Análisis de Señales y Sistemas Lineales

Apuntes de clase. Tema III. Métodos de Fourier

Ing. A. Osman

Universidad de Carabobo
Facultad de Ingeniería
Escuela de Telecomunicaciones
Departamento de Señales y Sistemas
aosman@uc.edu.ve

29 de noviembre de 2018

Índice

Índice

Índice

Respuesta de Sistemas LTI a señales periódicas

Las funciones exponenciales complejas se comportan como funciones propias para cualquier Sistema LTI.

$$x(t) = e^{st} \rightarrow \boxed{\quad h(t) \quad} \rightarrow y(t)$$

donde:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = [\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau]e^{st} = H(S)e^{st}$$

La serie de Fourier en tiempo continuo

La representación de una señal periódica de la forma:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_o t} \tag{1}$$

se conoce como la representación en *serie de Fourier*. Los a_k se les conoce como *coeficientes espectrales* y se calculan realizando la proyección ortogonal de la señal x(t) sobre cada uno de los vectores de la base ortogonal $\phi_k(t) = e^{jk\omega_o t}$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$. Esto es:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_o t} dt \tag{2}$$

Asignaciones

- Programe y dibuje en Octave los coeficientes espectrales de una señal pulso rectangular periódica centrada en el origen. Además dibuje la suma de 10 términos de la serie.

Índice

Convergencia de la serie de Fourier y el fenómeno de Gibbs

Condiciones de convergencia de Dirichlet:

- $x(t)$ debe ser absolutamente integrable en cualquier intervalo finito de tiempo.
- El número de máximos y mínimos de $x(t)$ debe ser finito en cualquier intevalo finito de tiempo.
- El número de discontinuidades de $x(t)$ debe ser finito en cualquier intervalo finito de tiempo.
- La señales en la vida real satisfacen las condiciones anteriores pero generan el fenómeno de Gibbs.
- La integral de una señal periódica con valor medio distinto de cero no es periódica, además, la señal resultante diverge.

Índice

Propiedades de la serie de Fourier en tiempo continuo

- $x(t-t_0) \longleftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$
- $x(t)e^{jm\omega_0 t} \longleftrightarrow a_{k-m}$
- $x(-t) \longleftrightarrow a_{-k}$
- $x^*(t) \longleftrightarrow a^*_{-k}$
- $x(at) \longleftrightarrow a_k$
- $\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \longleftrightarrow Ta_k b_k$
- $x(t)y(t) \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$
- $\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow jk\omega_o a_k$
- $\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \longleftrightarrow \frac{a_k}{jk\omega_o}$
- si $x(t)$ es real $\longleftrightarrow a_k = a^*_{-k}$
- $E_v\{x(t)\} + O_d\{x(t)\} \longleftrightarrow Re\{a_k\} + Im\{a_k\}$

Índice

Respuesta de Sistemas LTI a señales Periódicas Discretas

Las funciones exponenciales complejas se comportan como funciones propias de cualquier Sistema LTI.

$$x[n] = z^n \rightarrow \boxed{\quad h[n] \quad} \rightarrow y[n]$$

donde:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} = H[z] z^n$$

La serie de Fourier en tiempo discreto

La representación de una señal periódica de la forma:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_o n} \tag{3}$$

se conoce como *serie discreta de Fourier*. Los a_k se les conoce como *coeficientes espectrales* y se calculan realizando la proyección ortogonal de la señal $x[n]$ sobre cada uno de los **N** vectores de la base ortonormal $\phi_k[n] = e^{jk\omega_o n}$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Esto es:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_o n} \tag{4}$$

Observaciones

- si k fluctúa de 1 a N entonces:

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + a_2\phi_2[n] + a_3\phi_3[n] + ... + a_N\phi_N[n]$$

- si k fluctúa de 0 a $N-1$ entonces:

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + a_2\phi_2[n] + ... + a_{N-1}\phi_{N-1}[n]$$

- Los coeficientes espectrales son periódicos, es decir: $a_k = a_{k+N}$

Asignacin

- Programe y dibuje en Octave los coeficientes espectrales de una señal discreta pulso rectangular periódica centrada en el origen. Además dibuje la suma de los N primeros términos de la serie.

Índice

Propiedades de la serie de Fourier en tiempo discreto

- $x[n-n_0] \longleftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$
- $x[n]e^{jm\omega_0 n} \longleftrightarrow a_{k-m}$
- $x^*[n] \longleftrightarrow a^*_{-k}$
- $x(\frac{n}{m}) \longleftrightarrow \frac{1}{m}a_k$
- $\sum_{r=<N>} x[r]y[n-r] \longleftrightarrow Na_k b_k$
- $x[n]y[n] \longleftrightarrow \sum_{l=<N>} a_l b_{k-l}$
- $x[n]-x[n-1] \longleftrightarrow (1-e^{-jk\omega_o})a_k$
- $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow \frac{a_k}{(1-e^{-jk\omega_o})}$
- si $x[n]$ es real $\longleftrightarrow a_k = a^*_{-k}$
- $E_v\{x[n]\} + O_d\{x[n]\} \longleftrightarrow Re\{a_k\} + Im\{a_k\}$

Índice

Índice

Génesis de la CTFT

La CTFT se genera de la necesidad trazar la envolvente de los coeficientes espectrales de una señal periódica. Supongamos una señal $\tilde{x}(t)$ pulso rectangular de ancho $2T_1$ con simetría par y período T. Si se hace tender el período a infinito entonces ω_o tenderá a cero, luego la señal $\tilde{x}(t)$ va a tender a un pulso rectangular aperiódico de ancho $2T_1$ con simetría par y los coeficientes espectrales se irán acercando entre si. [1]
Esto es:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -T_1 < t < T_1, \\ 0 & \text{si } T_1 < |t| < \frac{T}{2}. \end{cases} \longleftrightarrow a_k = \frac{2sin(k\omega_o T_1)}{k\omega_o T} = \frac{sin(k\omega_o T_1)}{k\pi}$$

Para $k \neq 0$. Escribiendo $Ta_k = \frac{2sin(k\omega_o T_1)}{k\omega_o}$ y definiendo la envolvente como $(Ta_k)^* = \frac{2sin(\omega T_1)}{\omega}$, cuando $\omega_o \to 0$, entonces $Ta_k \to (Ta_k)^*$.

Definición del par CTFT:

La evolvente se define como la conversión a continuo de la expresión Ta_k. Para cualquier señal la envolvente sería:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad (5)$$

Sustituyendo los coeficientes espectrales en la serie de Fourier y haciendo $\omega_o \rightarrow 0$ se obtiene:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (6)$$

Condiciones de Existencia de la CTFT y Métodos de Cálculo.

Tendrán CTFT aquellas señales continuas que sean absolutamente integrables o que tengan un número finito de discontinuidades.

$$\text{Estrategias de cálculo de la CTFT} = \begin{cases} \text{Definición.} \\ \text{Propiedades.} \\ \text{Transformadas Notables.} \end{cases}$$

Índice

Porpiedades significativas.

- $ax(t) + by(t) \longleftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$
- $x^*(t) \longleftrightarrow X^*(j\omega)$
- $x(-t) \longleftrightarrow X(-j\omega)$
- $x(t)y(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * Y(j\omega)]$
- $x(t - t_o) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_o} X(j\omega)$
- $x(t) * y(t) \longleftrightarrow [X(j\omega)Y(j\omega)]$
- $x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a})$
- $\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow j\omega X(j\omega)$
- $\int_{-\infty}^{t} x(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
- $tx(t) \longleftrightarrow j\frac{d}{d\omega} X(j\omega)$
- si $x(t)$ es real $\longleftrightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega)$
- si $x(t)$ es real $E_v\{x(t)\} + O_d\{x(t)\} \longleftrightarrow Re\{X(j\omega)\} + jIm\{X(j\omega)\}$

Índice

CTFT de una señal periódica

Partiendo de:

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_o)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_o)e^{j\omega t}d\omega$$

entonces:

$$x(t) = e^{j\omega_o t}$$

Luego:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_o t} \longleftrightarrow X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_o)$$

Índice

CTFT Notables

- $x(t) = \frac{sin(Wt)}{\pi t} \longleftrightarrow X(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq W, \\ 0 & \text{si } |\omega| > W. \end{cases}$
- $x(t) = e^{-at}\mu(t), a > 0 \longleftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$
- $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < T_1, \\ 0 & \text{si } |t| > T_1. \end{cases} \longleftrightarrow X(j\omega) = \frac{2sin(\omega T_1)}{\omega}$
- $x(t) = \delta(t - t_o) \longleftrightarrow X(j\omega) = e^{-j\omega t_o}$
- $x(t) = \mu(t) \longleftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

Índice

La función $Sinc(\theta)$ y $Sa(\theta)$

La función $Sa(\theta)$ se define como:$Sa(\theta) = \frac{sin(\theta)}{\theta}$ para cualquier valor de θ distinto de cero. Para $\theta = 0$ la función vale 1, con eje de las absisas en radianes.[1]

La función $Sinc(\theta)$ es la misma $Sa(\theta)$ pero normalizada. Es decir, el eje de las absisas está en función de números naturales. Adems, para cualquier valor de θ distinto de cero. Para $\theta = 0$ la función vale la unidad.:

$$Sinc(\theta) = \frac{sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$$

[1]Para calcular la transformada de una $Sa(t)$, primero se debe normalizar, es decir, llevar a una expresión en función de $Sinc(t)$ y luego buscar el pulso rectangular asociado.

La función $Sinc(\theta)$ y $Sa(\theta)$

- Conversion 1:

$$\frac{2sin(\omega T_1)}{\omega} = \frac{2T_1}{T_1}\frac{sin(\omega T_1)}{\omega} = \frac{2T_1 sin(\omega T_1)}{\omega T_1} =$$

$$= \frac{2T_1 sin(\frac{\pi\omega T_1}{\pi})}{\frac{\pi\omega T_1}{\pi}} = 2T_1 Sinc(\frac{\omega T_1}{\pi})$$

- Conversion 2:

$$\frac{sin(Wt)}{\pi t} = \frac{\frac{W}{\pi}sin(Wt)}{\frac{W\pi t}{\pi}} = \frac{W}{\pi}\frac{sin(Wt)}{Wt} =$$

$$= \frac{\frac{W}{\pi}sin(\frac{\pi Wt}{\pi})}{\frac{\pi Wt}{\pi}} = \frac{W}{\pi}Sinc(\frac{Wt}{\pi})$$

Índice

Índice

Génesis de la DTFT

Sea $\tilde{x}[n]$ una señal periódica de período N y $\omega_o = \frac{2\pi}{N}$:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_o n} \quad (7)$$

donde:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_o n} \quad (8)$$

y sea $x[n]$ una señal aperiódica, idéntica a un período de $\tilde{x}[n]$. Si en el intervalo $[-N_1, N_2]$, $x[n]$ y $\tilde{x}[n]$ son idénticas, entonces:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_o n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\omega_o n} \quad (9)$$

Génesis de la DTFT

Trazando la envolvente de los coeficientes espectrales, a partir de 9 se define:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{10}$$

Sustituyendo 10 en 7 se tiene:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_o})e^{jk\omega_o n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_o})e^{jk\omega_o n}\omega_o \tag{11}$$

luego, aproximando $\omega_o \to 0$ y haciendo el período infinito:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{12}$$

La DTFT

Definición

El par transformado de Fourier en Tiempo Discreto se define como:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{13}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{14}$$

Índice

Propiedades

- La DTFT es periódica en ω cada 2π
- $ax[n] + by[n] \longleftrightarrow aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
- $x[n - n_o] \longleftrightarrow e^{-j\omega n_o} X(e^{j\omega})$
- $e^{j\omega_o n} x[n] \longleftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_o)})$
- $x[n]_{(k)} \longleftrightarrow X(e^{jk\omega})$
- $x[n] * y[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
- $x[n]y[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} x(e^{j\theta})y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
- $x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow (1 - e^{-j\omega})x(e^{j\omega})$
- $\sum_{-\infty}^{n} x(k) \longleftrightarrow \frac{1}{(1-e^{j\omega})} x(e^{j\omega}) + \pi x(e^{j0}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$
- si $x[n]$ es real $\longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- si $x[n]$ es real
  $E_v\{x[n]\} + O_d\{x[n]\} \longleftrightarrow Re\{X(e^{j\omega})\} + jIm\{X(e^{j\omega})\}$

DTFT notables

- $\delta[n] \longleftrightarrow 1$
- $\mu[n] \longleftrightarrow \frac{1}{(1-e^{-j\omega})} + \sum_{k=-\infty}^{-\infty} \pi\delta(\omega - 2k\pi)$
- $\delta[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j\omega n_0}$
- $\frac{sin(Wn)}{\pi n} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq W, \\ 0 & \text{si } |\omega| > W. \end{cases}$ Periódica cada 2π
- $\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n \mu[n], |a| < 1 \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1+ae^{-j\omega})^r}$
- $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq N_1, \\ 0 & \text{si } |n| > N_1. \end{cases} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{sin[\frac{(2N_1+1)\omega}{2}]}{sin(\frac{\omega}{2})}$
- $\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \longleftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k \delta(\omega - 2k\omega_0)$

Índice

Dualidad

En los métodos de fourier existen tres casos de dualidad:

- Primer Caso: Al comparar las expresiones del par transformado de la CTFT, se observa que las ecuaciones son muy similares. Esto implica la posibilidad de calcular algunas transformadas sin tener que resolver las integrales de manera metódica, sino, adecuando la estructura de integral planteada(sustituyendo t por $-t$ y luego t por ω) e intuyendo por simple similitud su resultado, para así obtener la expresión de una transformada en específico. Ejemplo: Resolver ejercicio 4.12 de [2].

Dualidad

- Segundo Caso: Los coeficientes de Fourier a_k de una señal periódica $x[n]$ son, en sí mismos una secuencia periódica. Es decir, la secuencia correspondiente a a_k se puede expandir en serie de Fourier. Ahora bien, los coeficientes de la serie de Fourier para la secuencia periódica a_k tienen forma parecida a la señal original, es decir, valen: $\frac{1}{N}x[-n]$. De manera más específica, los coeficientes de Fourier de una señal discreta periódica son: $a_k = f[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_o n}$. Si hacemos $k = m$ y luego $n = -k$ se obtiene: $f[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=<N>} x[-k]e^{jk\omega_o m}$, donde se observa que los coeficientes de Fourier de los coeficientes a_k valen $\frac{1}{N}x[-k]$. Ejemplo 5.16 pag 394 de [2]

Dualidad

- Tercer Caso: Al comparar el par transformado de Fourier en tiempo discreto y las ecuaciones de síntesis y de análisis de la CFS se observa mucha similitud, de hecho, la expresión $x(e^{j\omega})$ constituye, en sí misma, una expansión en serie de Fourier continua en ω. Por lo tanto, de la misma manera que en el primer caso, se puede aproximar el cálculo de la DTFT apoyándonos en los conocimientos de la CFS. Ejemplo 5.17 pag 395 de [2]

Referencias

Signals and systems spring 2011 mit opencourseware.
https://ocw.mit.edu.
Accessed: 2018-03-10.

A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, and S.H. Nawab.
Signals and Systems.
Prentice-Hall signal processing series. Prentice Hall, 1997.