Laboratori de Càlcul Numèric
www-lacan.upc.es

Proceedings of the 8th Workshop on Numerical Methods in Applied Science and Engineering

Vall de Núria, January 15-16, 2009

Sponsors:

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Escola Tècnica Superior d'Enginyers
de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Session 1: DG-NEFEM

C. Cadenas, S. Fernandez-Mendez y A. Huerta. Dualidad de las aproximaciones discretas en dinámica estructural y propagación de ondas: comparación de Galerkin continuo (CG) y LDG.

A. Montlaur, S. Fernandez-Mendez and A. Huerta. Solution of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations by high-order implicit Runge-Kutta methods.

R. Sevilla, S. Fernandez-Mendez and A. Huerta. 3D Nurbs-Enhanced Finite Element Method.

8th Workshop on Numerical Methods in Applied
Science and Engineering (NMASE 09)
Vall de Núria, 15 a 16 de enero de 2009

DUALIDAD DE LAS APROXIMACIONES DISCRETAS EN DINÁMICA ESTRUCTURAL Y PROPAGACIÓN DE ONDAS: COMPARACIÓN DE GALERKIN CONTINUO (CG) Y LDG

Carlos E. Cadenas[1,2], Sonia Fernández-Méndez[2] y Antonio Huerta[2]

1: Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias y Tecnología
Universidad de Carabobo, Venezuela
e-mail: ccadenas@uc.edu.ve, carlos.cadenas@upc.es

2: Departamento de Matemática Aplicada III
E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya, España
e-mail: sonia.fernandez,antonio.huerta@upc.es, web: http://www-lacan.upc.edu

Palabras clave: (dinámica estructural, propagación de ondas, problema de autovalores, dispersión numérica, elemento finito contínuo, Galerkin Discontínuo Local)

Resumen. *En la resolución numérica de problemas de propagación de ondas, como la ecuación de Helmholtz, se produce el fenómeno denominado dispersión numérica, que se manifiesta como un desfase de la solución numérica respecto a la onda que representa la solución analítica. La dispersión numérica en el método de los elementos finitos continuos ha sido ampliamente estudiada y analizada en problemas unidimensionales, ver por ejemplo [1].*

En este trabajo se amplía el estudio dado en [2] considerando el método de elementos finitos Galerkin Discontinuo Local (LDG). Inicialmente se plantean los problemas de Vibraciones Estructurales y Propagación de Ondas. Luego se describen brevemente los procedimientos para obtener las curvas para el error debido a la aproximación de los autovalores en el problema de autovalores generalizado para la ecuación de onda y del error debido a la dispersión numérica para la ecuación de Helmholtz.

1 DINÁMICA ESTRUCTURAL

Es bien sabido que las ecuaciones de movimiento que gobiernan el problema de vibraciones libre sin amortiguamiento y fuerzas exteriores, son

$$M\frac{d^2u}{dt^2} + Ku = 0, \tag{1}$$

donde M y K son los operadores de masa y rigidez, y $u = u(t, x)$ es el desplazamiento.

El $n-$ésimo modo normal ϕ_n y su frecuencia w_n son obtenidos desde el siguiente problema de autovalores:

$$K\phi_n = w_n M\phi_n \tag{2}$$

Al igual que que en el caso contínuo, los modos normales discretos ϕ_n^h y su frecuencia w_n^h son obtenidos desde el siguiente problema de autovalores:

$$K^h\phi_n^h = w_n^h M^h\phi_n^h \tag{3}$$

donde M^h y K^h son los operadores discretos finito dimensional de masa y rigidez.

2 PROPAGACIÓN DE ONDAS

Si se asumen una onda que se propaga en forma harmónica en el tiempo, la ecuación de onda se escribe en el régimen frecuencia y se denomina ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{4}$$

donde k es el número de onda. Luego de discretizar dicha ecuación se obtiene

$$(K^h - k^2 M^h)u^h = 0 \tag{5}$$

en general la solución numérica de dicha ecuación es una combinación lineal de ondas planas que tienen números de onda discreto k^h.

3 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE AUTOVALORES GENERALIZADO

Al resolver el problema de Autovalores Generalizado dado por (3) se obtiene la Figura 1, donde se presenta una medida para el error relativo en el cálculo de la frecuencia w_n^h

4 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE DISPERSIÓN NUMÉRICA

Siguiendo el procedimiento dado en [2] se procede a resolver el problema de dispersión numérica para la ecuación de Helmholtz cuando se utiliza el método de elementos finitos Galerkin Discontínuo Local [3], obteniéndose el error cometido en el cálculo del número de onda discreto. En las Figuras 2 y 3, se presentan diversas gráficas del error en la dispersión numérica para algunas combinaciones de parámetros $C_{11} = \frac{\beta}{h}$ y C_{12}.

5 DUALIDAD

El análisis de dualidad en las aproximaciones discretas en Dinámica Estructural y Propagación de Ondas en los métodos de elementos finitos y $k-$NURBS ha sido estudiado en [2]. Dicho análisis para el caso que nos compete (LDG), tomando en cuentra grado 2, debe ser hecho considerando la similitud $\frac{n}{2N+1} \rightleftharpoons k^h h_{LDG} = \frac{3}{2}k^h h_{CG}$ y $\frac{w^h}{w} \rightleftharpoons \frac{k}{k^h}$, lo cual permite hacer comparaciones tomando en cuenta los mismos grados de libertad.

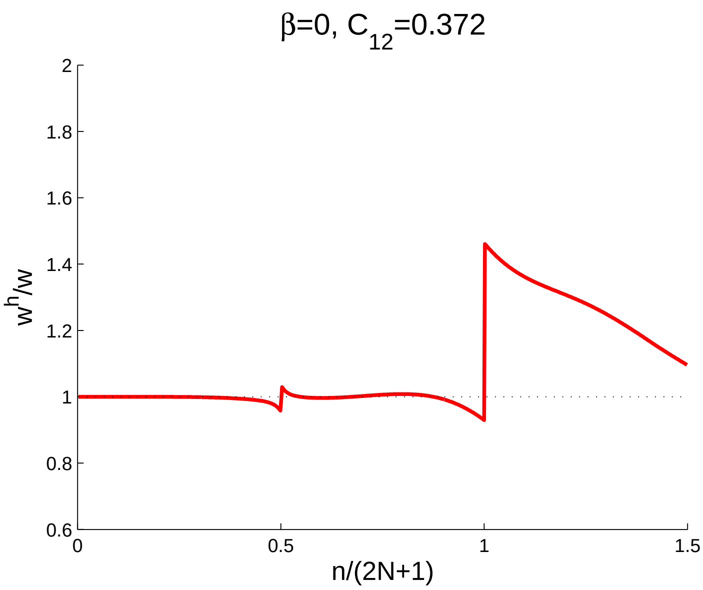

Figura 1. Gráfica de Error de la solución del problema de Autovalores.

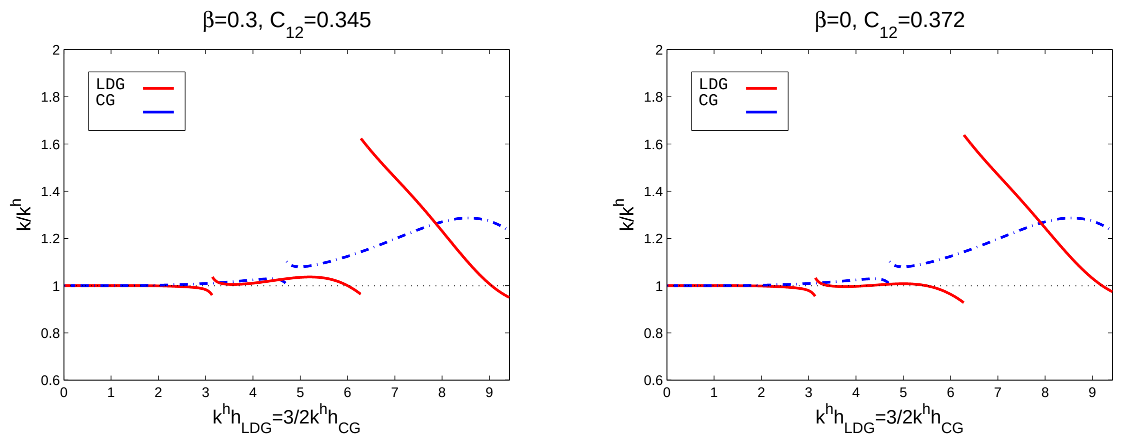

Figura 2. Gráficas del error en la dispersión numérica para dos combinaciones de parámetros β y C_{12}. (izquierda: $\beta = 0.3$ y $C_{12} = 0.345$ y derecha: $\beta = 0$ y $C_{12} = 0.372$).

En las figuras 1 y 2 (izquierda) se puede observar el mismo comportamiento para los errores dados en ellas en las primera dos ramas (la acústica y la primera rama óptica), sin embargo en la tercera rama (segunda rama óptica) se aprecia una diferencia considerable que llega hasta valores de diferencia del 15 %. Otros experimentos numéricos confirman el comentario anterior.

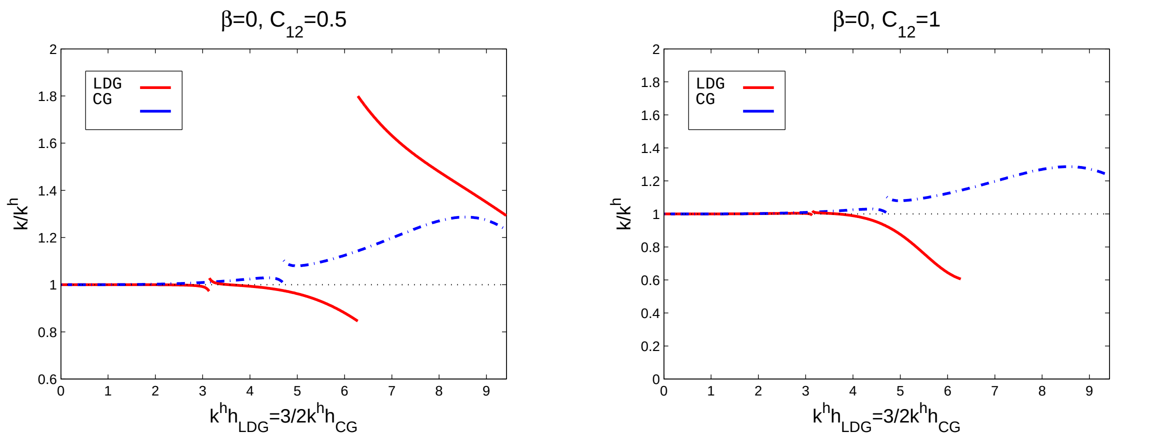

Figura 3. Gráficas del error en la dispersión numérica para dos combinaciones de parámetros β y C_{12}. (izquierda: $\beta = 0.3$ y $C_{12} = 0.345$ y derecha: $\beta = 0$ y $C_{12} = 0.372$).

REFERENCIAS

[1] F. Ihlenburg and I. Babuska, "Finite Element Solution of the Helmholtz Equation with High Wave Number. Part I: the h-Version of the FEM", *Computers Math. Applic.* Vol. **30**, No. 9, pp. 9-37, (1995).

[2] T. J. R. Hughes, A. Reali and G. Sangalli, "Duality and unified analysis of discrete approximations in structutal dynamics and wave propagation: Comparison of p-method finite elements with k-method NURBS", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. **197**, pp. 4104-4124, (2008).

[3] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and D. Marini, "Discontinuous Galerkin methods for elliptic problems", in *Discontinuous Galerkin Methods. Theory, Computation and Applications*, B. Cockburn, G.E. Karniadakis, and C.-W. Shu, eds., Lect. Notes Comput. Sci. Eng. 11, Springer-Verlag, Berlin, 2000, pp. 89-101.

Con el apoyo de *Universitat Politècnica de Catalunya* y *E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona*