geometría creada con la herramienta CAD cumple con los parámetros necesarios para que la creación del mallado en CFD, y lograr la convergencia de las ecuaciones de gobierno por medio del Solver.

De igual forma el mallado creado, cumple con los requisitos mínimos para que la resolución de las ecuaciones de gobierno en cada uno de los nodos sea bastante precisa (ver tabla 4.2). La relación entre la geometría y el mallado es un factor fundamental en los requerimiento computacionales necesarios para resolver las ecuaciones de gobierno por lo que se debe configurar de manera correcta las condiciones de mallado para así garantizar una simulación lo más cercana posible a la realidad y que no obvie los fenómenos físicos presentes en los espacios más críticos del mallado.

5.2 SELECCIÓN DEL MODELO DE TURBULENCIA

En la selección del modelo de turbulencia se realizaron dos simulaciones en igualdad de condiciones de borde, solo utilizando diferentes modelos de turbulencias; una de las simulaciones se realizó con el modelo Kappa-Épsilon (κ - ϵ) y la otra con el modelo Kappa-Omega (κ - ω). Al obtener los resultados de dichas simulaciones se comprueba el cumplimiento de las leyes de conservación entre la entrada y la salida del rotor (Ver tabla 5.1), obteniéndose errores muy bajos para ambos métodos por lo cual se procedió a observar las gráficas de imbalance, en la que se observó que el modelo Kappa-Omega (κ - ω) alcanza el error menor a 0.5% en menor numero de iteraciones que el modelo Kappa-Épsilon (κ - ϵ). A pesar de esto se selecciona el modelo Kappa-Épsilon (κ - ϵ) ya que en el tiempo total computacional fue menor al otro modelo, ya que cada iteración era resuelta más rápido por el solver.

Tabla 5. 1 Errores en modelos de turbulencia

Modelo	Velocidad de entrada (m/s)	Error (%)
k- ϵ	3.6	0,002011571
k- ϵ	3.8	0,03824669
k- ω	3.6	0,013615209
k- ω	3.8	0,038686137

5.3 CONVERGENCIA DE LA SIMULACIÓN NUMÉRICA

El criterio de convergencia siempre se cumplió en cada una de las simulaciones. En el imbalance siempre el error estuvo por debajo de 0.5%, lo cual garantiza la conservación de las ecuaciones de masa y momento tanto en la entrada como en la salida del rotor.

En cuanto al criterio de Valor residual (RMS) todas las ecuaciones siempre llegaron al valor preestablecido como criterio de convergencia (1E-04), observado que, con la velocidad de entrada 4 m/s se obtuvo una menor cantidad de iteraciones para alcanzar dicho valor en cada una de las ecuaciones, esto debido a que este valor de velocidad corresponde a un valor de caudal muy cercano al nominal de la turbina mostrado en la tabla 4.1. La convergencia de cada una de las simulaciones se muestra en el apéndice A.

5.4 VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS POR LA ECUACIÓN DE BERNOULLI PARA CAMPOS CENTRÍFUGOS.

Se aplicó la ecuación de Bernoulli para campos centrífugos para cada una de las velocidades de entradas estudiadas (3; 3.2; 3.6; 3.8 y 4 m/s), verificando la conservación de energía entre la entrada y salida de los alabes del rotor arrojando siempre un error menor al 1.6% lo cual es un error aceptable dentro de los estudios de ingeniería (ver tabla 5.2).

Los valores de presión utilizados en la aplicación de la ecuación de Bernoulli para campos centrífugos fueron obtenidos de la figura 4.8 el cual representa la presión del agua vs la posición dentro del rotor, el resto de los valores fueron extraídos directamente del programa Ansys CFX.

Tabla 5. 2 Error de conservación de la energía en el rotor

V1(m/s)	Entrada(Pa)	Salida(Pa)	% Error
3,00	138902,3415	137336,7737	1,14
3,20	156349,1643	154275,5237	1,34
3,60	185362,8099	182475,5237	1,58
3,80	193929,6326	191180,5237	1,44
4,00	204536,4554	202555,5237	0,98

5.5 VALIDACIÓN POR COMPORTAMIENTO DE CURVAS.

Se verifico mediante representaciones gráficas, la tendencia de curvas obtenidas a partir de datos extraídos directamente de Ansys CFX.

La curva de potencia vs caudal presento una tendencia similar a una turbina estudiada experimentalmente y numéricamente, mostrando una mayor potencia a mayor caudal, y validando los datos obtenidos en la investigación.

La tendencia del gráfico de factor de velocidad vs coeficiente de circulación de igual manera es similar a la tendencia de la turbina estudiada en [8], aunque siendo los resultados obtenidos en esta investigación, un rango de caudales mucho menor debido a poco tiempo computacional disponible para realizar la misma, por lo tanto se compara la tendencia solo en los valores de caudal donde ambos estudios coinciden.

En la figura 5.1 se muestra la superposición de las curvas mostradas anteriormente (figura 4.12 y 4.13), tomando en cuenta que para efectos de la comparación solo se utilizó la curva numérica con un valor de apertura de los álabes guías de 91,57 mm, obtenida del trabajo realizado por Khare R. et al [7] donde se puede observar y comparar de mejor manera la tendencia de ambas curvas, tomando en cuenta que existe una diferencia notable en los valores de coeficiente de circulación entre ellas, esto debido a diferencia entre las geometría y condiciones de trabajo de ambas turbinas.

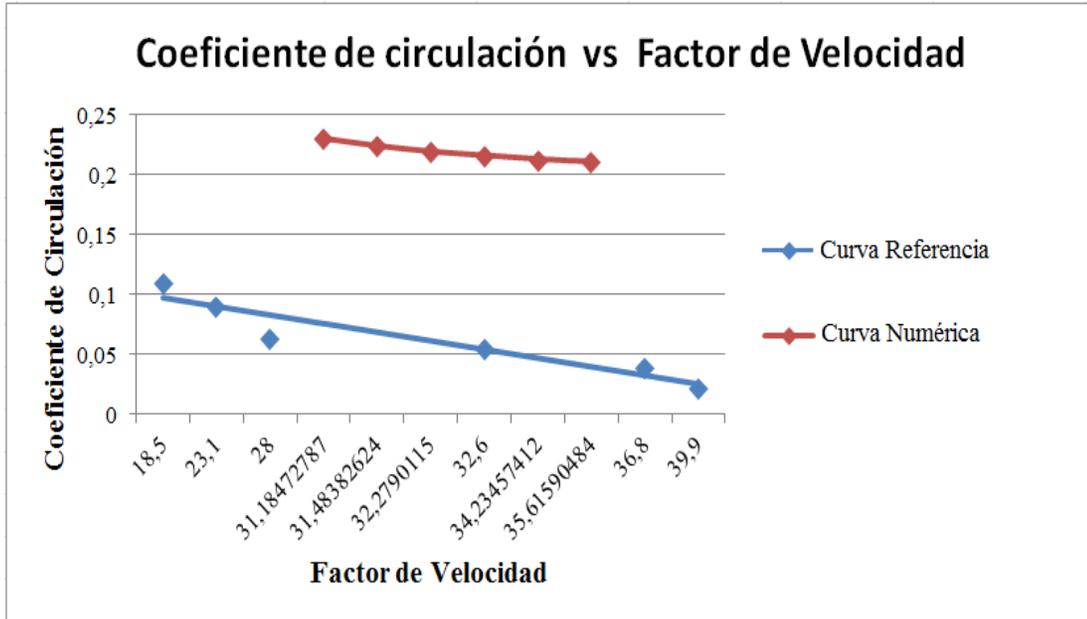


Fig. 5.1 Comparación de curva numérica y de referencia

De igual forma sucede en el gráfico de coeficiente de energía específica vs factor de velocidad, a pesar de que el rango de estudio en nuestra investigación es menor, con respecto a la curva con la cual fue comparada, se verifica la tendencia de la curva en el rango común entre ambos.

En la figura 5.2 se muestra la superposición de las curvas mostradas anteriormente (figura 4.14 y 4.15), tomando en cuenta que para efectos de la comparación solo se utilizó la curva numérica con un valor de apertura de los álabes guías de 91,57 mm, obtenida del trabajo realizado por Khare R. et al [7] donde se puede comparar la tendencia de ambas curvas, tomando en cuenta que existe una diferencia notable en los valores de coeficiente de energía específica entre ellas, esto debido a diferencia entre las geometría y condiciones de trabajo de ambas turbinas.

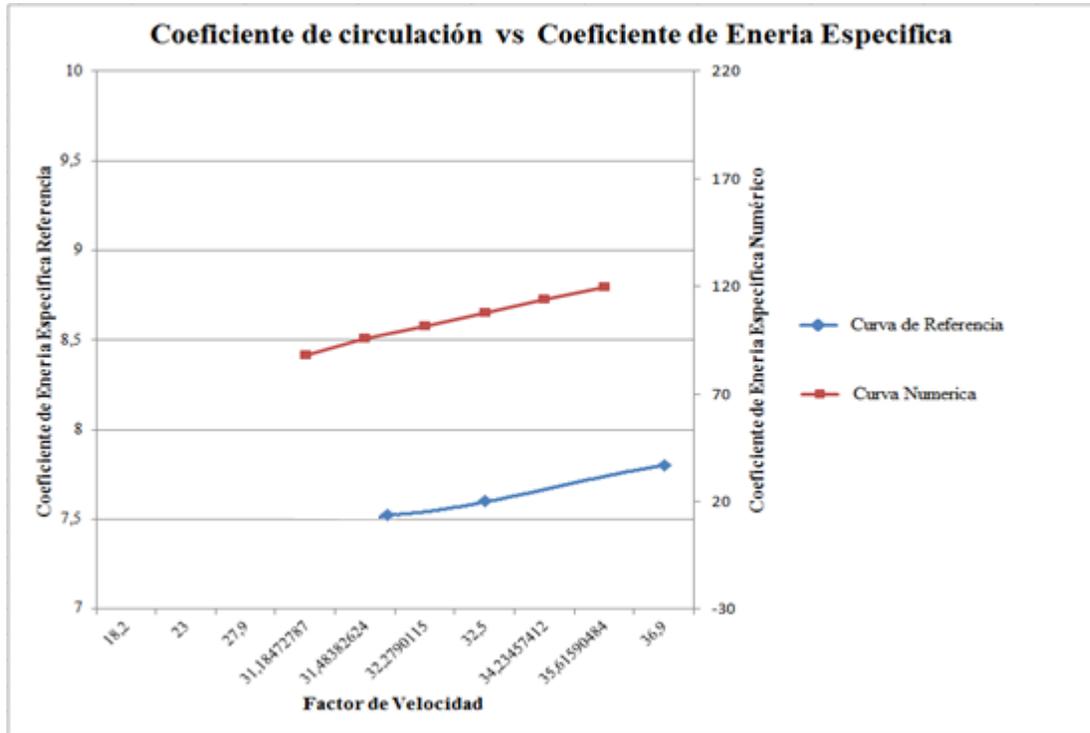


Fig. 5. 2 Comparación de curva numérica y de referencia (b)

CAPÍTULO 6

Conclusiones y recomendaciones

6.1 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se realizó la simulación numérica del campo de flujo incompresible a través del rotor de una turbina hidráulica tipo francis utilizando el software de simulación CFD ANSYS® 12.1 el cual utiliza técnicas de aproximación numéricas para resolver las ecuaciones de gobierno como lo son la conservación de la masa, ecuación del momentum, ecuación de la energía y el modelo de turbulencia $k-\epsilon$, partiendo de una discretización espacial del dominio, la selección adecuada de las condiciones de borde (presión y velocidad) y flujo másico a la salida.

El mallado seleccionado resultó ser el más idóneo, puesto que según los factores de refinado y calidad estructural que calcula el software, se encontraron el rango permisible, garantizando así la convergencia de las cantidades evaluadas al resolver el sistemas discreto de ecuaciones diferenciales que definen el dominio numérico del campo de flujo estudiado.

El tiempo de convergencia y el número de iteraciones para lograr tal condición demuestran que tanto el diseño CAD como el desarrollo y solución numérica son compatibles y no se están generando “loop” o ciclos de iteraciones en vacío, producto de inestabilidades numéricas y/o errores en la selección del modelo matemático.

Las curvas generadas de presión contra la posición a lo largo de una línea de corriente, muestran una tendencia decreciente a medida que aumenta el flujo volumétrico avanza a través del rotor, lo que era de esperarse, pues en una turbomáquina motora, específicamente en una turbina hidráulica, el fluido transfiere energía a la máquina, de su forma elástica o de presión a su forma de energía cinética de rotación, necesaria para impulsar del generador eléctrico.

Una de las pruebas físicas más significativas es el comportamiento del flujo según la ecuación de Bernoulli para campos centrífugos, y según la data obtenida y la posterior utilización de la ecuación de Bernoulli, resultó en un cumplimiento

satisfactorio, ya que el error obtenido es pequeño nunca sobrepasando el 2%, lo que significa que no se ha violado ningún concepto físico de interés.

El análisis numérico de la turbina Francis arrojó resultados satisfactorios en cuanto al comportamiento macro del flujo, es decir se observó una acertada tendencia en las curvas base que generan los coeficientes adimensionales del factor de velocidad, coeficiente de circulación y coeficiente de energía específica. De la misma manera se encontró una curva de la potencia útil contra el caudal similar a la proporcionada por el antecedente numérico.

6.2 RECOMENDACIONES

El campo de la dinámica de fluidos computacional es fascinante y las aplicaciones infinitas, solo limitadas por la imaginación humana, es por ello que el presente trabajo es sólo el comienzo de una serie de investigaciones relacionadas al flujo a través de turbomáquinas en las que se pueden estudiar fenómenos más complejos que pueden afinar el diseño de las misma y por ende generar una familia de turbinas con mayor eficiencia, una mayor control de la variables y la disminución de pérdidas de energía.

Es necesario realizar un estudio numérico donde se incluya al caracol, tubo de aspiración de la turbina e incluso el ángulo de entrada del flujo a los álabes, ya que por lo general son variables dependiendo del caudal que preste la instalación y de la potencia que se desee transmitir al generador eléctrico.

Otro factor de vital interés es estudiar la recirculación, espesor de capa límite e inestabilidades hidrodinámicas en el campo de flujo, que son la principal fuente de pérdidas de energía.

Ampliar este trabajo para un mayor rango de velocidades, también representaría un buen aporte al mismo, pues de esa manera se podría obtener una mejor data para la comparación con curvas existentes y ampliar la robustez del modelo numérico, siempre con la finalidad de crear mayor confianza en las técnicas de simulación mediante el uso de herramientas computacionales para el estudio de la dinámica de fluidos computacional.

Referencias Bibliográficas

- [1] Y. Cengel y J. Cimbala. (2006). Mecánica de Fluidos. (1^{ra} Edición). Editorial Mc. Graw-Hill.
- [2] A. Pérez y C. Garre. (2001). Dinámica de Fluidos Computacional para Gráficos. Madrid, España.
- [3] ANSYS CFX. (2009). ANSYS CFX-SolverTheory Guide. Release 12.0. ANSYS, Inc.
- [4] C. Mataix. (2004). Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas. (2^{da} edición). Alfaomega Oxford UniversityPress México S.A. de C.V.
- [5] P. Fernández. Turbomáquinas Hidráulicas. [On-Line]. Disponible en: <http://libros.redsauce.net/>
- [6] P. Fernández. Turbinas Francis. [On-Line]. Disponible en: <http://libros.redsauce.net/>
- [7] Ms Ruchi K. y otros (2010) . Effect of operating regime on hydrodynamic parameters of mixed flow hydraulic turbine. Chennai, India. December 16-18.
- [8] Santiago L. y otros (2010). CFD Numerical simulations of Francis turbines simulación numérica (CFD) de turbinas Francis. rev. fac. ing. univ. antioquia n°51 pp. 24-33
- [9] Maruzewski P. y otros. (2010). Turbulence modeling for Francis Turbine water passages simulation. 25th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems.

APENDICES

APENDICE A

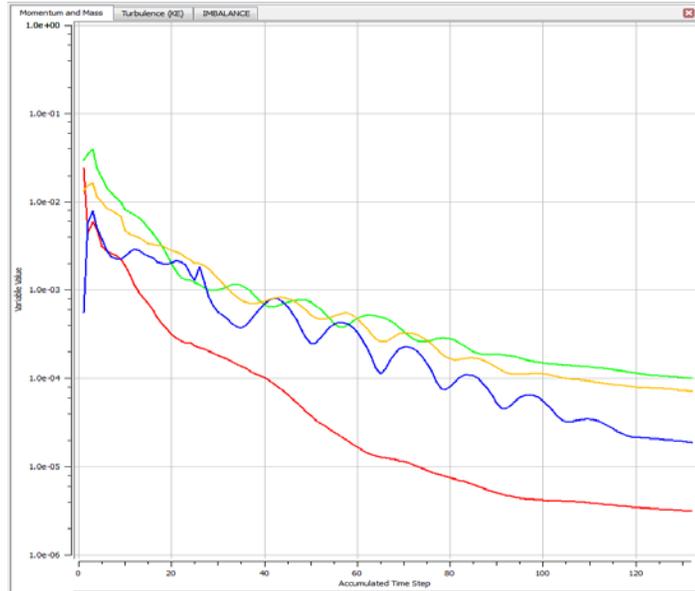


Fig. A. 1 Convergencia de las ecuaciones de masa y momento para Ventrada=3,2 (m/s)

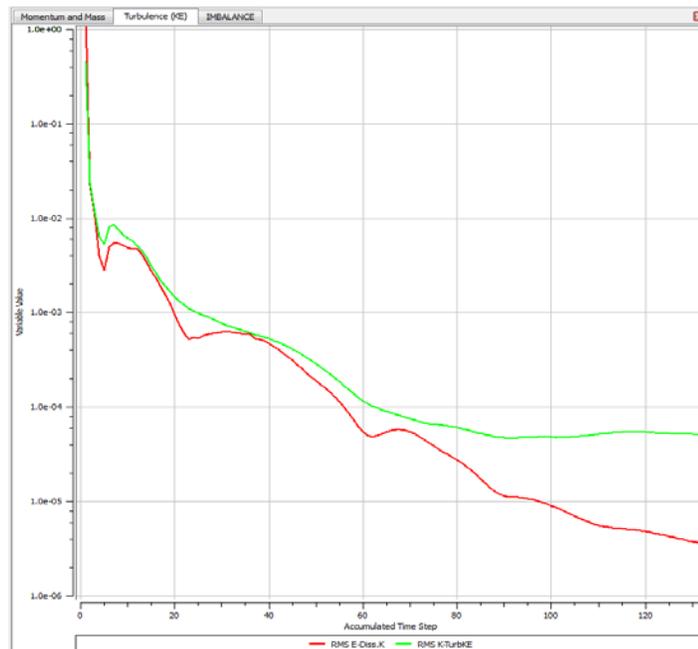


Fig. A. 2 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para Ventrada=3,2 (m/s)

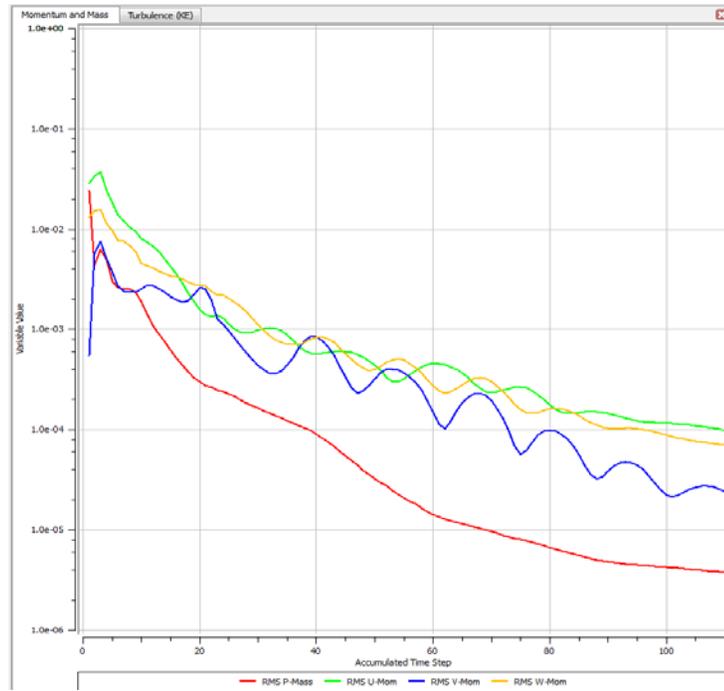


Fig. A. 3 Convergencia de las ecuaciones de masa y momento para Ventrada=3,6 (m/s)

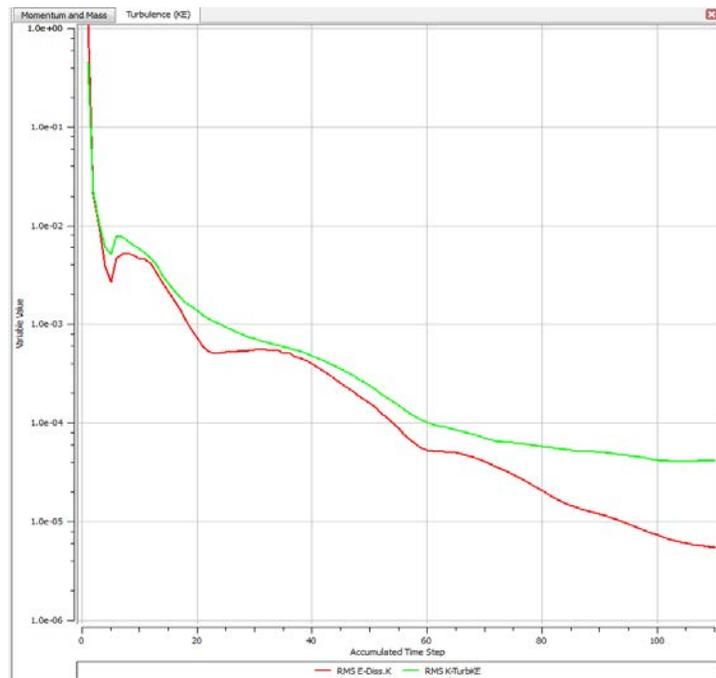


Fig. A. 4 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para Ventrada=3,6 (m/s)

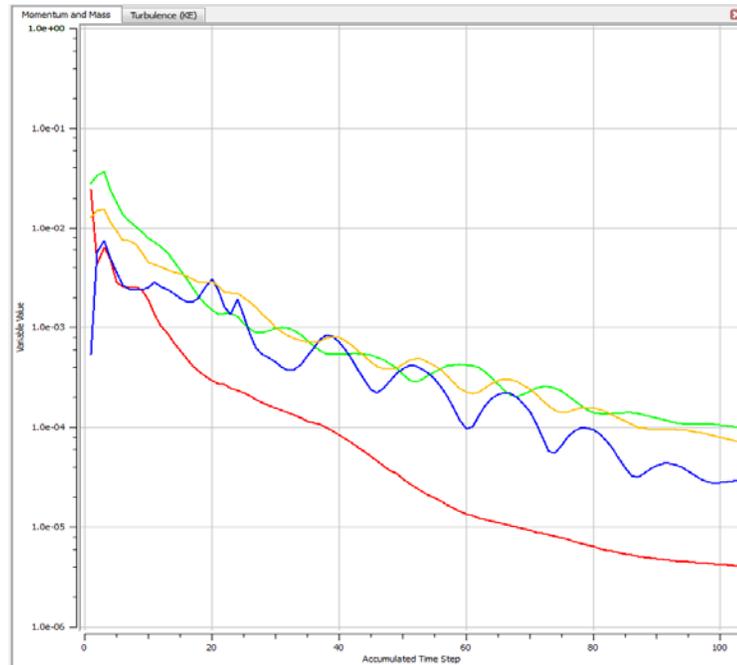


Fig. A. 5 Convergencia de las ecuaciones de masa y momento para Ventrada=3,8 (m/s)

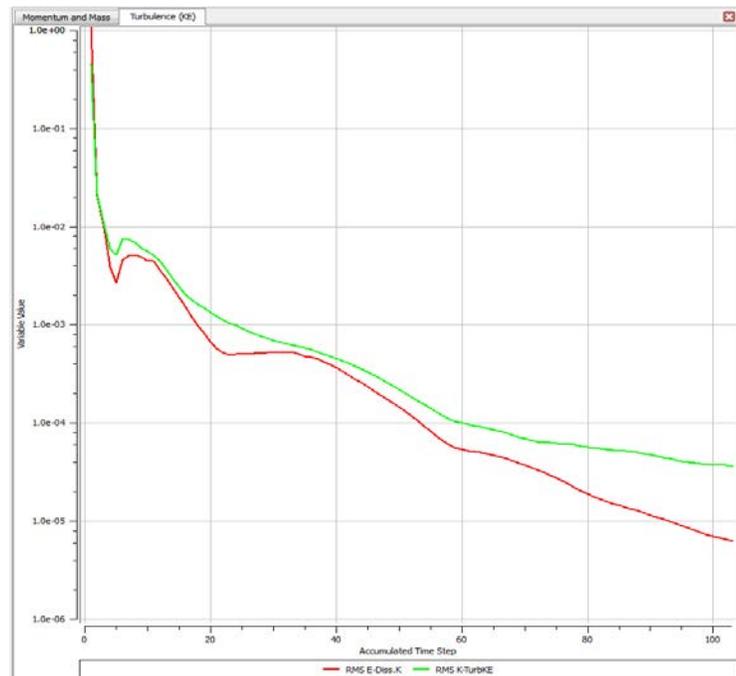


Fig. A. 6 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para Ventrada=3,8 (m/s)

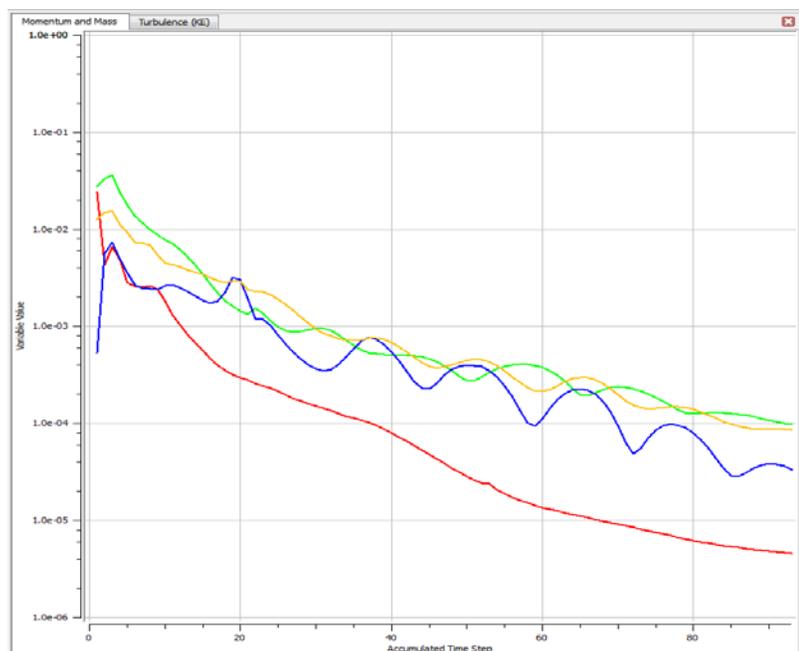


Fig. A. 7 Convergencia de las ecuaciones de masa y momento para Ventrada=4 (m/s)

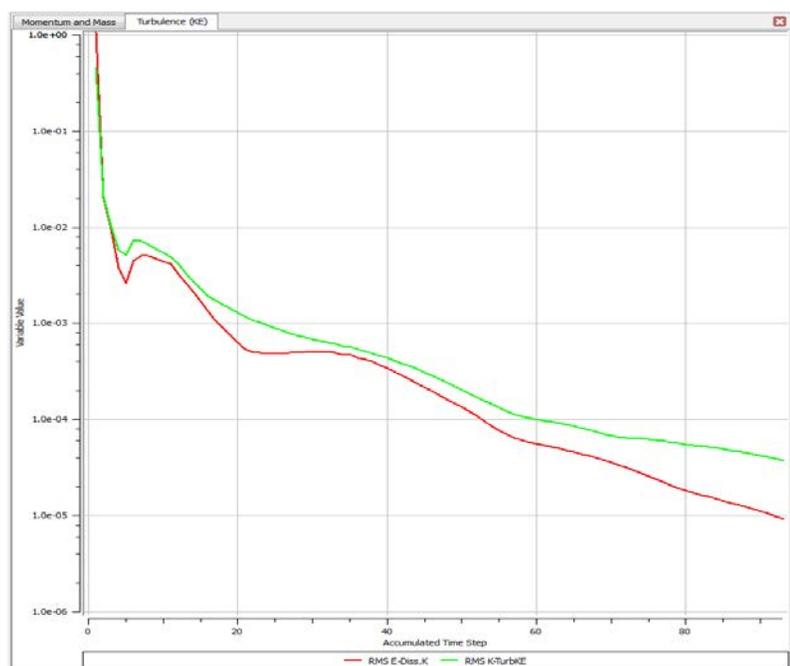


Fig. A. 8 Convergencia de las ecuaciones de turbulencia para Ventrada=4 (m/s)

APÉNDICE B

Ecuación de la energía cinética turbulenta (Kappa)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_x k}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y k}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_z k}{\partial z} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right] \\ + \mu_t \Phi - C_\mu \rho k \omega + \frac{C_4 \beta \mu_t}{\sigma_k} \left[g_x \frac{\partial T}{\partial x} + g_y \frac{\partial T}{\partial y} + g_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

Ecuación de la rata de disipación específica (Omega)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_x \omega}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y \omega}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_z \omega}{\partial z} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \\ + \mu_t \Phi - \beta \rho \omega^2 + \frac{(1 - C_3) \beta \rho}{\sigma_t} \left[g_x \frac{\partial T}{\partial x} + g_y \frac{\partial T}{\partial y} + g_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

Relación entre Kappa (K) y Epsilon (ε)

$$\mu_t = C_\mu \rho \alpha \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Donde:

C_μ : Constante de turbulencia

K: energía cinética turbulenta

ε : Rata de disipación de energía cinética turbulenta