



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
ÁREA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA



EVALUACIÓN DE LA MATRIZ Z DERIVADA A PARTIR
DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DE CAMPO COMBINADO
CFIE DISCRETIZADA MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS
MOMENTOS MOM Y EL MÉTODO DE LOS MULTIPOLOS
RÁPIDOS

AUTOR: César Cuperto Ruiz P.

Valencia 01 de diciembre de 2020



Acta de discusión y veredicto de los miembros del Jurado en la Presentación de Trabajo Especial de Grado en forma virtual



Valencia, 08 de Diciembre de 2020

En atención a lo dispuesto en los artículos 137, 138 y 139 del Reglamento de Estudios de Postgrado de la Universidad de Carabobo quienes suscribimos como jurado designado por el Consejo de Postgrado de la Facultad de Ingeniería de acuerdo al artículo 135 del citado Reglamento, y según oficio CPFI- 016- DEEI, de fecha 28/10/2020, para revisar y evaluar el Trabajo de Grado titulado:

Evaluación de la matriz Z derivada a partir de la ecuación integral de campo combinado CFIE discretizada mediante el método de los momentos MOM y el método de los multipolos rápidos

Bajo la línea de investigación: **Electromagnetismo Computacional**

Presentado para optar al título de Magíster en Ingeniería Eléctrica por el Ingeniero **CÉSAR CUPERTO RUIZ**, cédula de identidad **V-11.155.040**, una vez evaluado el trabajo presentado se decide que el mismo está:

Apellidos y Nombres	Cédula de identidad	Veredicto individual
PAULINO DEL PINO, MSC	V – 5.384.122	APROBADO
CÉSAR SEIJAS FOSSI, PHD	V – 4.567.093	APROBADO
ALFONSO ZOZAYA, PHD	V - 8.066.442	APROBADO
Veredicto final: APROBADO		

Las razones que motivan la decisión son:

1. **Respecto al análisis de la situación contexto o problema:** El análisis del problema es ajustado a la naturaleza del mismo, resaltando adecuadamente su importancia y pertinencia tecnológica.
2. **Respecto a la fundamentación teórica:** Incluye los aspectos relevantes y suficientes para sustentar el desarrollo del trabajo.
3. **Respecto al método desarrollado:** La metodología empleada permitió la ejecución de las actividades programadas en las diferentes fases conducentes al cabal logro de los objetivos.
4. **Respecto a los análisis derivados:** Los análisis realizados fueron acordes a la naturaleza del problema y de la solución implementada.
5. **Respecto al uso de fuentes bibliográficas:** Fueron abundantes, pertinentes y bien utilizadas.
6. **Respecto a la monografía:** Su redacción y presentación fueron excelentes.



Acta de discusión y veredicto de los miembros del Jurado en la Presentación de Trabajo Especial de Grado en forma virtual



Postgrado Ingeniería
Universidad de Carabobo

Certificamos que el día 08/12/2020, desde las 9:00 a.m. hasta las 11:30 a.m., a través de la plataforma tecnológica **MEET**, encontrándonos los miembros del Jurado evaluador, el Prof. **PAULINO DEL PINO, MSC.**, cédula de identidad **V- 5384122**, como Jurado Presidente, el Prof. **CÉSAR O. SEIJAS FOSSI, PHD.**, cédula de identidad **V - 4.567.093**, como Jurado Interno, y el Prof. **ALFONSO ZOZAYA, PHD.**, Cédula de identidad **V - 8.066.442**, como Jurado Externo, y ante el Ingeniero **CÉSAR CUPERTO RUIZ PERDOMO**, cédula de identidad **V- 11.155.040**, se lee veredicto final del Trabajo de Grado.

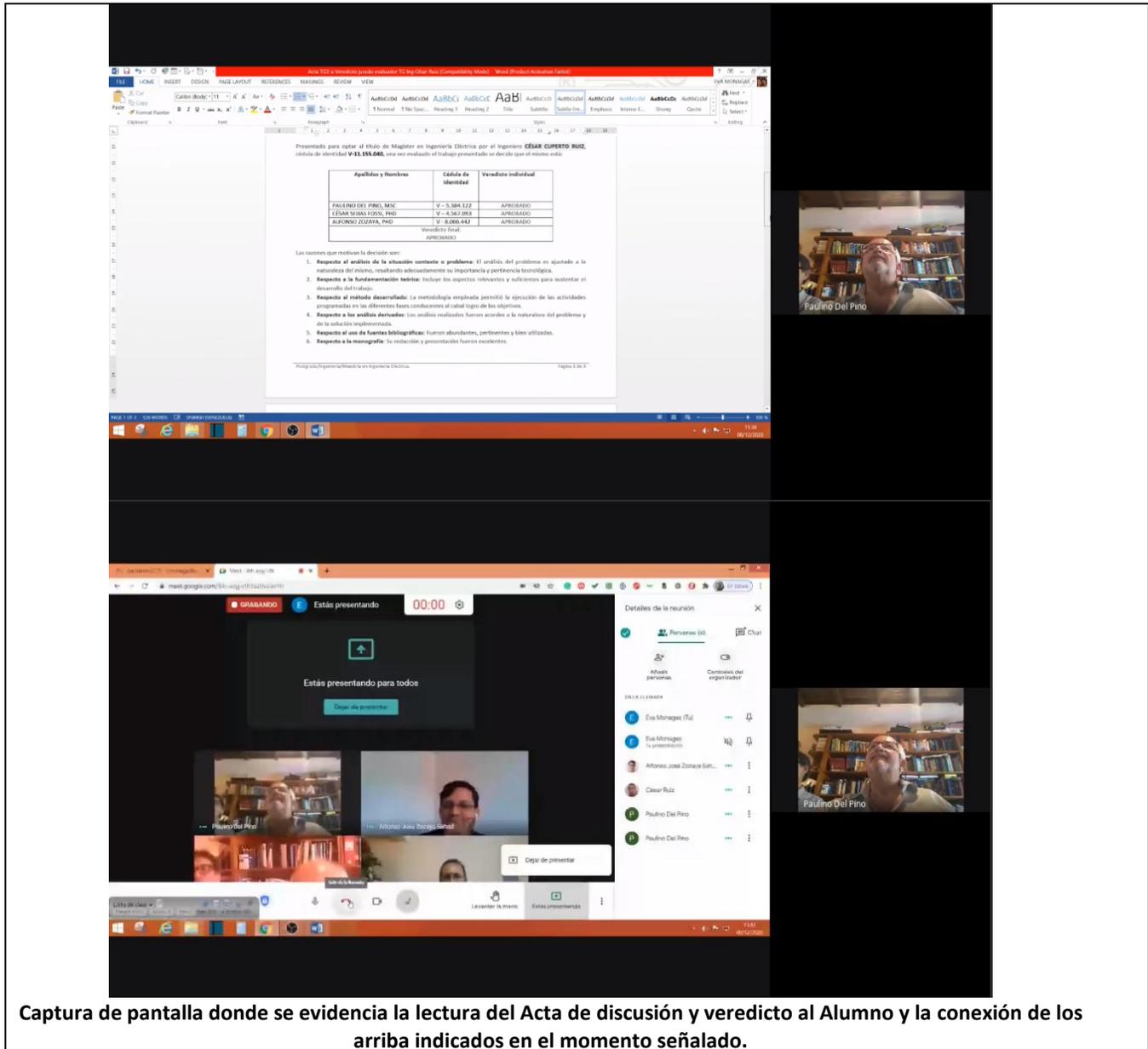
Cada miembro del jurado constituido de manera virtual, a viva voz expresó su veredicto individual el cual quedó grabado en la plataforma acordada para esta presentación, y bajo la guiatura del Comité Virtual de Acompañamiento.

Firma
Jurado Presidente
MSc. Paulino Del Pino

Firma
Jurado Interno
Prof. César Seijas, PhD

Firma
Jurado Externo
Prof. Alfonso Zozaya, PhD

Se anexa captura de pantalla donde el Jurado principal y los miembros del Jurado leen al participante el Acta de discusión y veredicto.



Captura de pantalla donde se evidencia la lectura del Acta de discusión y veredicto al Alumno y la conexión de los arriba indicados en el momento señalado.

Tomado del video grabado en versión original de la Presentación del TG.

Importante: Esta acta debe ser enviada en formato digital al presidente del jurado, con copia a todos los miembros del Jurado.

**UNIVERSIDAD DE CARABOBO
ÁREA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**EVALUACIÓN DE LA MATRIZ Z DERIVADA A PARTIR
DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DE CAMPO COMBINADO
CFIE DISCRETIZADA MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS
MOMENTOS MOM Y EL MÉTODO DE LOS MULTIPOLOS
RÁPIDOS**

**AUTOR: César Cuperto Ruiz P.
TUTOR: Prof. Paulino Del Pino**

Valencia 01 de diciembre de 2020

**UNIVERSIDAD DE CARABOBO
ÁREA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**EVALUACIÓN DE LA MATRIZ Z DERIVADA A PARTIR
DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DE CAMPO COMBINADO
CFIE DISCRETIZADA MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS
MOMENTOS MOM Y EL MÉTODO DE LOS MULTIPOLOS
RÁPIDOS**

AUTOR: César Cuperto Ruiz P.

**Trabajo presentado ante el Área de Estudios
de Postgrado de la Universidad de Carabobo
para optar al Título de Magister en Ingeniería
Eléctrica**

Valencia 01 de diciembre de 2020

Índice general

1. El problema de investigación	1
1.1. Planteamiento del problema.	1
1.2. Formulación del problema	1
1.3. Objetivos de la investigación	2
1.3.1. Objetivo general	2
1.3.2. Objetivos específicos	2
1.4. Justificación	2
1.5. Alcances y Limitaciones	2
2. Marco teórico	4
2.1. Antecedentes de la investigación	4
2.2. Bases teóricas	5
2.2.1. Las ecuaciones de Maxwell en forma fasorial	5
2.2.2. Principio de equivalencia física	5
2.2.3. Ecuaciones integrales	7
2.2.4. Ecuaciones integrales de superficie	11
2.2.5. Ecuación integral de campo eléctrico(EFIE)	12
2.2.6. Ecuación integral de campo magnético(MFIE)	13
2.2.7. Ecuación integral campo combinada (CFIE)	15
2.2.8. El método de los momentos	15
2.2.9. Teoría de proyección de autovalores	18
2.2.10. Espectro de autovalores	19
2.2.11. Problemas de resonancias Internas.	20
2.2.12. Funciones base Rao-Wilton- Glisson	21
2.2.13. El método de los multipolos rápidos (FMM)	22
2.2.14. Densidad de discretización	29
2.2.15. Criterio de selección de la frecuencia de muestreo	29
2.2.16. El número de condición	29
2.2.17. Lapack	30
2.2.18. Integración sobre triángulos.	30
2.2.19. Sección recta de radar(RCS)	32
2.2.20. RCS Monoestática	33
2.2.21. RCS Biestática.	33
3. Procedimientos de la Investigación	35
3.1. Introducción.	35

3.2.	Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos	36
3.2.1.	Formulación de la matriz Z del sistema a partir de la EFIE aplicando el método de los momentos y las funciones RWG.	36
3.2.2.	Formulación de la matriz Z de la MFIE aplicando el método de los momentos y las funciones RWG.	44
3.2.3.	Elementos de la matriz de la ecuación integral de campo combinada (CFIE)	51
3.3.	Fase 2. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos.	51
3.3.1.	Introducción.	51
3.3.2.	MoM-FMM aplicado a la EFIE	51
3.3.3.	MoM-FMM aplicado a la MFIE	53
3.3.4.	MoM-FMM aplicado a la CFIE	55
3.4.	Fase 3. Programar las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos	55
3.4.1.	Agrupamiento de las funciones base	56
3.4.2.	Clasificación de grupos cercanos y lejanos	57
3.4.3.	Determinación del número de multipolos	58
3.4.4.	Cálculo de las funciones de transferencia.	59
3.4.5.	Cálculo de las funciones de radiación y recepción para CFIE	59
3.4.6.	Estudio espectral de la factorización.	61
3.4.7.	Integración numérica sobre la esfera unitaria.	64
3.5.	Fase 4. Implementación del código.	66
3.5.1.	Introducción	66
3.5.2.	Descripción del Diseño del código Ztotal.	67
3.5.3.	Código para determinar la matriz Z de la CFIE debido a las interacciones cercanas (Zcercana)	74
3.5.4.	Código para determinar la matriz Z de la CFIE debido a las interacciones lejanas (Zlejana)	75
3.5.5.	Inserción del código Lapack para el calculo de Autovalores y número de condición.	76
3.6.	Fase 5. Experimentos a realizar	78
3.6.1.	Experimento N°1	78
3.6.2.	Experimento N°2	79
3.6.3.	Experimento N°3	81
3.7.	Fase 6. Validación de los resultados obtenidos.	81
4.	Análisis, interpretación y presentación de resultados	83
4.1.	Resultados	83
4.1.1.	Experimento N°1. Determinación y comparación del espectro de autovalores y número de condición de la matriz Ztotal y Zcercana en función del lado cubo W del método FMM.	83
4.1.2.	Análisis de resultados del experimento N°1	90

Índice general

4.1.3.	Experimento N°2. Determinación del espectro de autovalores y número de condición de la matriz Z_{cercana} en función del parámetro de ponderación de la CFIE, en un rango de frecuencias. . .	91
4.1.4.	Análisis de resultados del experimento N°2	110
4.1.5.	Validación de resultados obtenidos en el experimento N°2	113
4.1.6.	Experimento N°3. Determinación del espectro de autovalores y número de condición de la matriz Z_{cercana} en función del parámetro de ponderación de la CFIE, para variación de la densidad de discretización del dispersor.	129
4.1.7.	Análisis de Resultados del experimento N°3.	144
4.1.8.	Validación de Resultados del Experimento N°3.	146
5.	Conclusiones y recomendaciones.	155
5.1.	Conclusiones	155
5.2.	Recomendaciones.	156
	Bibliografía	157

Índice de figuras

2.1. Equivalente Físico. Fuente: Gibson,Walton C, "The method of moments in electromagnetics"	6
2.2. Función base Rao-Wilton-Glisson	22
2.3. Funciones base cercanas y lejanas al punto A	24
2.4. Traslación de onda	27
2.5. Coordenadas simplex para un triángulo	31
2.6. Medición de RCS monoestática	34
2.7. Medición de RCS Biestática	34
3.1. Aproximación de la superficie de una esfera utilizando un mallado de triángulos planos.	37
3.2. Función base RWG	37
3.3. Cantidades geométricas para un segmento C de un polígono sobre el plano S	43
3.4. Funciones RWG en los Triángulos T_m y T_n	47
3.5. Cantidades geométricas utilizadas para calcular Z_{mn}^M cercanos.	50
3.6. Dispensor mallado con triángulos	56
3.7. Subdivisión espacial y agrupamientos de las funciones bases	57
3.8. Grupos cercanos y lejanos	58
3.9. Diagrama de Flujo del Código Z_{total}	68
3.10. Ejemplo del dato tipo derivado:[cubos]. Fuente propia	73
3.11. PlanoFMM1.stl 64 orillas	76
3.12. Aplicación del comando Spy en el programa Octave a la matriz $Z_{cercana}$ y Z_{lejana} del dispensor planoFMM1.stl	76
4.1. Conformación de los elementos de la Matriz $Z_{cercana}$ en función de lado cubo W para la EMCC almendra de la nasa a 1.19GHz	85
4.2. Variación del número de condición Vs. el coeficiente de ponderación α de la CFIE en función del lado cubo W para las matrices: a) Z_{total} Cono-Esfera a 869MHz b) $Z_{cercana}$ EMCC Cono -Esfera a 869MHz, c) Z_{total} EMCC_almond a 1.19GHz d) $Z_{cercana}$ de EMCC_almond a 1.19GHz.	86
4.3. Espectro de autovalores de la matrices Z_{total} y $Z_{cercana}$ de la EFIE del EMCC Almendra a 1.19GHz. \diamond Mínimo autovalor. \circ Máximo autovalor.	87
4.4. Espectro de autovalores de la matrices Z_{total} y $Z_{cercana}$ de la MFIE del EMCC Almendra a 1.19GHz. \diamond Mínimo autovalor. \circ Máximo autovalor.	88

4.5. Espectro de autovalores de la matrices Ztotal y Zcercana de la CFIE del EMCC Almendra a 1.19GHz para un coeficiente de ponderación $\alpha=0.2$ donde se alcanza el menor número de condición. \diamond Mínimo autovalor. \circ Máximo autovalor.	89
4.6. Esfera	91
4.7. Número de condición Vs. Coeficiente de ponderación de la CFIE para matriz Zcercana de La ESFERA	93
4.8. Espectro de autovalores de la matriz Zcercana EFIE de la Esfera en el experimento N°1.	94
4.9. Espectro de autovalores de la matriz Zcercana MFIE de la Esfera en el experimento N°1.	95
4.10. Espectro de autovalores de la matriz Zcercana CFIE de la Esfera para el mínimo valor del número de condición. Ver Tabla4.7	95
4.11. CILINDRO	96
4.12. Número de condición vs. Coeficiente de ponderación de la matriz Zcercana de la CFIE para el CILINDRO.	97
4.13. Espectro de autovalores de la matriz Zcercana EFIE del CILINDRO en el experimento N°2.	98
4.14. Espectro de autovalores la matriz Zcercana MFIE del CILINDRO en el experimento N°2.	99
4.15. Espectro de autovalores de la matriz Zcercana CFIE del CILINDRO para el mínimo valor del número de condición encontrados en la Tabla4.10.	99
4.16. ALMENDRA DE LA NASA	100
4.17. Número de condición vs. Coeficiente de ponderación de la matriz Zcercana de la CFIE para la ALMENDRA DE LA NASA	101
4.18. Espectro de autovalores la matriz Zcercana EFIE de la Almendra de la Nasa en el experimento N°2.	102
4.19. Espectro de autovalores la matriz Zcercana MFIE de la Almendra de la Nasa en el experimento N°2.	103
4.20. Espectro de autovalores la matriz Zcercana CFIE de la Almendra de la Nasa en el experimento N°2 para mínimo número de condición.	104
4.21. EMCC_Doble_OJIVA	105
4.22. Número de condición vs. Coeficiente de ponderación de la matriz Zcercana de la CFIE para la EMCC DOBLE OJIVA.	106
4.23. Espectro de autovalores de la matriz Zcercana EFIE de la Doble Ojiva en el experimento N°2.	107
4.24. Espectro de autovalores de la matriz Zcercana MFIE de la EMCC Doble Ojiva en el experimento N°2	108
4.25. Espectro de autovalores la matriz Zcercana de la CFIE de la de la EMCC doble Ojiva para el mínimo valor del número de condición obtenido. Ver laTabla4.16.	109

4.26. Valores del coeficiente de ponderación α de la CFIE donde se obtiene el menor número de condición de la matriz Zcercana en función de la densidad de discretización de los dispersores : Esfera, Cilindro, EMCC Almendra de la Nasa y de la EMCC Doble Ojiva.	112
4.27. RCS Biestática Polarización Horizontal de la Esfera a 600MHz, $(n_{\lambda})_{\min} = 7.3114$	
4.28. RCS Biestática Polarización Vertical de la Esfera a 600 MHz, $(n_{\lambda})_{\min} = 7.3114$	
4.29. RCS Biestática Polarización Horizontal de la Esfera a 300 MHz, $(n_{\lambda})_{\min} = 9.73115$	
4.30. RCS Biestática Polarización Vertical de la Esfera a 300 MHz, $(n_{\lambda})_{\min} = 9.73116$	
4.31. RCS Biestática Polarización Horizontal del Cilindro a 600MHz, $(n_{\lambda})_{\min} = 7.28117$	
4.32. RCS Biestática Polarización Vertical del Cilindro a 600MHz, $(n_{\lambda})_{\min} = 7.28118$	
4.33. RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Almendra de la Nasa a 9.92GHz. $(n_{\lambda})_{\min} = 6,48$	119
4.34. RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC Almendra de la Nasa a 9.92GHz. $(n_{\lambda})_{\min} = 6,48$	120
4.35. RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Almendra de la Nasa a 7GHz. $(n_{\lambda})_{\min} = 9,18$	121
4.36. RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC Almendra de la Nasa a 7GHz. $(n_{\lambda})_{\min} = 9,18$	122
4.37. RCS Monoestática de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.57GHz. $(n_{\lambda})_{\min} = 48,96$	123
4.38. RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Doble Oliva a 9.92GHz. $(n_{\lambda})_{\min} = 7,62$	124
4.39. RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC doble-ovejiva a 9.92GHz. $(n_{\lambda})_{\min} = 7,62$	125
4.40. RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Doble Oliva a 7GHz. $(n_{\lambda})_{\min} = 9,18$	126
4.41. RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC doble-ovejiva a 7GHz. $n_{\lambda(\min)} = 9,18$	127
4.42. RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Doble Ojiva a 1.57GHz. $(n_{\lambda})_{\min} = 48,16$	128
4.43. RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC Doble Ojiva a 1.57GHz. $(n_{\lambda})_{\min} = 48,16$	129
4.44. Variación del número de condición de Zcercana de la EMCC Almendra a la frecuencia de 1.19Ghz en el experimento N°2	131
4.45. Espectro de autovalores la matriz Zcercana EFIE de la Almendra de la Nasa en el experimento N°3 a la frecuencia de 1.19GHz	132
4.46. Espectro de autovalores la matriz Zcercana MFIE de la Almendra de la Nasa en el experimento N°3 a la frecuencia de 1.19GHz	133
4.47. Espectro de autovalores la matriz Zcercana CFIE de la Almendra de la Nasa en el experimento N°3 a la frecuencia de 1.19GHz para valores de α donde se obtiene el menor NC.	134
4.48. Variación del número de condición de Zcercana de la EMCC Double-Ojiva a la frecuencia de 1.18Ghz	135

4.49. Espectro de autovalores la matriz Zcercana EFIE de la EMCC Doble Ojiva en el experimento N°3 a la frecuencia de 1.18GHz	137
4.50. Espectro de autovalores la matriz Zcercana MFIE de la EMCC Doble Ojiva en el experimento N°3 a la frecuencia de 1.18GHz	138
4.51. Espectro de autovalores la matriz Zcercana CFIE de la EMCC Doble Ojiva en el experimento N°3 a la frecuencia de 1.18GHz	139
4.52. EMCC Cono-Esfera. [39]	140
4.53. Variación del número de condición de Zcercana de la EMCC Cono_esfera a la frecuencia de 869MHz.	141
4.54. Espectro de autovalores la matriz Zcercana MFIE del Cono-Esfera en el experimento N°3.	142
4.55. Espectro de autovalores la matriz Zcercana CFIE de la EMCC Esfera Cono en el experimento N°3 a la frecuencia de 869MHz	143
4.56. Variación del coeficiente de ponderación α de la CFIE en función de la densidad de discretización $(n_\lambda)_{\min}$ para las matrices Zcercana de los dispersores analizados en el experimento N°3.	145
4.57. RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 10,20$	146
4.58. RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 20,29$	147
4.59. RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 30,69$	147
4.60. RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 10,20$	148
4.61. RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 20,29$	149
4.62. RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 30,69$	149
4.63. Comparación de RCS Polarización Horizontal de la EMCC Doble Ojiva a 1.18GHz en función de la densidad de discretización.	150
4.64. Comparación de RCS Polarización Vertical de la EMCC Doble Ojiva a 1.18GHz en función de la densidad de discretización.	151
4.65. RCS monoestática polarización horizontal (HP) de la EMCC Cono-Esfera a 869MHZ para $(n_\lambda)_{\min}=9,936$	152
4.68. RCS monoestática polarización vertical (VP) de la EMCC Cono-Esfera a 869MHZ para $(n_\lambda)_{\min} = 16,16$	152
4.66. RCS monoestática polarización horizontal (HP) de la EMCC Cono-Esfera a 869MHZ $(n_\lambda)_{\min}=16,16$	153
4.69. RCS monoestática polarización horizontal (HP) de la EMCC Cono-Esfera a 869MHZ en los valores de α para mínimo número de condición	153
4.67. RCS monoestática polarización vertical (VP) de la EMCC Cono-Esfera a 869MHZ en función de la Densidad de Discretización $(n_\lambda)_{\min} = 16,16$	154
4.70. RCS monoestática polarización vertical del EMCC Cono-Esfera a 869MHZ en los valores de α para mínimo número de condición.	154

Índice de tablas

2.1. Operadores y las propiedades de sus autovalores [16]	21
2.2. Puntos de la cuadratura Gauss Legendre y factores de ponderación sobre el triángulo T para N=7	32
3.1. Valores de la variables implementadas en la subrutina ZGEEV()	78
3.2. Valores del lado cubo W utilizados en el experimento N°1	79
4.1. Características de los dispersores usados en el experimento N°1	83
4.2. Porcentaje de interacciones cercanas en el llenado de la Matriz Zcercana en función del lado W para la EMCC Almendra a 1.19GHz.	84
4.3. Porcentaje de interacciones cercanas en el llenado de la Matriz Zcercana en función del lado W para la EMCC Cono Esfera a 869MHz.	84
4.4. Valores de los autovalores máximos y mínimos para las Ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE para la Ztotal y Zcercana del EMCC Almendra a 1.19GHz y Lado cubo $W=0,25\lambda$	90
4.5. Características de dispersor :Esfera	92
4.6. Frecuencias y densidad de discretización para el dispersor sphere600.stl	92
4.7. Valores del parámetro de ponderación α para los cuales se obtiene el menor número de condición (NC_{min}) de la Matriz Zcercana de la Esfera.	92
4.8. Autovalores máximos y mínimos de la matriz Zcercana de la EFIE, MFIE y CFIE de la EMCC de la Esfera en función de la frecuencia.	96
4.9. Características de dispersor :CILINDRO	97
4.10. Frecuencias y densidad de discretización para el dispersor CILINDRO	97
4.11. Autovalores máximos y mínimos de la matriz Zcercana de la EFIE, MFIE y CFIE de la EMCC del CILINDRO en función de la frecuencia.	100
4.12. Características de dispersor :Almendra de la Nasa	101
4.13. Valores del coeficiente de ponderación donde se alcanza el menor número de condición para la matriz Zcercana de la ALMENDRA DE LA NASA	101
4.14. Autovalores máximos y mínimos de la matriz Zcercana de la EFIE, MFIE y CFIE de la EMCC Almendra de la Nasa en función de la frecuencia.	105
4.15. Características de dispersor :Doble_Ojiva	106
4.16. Valores del coeficiente de ponderación donde se alcanza el menor número de condición para la matriz Zcercana de la EMCC DOBLE OJIVA	106
4.17. Autovalores máximos y mínimos de la matriz Zcercana de la EFIE, MFIE y CFIE de la EMCC de Doble Oliva en función de la frecuencia.	110

4.18. Resumen de resultados donde se expresa el valor del coeficiente de ponderación α de la CFIE para el mínimo número de condición de la matriz Zcercana de los dispersores evaluados en el experimento N°2	112
4.19. Parámetros comparativos en el cálculo de la RCS Biestática de la esfera a 600Mhz	113
4.20. Parámetros comparativos para el cálculo de la RCS Biestática del CILINDRO a 600MHz	116
4.21. Parámetros comparativos para el cálculo de la RCS monoestática de la EMCC Almendra de Nasa	118
4.22. Parámetros comparativos del cálculo de la RCS monoestática a 1.57GHz de la EMCC Doble Ojiva	123
4.23. Características de los dispersores Almendra de la Nasa a la frecuencia de 1.19Ghz	130
4.24. Valores del coeficiente de ponderación para mínimo numero de condición para la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz	131
4.25. Características de la EMCC Doble Oliva a la frecuencia de 1.18Ghz	135
4.26. Valores del coeficiente de ponderación para mínimo número de condición a 1.18GHz para la EMCC Doble Oliva.	136
4.27. Densidades de discretización del Cono-Esfera a la frecuencia de 869Ghz	140
4.28. Rango y pasos de variación del coeficiente α en el experimento N°3 del EMCC Cono- Esfera.	141
4.29. Valores del coeficiente de ponderación para mínimo numero de condición a 869MHz	142
4.30. Resumen de resultados donde se expresa el valor del coeficiente de ponderación α de la CFIE para el mínimo número de condición de la matriz Zcercana de los dispersores evaluados en el experimento N°3	145

Índice de algoritmos

3.1. Zcercana	74
3.2. Zlejana CFIE	75
3.3. Instalación de Lapack en Ubuntu	77
3.4. Subrutina ZGEEV	77

RESUMEN

EVALUACIÓN DE LA MATRIZ Z DERIVADA A PARTIR DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DE CAMPO COMBINADO CFIE DISCRETIZADA MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS MOMENTOS Y EL MÉTODO DE LOS MULTIPOLOS RÁPIDOS.

AUTOR: Ing. César Cuperto Ruiz

TUTOR: Prof. Paulino Del Pino, Msc.

Valencia, enero 2020

Un método para determinar los campos dispersos por objetos conductores eléctricos perfectos (PEC) es mediante la solución de la ecuación integral de campo eléctrico (EFIE) o la solución de la ecuación integral de campo magnético (MFIE) utilizando el método de los momentos (MoM) para formar un sistema de ecuaciones lineales, sin embargo, estas ecuaciones integrales ya discretizadas experimentan resonancias internas a determinadas frecuencias produciendo una matriz Z del sistema EFIE o MFIE que está mal condicionada y como consecuencia el método iterativo utilizado para resolver el sistema de ecuaciones tiende a tener un tiempo de convergencia muy grande ya que a tales frecuencias el número de condición es muy elevado. El método de facto utilizado para evitar el problema de las resonancias internas en la EFIE y MFIE consiste en utilizar la ecuación integral de campo combinado (CFIE) la cual depende de un parámetro de ponderación α que se utiliza para combinar las ecuaciones EFIE y MFIE. La elección correcta de éste parámetro de ponderación α que permita obtener una matriz Z del sistema CFIE que esté bien condicionada no es conocida en función de la determinación de su espectro de autovalores. Por tal motivo la presente investigación planteó la evaluación de la matriz Z del sistema CFIE discretizada mediante el método MoM y de la utilización del método FMM, mediante el cálculo del número de condición y el espectro de autovalores en función de la frecuencia y del promedio de longitud de las orillas de los triángulos utilizados para mallar el dispersor. La metodología utilizada para evaluar la matriz Z del sistema consistió en primer lugar en mallar el dispersor utilizando triángulos, posteriormente se utilizó el método de los momentos y el método de los multipolos rápidos FMM para programar las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE. Luego se realizó un código en Fortran denominado Z_{total} que calcula la matriz $Z_{cercana}$ debido a la interacciones cercanas de la CFIE obtenidas mediante MoM directo y del cálculo la matriz Z_{lejana} de la CFIE debida las interacciones lejanas mediante el método FMM. Luego se incorporó al código Z_{total} rutinas del paquete de álgebra lineal Lapack para calcular el espectro de autovalores y el número de condición de la matriz Z_{total} y $Z_{cercana}$ de la CFIE. Posteriormente se eligieron dispersores cerrados de referencia como dispersores de prueba para obtener la matriz Z del sistema CFIE y se hicieron tres experimentos con los dispersores elegidos, que permitieron: comparar el número de condición y espectro de autovalores entre la matriz Z_{total} CFIE y la matriz $Z_{cercana}$ CFIE en función de la variación del lado cubo W del método FMM, el segundo y tercer experimento consistieron en calcular el número de condición y el espectro de autovalores en función de la frecuencia de operación y de la longitud promedio y mí-

nima de las orillas de los triángulos del mallado del dispersor respectivamente, condensado estos dos parámetros (frecuencia y longitud) en la densidad de discretización $(\eta_\lambda)_{\min}$. Se concluyó que las matrices Z_{total} y Z_{cercana} de la CFIE son dominadas por los elementos de la diagonal principal haciendo que la variación del espectro de autovalores y número de condición sea el mismo en función del lado cubo W para ambas matrices, de igual manera se concluyó que existe un valor mínimo del número de condición de las matrices Z_{total} y Z_{cercana} que depende de la densidad $(\eta_\lambda)_{\min}$ y cuyo mínimo se alcanza aproximadamente para valores de $\alpha \leq 0.2$ a medida que $(\eta_\lambda)_{\min}$ tiende a tomar valores $\gtrsim 10$. Los resultados del cálculo de la matriz Z_{total} de la CFIE fueron validados mediante el cálculo de la RCS que utiliza ésta matriz en su resolución y se compararon con la RCS medidas de dispersores de referencia, arrojando una gran similitud en la RCS calculada con la Z_{total} .

Palabras clave: Matriz Z ,EFIE,MFIE, CFIE, MoM, FMM, parámetro de ponderación, espectro de autovalores, número de condición, densidad de discretización.

ABSTRACT

EVALUATION OF THE Z MATRIX DERIVED FROM THE COMBINED FIELD INTEGRAL EQUATION CFIE DISCRETIZED USING THE METHOD OF THE MOMENTS AND THE METHOD OF FAST MULTIPOLES.

AUTOR: Ing. César Cuperto Ruiz

TUTOR: Prof. Paulino Del Pino, MSc.

Valencia, January 2020

A method to determine the scattered fields by perfect electric conductor (PEC) is by solving the Electric Field Integral Equation (EFIE) or solving the Magnetic Field Integral Equation (MFIE) using the method of moments (MoM) to form a system of linear equations, however, these already discretized integral equations experience internal resonances at certain frequencies, producing a Z matrix of the EFIE or MFIE system that is poorly conditioned and as a consequence the iterative method used to solve the system of equations tends to have a very long convergence time since at such frequencies the condition number is very high. The de facto method used to avoid the problem of internal resonances in the EFIE and MFIE consists of using the Combined Field Integral Equation (CFIE) which depends on a weighting parameter α that is used to combine the EFIE and MFIE equations. The correct choice of this weighting parameter α that allows obtaining a Z matrix of the CFIE system that is well conditioned is not known as a function of the determination of its spectrum of eigenvalues. For this reason, the present investigation proposed the evaluation of the Z matrix of the CFIE system discretized by the MoM method and the use of the FMM method, by calculating the condition number and the spectrum eigenvalues as a function of the operating frequency and the average and minimum length of the edges of the scatterer mesh triangles respectively, condensed these two parameters (frequency and length) in the discretization density $(\eta\lambda)_{\min}$. It was concluded that the Ztotal and Znear matrices of the CFIE are dominated by the elements of the main diagonal making the variation of the spectrum of eigenvalues and condition number the same as a function of the cube side W for both matrices, in the same way it was concluded that there is a minimum value of the condition number of the matrices Ztotal and Znear that depends on the density $(\eta\lambda)_{\min}$ and whose minimum is reached approximately for values of $\alpha \leq 0.2$ as that $(\eta\lambda)_{\min}$ tend to take values $\gtrsim 10$. The results of the calculation of the Ztotal matrix of the CFIE were validated by calculating the RCS using this matrix in its resolution and measurements of reference scatterers were compared with the RCS, yielding a great similarity in the RCS calculated with the Ztotal.

Keywords: Z matrix, EFIE, MFIE, CFIE, MoM, FMM, weighting parameter, eigenvalue spectrum, condition number, discretization density.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mi tutor Profesor MSc. Paulino Del Pino quien con sus conocimientos y apoyo me guió a través de cada una de las etapas de este proyecto para alcanzar los objetivos planteados. Agradezco al Laboratorio de Electromagnetismo Aplicado por permitirme la realización de esta tesis en su línea de investigación de electromagnetismo computacional.

Agradezco a la Profesora PhD. Grecia Romero por toda su ayuda en la facilitación de artículos relacionados al tema de investigación, al Profesor MSc. Antonio Fedón y al Profesor Carlos Aponte por permitirme acceso a libros relacionados al tema, al Profesor Fabián Robledo por su asesoría. Agradezco a la Profesora MSc. Eva Monagas por toda su apoyo en la grabación del acto de defensa. Agradezco a mis hermanos Henry Ruiz y Eduardo Ruiz por todo su ayuda en el acto de la presentación de la defensa de esta investigación. Agradezco a mi tío Ing. Orlando Ruiz por su gran apoyo durante la realización mi estudios de maestría. Agradezco a mi esposa Rosana Ramos por todo su apoyo incondicional durante la realización de la tesis y agradezco a mis padres Pura y Cuperto por sus palabras de aliento en todo tiempo. Agradezco a todas aquellas personas que me ayudaron hacer posible lograr esta meta. Gracias a todos.

DEDICATORIA

A mis hijas a quienes amo:

Sofía Alejandra
y
Valentina Isabela

1 El problema de investigación

1.1. Planteamiento del problema.

Un método para obtener los campos dispersados por un objeto metálico, es aplicar las ecuaciones integrales EFIE, MFIE o CFIE, las cuales se discretizan mediante el método de los momentos (MoM) para formar un sistema de ecuaciones, donde la matriz Z del sistema toma en cuenta las interacciones tanto cercanas como lejanas de los parches en los cuales se ha mallado el objeto dispersor. Para encontrar la solución a éstos sistemas de ecuaciones, comúnmente se utilizan métodos iterativos, para los cuales el tiempo de convergencia de los mismos depende del condicionamiento de la matriz Z del sistema. Debido a que las ecuaciones EFIE y MFIE experimentan resonancias internas a ciertas frecuencias no es posible utilizarlas por si solas para todas las frecuencias[17].

La ecuación integral de campo combinada (Combined Field Integral Equation, CFIE) elimina el problema de las resonancias internas[24], por lo que es el método idóneo para resolver problemas de dispersión electromagnética ya que produce matrices bien condicionadas siendo fáciles de resolver iterativamente [20]. Esta ecuación integral al formarse por una combinación lineal de la EFIE y MFIE, tiene una matriz Z la cual depende del coeficiente de ponderación " α ", sin embargo, la elección de éste parámetro al momento de realizar el estudio de dispersión electromagnética debido a objetos metálicos de forma arbitraria, como lo es, por ejemplo, la determinación de la sección recta de radar (RCS, por sus siglas en inglés) usando el método de los multipolos rápidos (Fast Multipole method, FMM) o el método de los multipolos rápidos multinivel (Multi-Level Fast Multipole Algorithm, MLFMA) y el método del gradiente conjugado, no es explicado en base de las propiedades de la matriz Z del sistema, como lo son el número de condición y el espectro de autovalores.

1.2. Formulación del problema

Por lo anteriormente mencionado, ¿cómo el coeficiente de ponderación α en la CFIE podrá tener un efecto en el cómputo del número de condición y del espectro de autovalores de la matriz Z de la CFIE, y cómo la estimación de éstas variables podrán aportar la selección del mejor número de condición para un cuerpo conductor eléctricamente perfecto (Perfect Electrical Conductor, PEC) en función de la frecuencia y del tamaño promedio de los triángulos utilizados en el mallado del PEC .

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Evaluar la matriz Z derivada a partir de la Ecuación Integral de Campo Combinado CFIE discretizada mediante el Método de los Momentos y el Método de los Multipolos Rápidos.

1.3.2. Objetivos específicos

- Derivar la Matriz Z del Método de los Momentos obtenida de las Ecuaciones Integrales de Campo Eléctrico EFIE - FMM y Magnético MFIE-FMM
- Programar la EFIE mediante el Método de los Momentos y el Método de los Multipolos Rápidos.
- Programar la MFIE mediante el Método de los Momentos y el Método de los Multipolos Rápidos.
- Programar la Ecuación Integral de Campo Combinada CFIE mediante el Método de los Momentos y el Método de los Multipolos Rápidos
- Caracterizar la Matriz Z obtenida de la CFIE mediante el Método de los Momentos y el Método de los Multipolos Rápidos.

1.4. Justificación

La presente investigación se plantea con el fin de explicar cual debería ser el criterio para seleccionar el parámetro de ponderación α de la CFIE, mediante la determinación del número de condición y el espectro de autovalores de la matriz Z de la CFIE obtenida a partir del método de los momentos y del método de los multipolos rápidos FMM (Fast Multipole Method, FMM) en cuerpos conductores perfectos, en función de la frecuencia y de la longitud promedio de las orillas de los triángulos utilizados en el mallado del cuerpo bajo estudio, para así lograr un mejor condicionamiento de la matriz del sistema y como consecuencia, obtener un tiempo de convergencia más rápido en el método iterativo utilizado en la solución del sistema de ecuaciones. Esta investigación arrojaría un aporte teórico en electromagnetismo computacional en problemas de radiación y dispersión electromagnética en cuerpos conductores perfectos, utilizando MoM y el método de los multipolos rápidos.

1.5. Alcances y Limitaciones

El presente proyecto de investigación tiene como alcance evaluar la matriz Z obtenida mediante la discretización de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE mediante FMM-MoM, en cuerpos dispersores perfectamente conductores de geometría arbitraria, den-

1.5 Alcances y Limitaciones

tro de los cuales se destacan: la esfera, la almendra de la Nasa y la Doble Ojiva Metálica, entre otros, mediante el desarrollo de códigos computacionales utilizando un lenguaje de programación del alto nivel. Los objetos conductores son eléctricamente perfectos (PEC), siendo éstos previamente mallados por un software externo el cual es compatible con con el formato de archivos de estereolitografía (.stl). Las funciones bases utilizadas son las descritas por Rao, Wilton, Glisson (RWG)[28].

El código computacional desarrollado se utiliza para determinar numéricamente el espectro de autovalores y el número de condición de la matrices de la CFIE de zona cercana ($Z_{cercana}$), lejana (Z_{lejana}) y la total (Z_{total}) del sistema, en formato denso, incorporando nuevas estructuras en los códigos computacionales desarrollados en la línea de investigación de electromagnetismo computacional del Laboratorio de Electromagnetismo Aplicado (LABEMA) en el trabajo de Grado de Santamaria y Nuñez [29].

En el presente trabajo los códigos desarrollados se realizaron con software libre: Linux, Lapack, Octave y Eclipse. Se utilizo un computador Pentium(R) Dual-Core CPU E5700 @ 3.00GHz \times 2, 8GB de memoria RAM. El compilador para Fortran es el GNU Fortran compiler (GFORTRAN) desarrollado bajo Fortran libre de la colección de compiladores libres (GCC) 95/2003/2008, y el entorno de desarrollo integrado(IDE) utilizado es Eclipse.

2 Marco teórico

2.1. Antecedentes de la investigación

El Laboratorio de Electromagnetismo Aplicado (LABEMA) adscrito a la Universidad de Carabobo tiene una línea de investigación denominada Electromagnetismo Computacional donde se aplica la solución computacional a las ecuaciones de Maxwell. Esta línea de investigación tiene dentro de sus áreas de aplicación las Telecomunicaciones, donde se utiliza para el diseño de antenas y circuitos de microondas, y en la industria militar se utiliza para determinar de la sección recta de radar de diversos tipos de blancos. Tanto en el diseño de antenas como en la determinación de la sección recta de radar, se utilizan las ecuaciones integrales EFIE, MFIE y CFIE las cuales han sido implementadas numéricamente en LABEMA por [12], [4], [6], [15], [41] y [29]. La solución de las ecuaciones integrales aplicadas a superficies de forma arbitraria se desarrolla actualmente al resolver la Ecuación Integral de Campo Combinada (CFIE por sus siglas en inglés), debido a que evita las resonancias internas encontradas en la EFIE, tal como lo menciona [29] y [10]. Un estudio realizado por [40] reportó el cálculo del mejor parámetro de ponderación α en la solución de la CFIE, comparando los pasos de iteración usados al resolver la ecuación matricial derivada de CFIE utilizando el FMM y el método iterativo del gradiente conjugado, concluyendo que la elección de éste α depende de la longitud promedio de los triángulos utilizados para mallar las superficies bajo estudio. En éste estudio las superficies utilizadas fueron un cilindro tipo PEC y la almendra metálica de la NASA con diferentes longitudes promedio del los triángulos del mallado. Sin embargo, en dicho estudio no se especifica bajo que argumentos matemáticos depende la elección del mejor α en función de las propiedades espectrales de la matriz del sistema, tomando como variable paramétrica la densidad de discretización del mallado n_λ la cual de forma implícita incorpora la frecuencia y la longitud promedio de los bordes de los triángulos que se utilizan para mallar el dispersor. En [22] realizaron un estudio del efecto de parámetro de ponderación α en la conformación de la CFIE al mencionar que puede tomar una distribución variable a lo largo de una curva, reduciendo el tiempo de computo de la corriente en la superficie del dispersor de 40 % a 50 %, sin embargo no menciona cual es el criterio para la selección de este parámetro de ponderación. En la investigación realizada por [25] reporta que el estudio de la matrices juega un rol de suma importancia en el modelamiento físico mediante métodos numéricos en electromagnetismo computacional (CEM por sus siglas en inglés) y que a medida que el tamaño de la matriz se incrementa se hace más importante evaluar los factores que tienen influencia en la exactitud del resultado final, por lo que una propiedad de esta, el cual es el número de condición es un factor importante a controlar porque limita una solución exacta del sistema de ecuaciones a

resolver iterativamente. [25] plantea numerosas formas para evaluar cuantitativamente la precisión numérica.

Un estudio reportado por [14] señala que el valor óptimo para el coeficiente de ponderación está entre 0.2 y 0.3 estudiando el número mínimo de iteraciones al resolver CFIE en función de α .

2.2. Bases teóricas

2.2.1. Las ecuaciones de Maxwell en forma fasorial

En un medio homogéneo con parámetros constitutivos ϵ y μ , el campo eléctrico y magnético deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia, comúnmente conocidas como ecuaciones de Maxwell en forma fasorial, las cuales son descritas abajo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - j\omega\mu\mathbf{H} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mu\mathbf{E} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad (2.4)$$

Junto a las ecuaciones de Maxwell encontramos también la ecuación de continuidad de la corriente, la cual relaciona la densidad de corriente con la densidad de carga. Estas son:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho_e \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = -j\omega\rho_m \quad (2.6)$$

En las ecuaciones de Maxwell presentadas anteriormente aparecen la densidad de corriente magnética \mathbf{M} y la densidad de carga magnética ρ_m magnitudes que aunque no existen físicamente, se utilizan aquí para dar un carácter de simetría a las ecuaciones de Maxwell.

2.2.2. Principio de equivalencia física

El principio de equivalencia física proviene del teorema de equivalencia de superficie principio de Huygen. El teorema permite determinar el campo de zona lejana de una estructura radiante si el campo en zona cercana es conocido, o crear una ecuación integral de superficie que permita resolver la corrientes inducidas sobre un objeto debido a un campo incidente sobre éste. Adicionalmente el teorema permite formular un

2.2 Bases teóricas

equivalente físico al remover un objeto conductor dispersor y remplazarlo al mismo por unas corrientes de superficie equivalentes. Así por ejemplo si se tienen unas corrientes impresas \mathbf{J}^i y \mathbf{M}^i que generan los campos eléctricos y magnéticos incidentes \mathbf{E}^i y \mathbf{H}^i respectivamente en una región homogénea con parámetros ϵ_1 y μ_1 , al introducir un objeto conductor en ésta misma región, los campos eléctrico y magnético reflejados (o dispersados) \mathbf{E}^s y \mathbf{H}^s son creados, tal como se ilustran en la Figura.2.1. El objetivo es determinar los campos dispersados creando un problema equivalente. En tal caso las expresiones del equivalente físico son planteadas de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}) = \mathbf{J}_s \quad (2.7)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^s + \mathbf{H}^i) = \mathbf{J}_s \quad (2.8)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}) = \mathbf{M}_s = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i) = \mathbf{M}_s = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

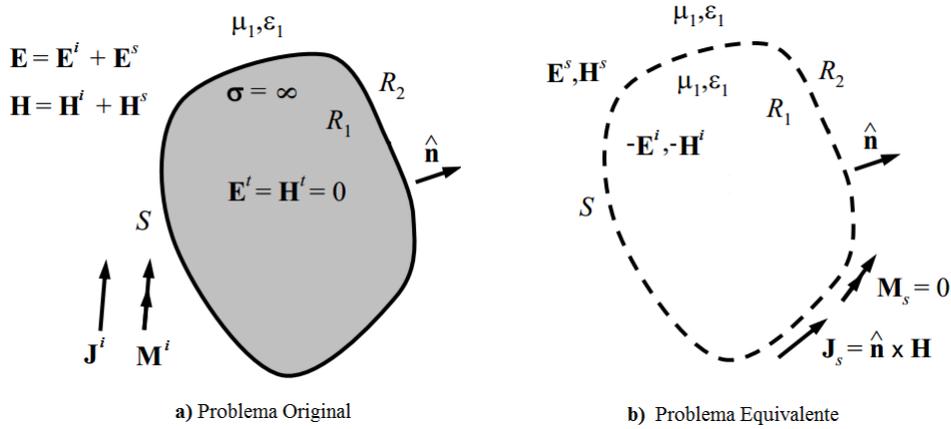


Figura 2.1: Equivalente Físico. Fuente: Gibson,Walton C, "The method of moments in electromagnetics"

donde \mathbf{E} y \mathbf{H} representan las intensidades de los campos eléctrico y magnético totales fuera del dispersor, \mathbf{E}^i y \mathbf{E}^s representan las componentes incidente y dispersada respectivamente del campo eléctrico, \mathbf{H}^i y \mathbf{H}^s representan las componentes incidente y dispersada del campo magnético incidente y dispersado respectivamente y \mathbf{J}_s y \mathbf{M}_s representan la densidad de corriente eléctrica y magnética equivalente respectivamente en la superficie del elemento dispersor y $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario normal a la superficie del dispersor.

2.2.3. Ecuaciones integrales

En los problemas de dispersión electromagnética es de interés la determinación las corrientes inducidas \mathbf{J}_s y \mathbf{M}_s sobre el elemento dispersor las cuales son en principio desconocidas, para posteriormente integrar ellas con el fin de obtener los campos dispersados \mathbf{E}^s y \mathbf{H}^s .

Las ecuaciones integrales son una clase especial de ecuación donde la variable desconocidas \mathbf{J}_s y \mathbf{M}_s se encuentran en el integrando de la ecuación. Posteriormente la ecuación integral puede ser resuelta empleando un método numérico, tal como el método de los momentos (MoM).

De acuerdo a [13] las ecuaciones integrales en la teoría de campo electromagnético pueden ser clasificadas de acuerdo a su forma matemática y a su dominio geométrico en donde ellas son definidas. De acuerdo a su forma matemática las ecuaciones integrales son clasificadas como:

1. Ecuación integral de Fredholm de primera clase:

$$\mathcal{L}f = g \tag{2.11}$$

2. Ecuación integral de Fredholm de segunda clase:

$$\mathcal{L}f + f = g \tag{2.12}$$

donde \mathcal{L} es el operador integral definido explícitamente definido como [42]:

$$\mathcal{L} [f(\mathbf{r}')] \equiv \int_{V'} \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot f(\mathbf{r}') \cdot dV' \tag{2.13}$$

$\bar{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es el Kernel diádico, f es el campo o respuesta (variable desconocida a determinar) y g es la fuente o excitación (variable conocida).

De acuerdo al dominio geométrico del operador integral [13] ellas son clasificadas en:

1. Ecuación integral de superficie (Surface Integral Equation, SIE).
2. Ecuación integral de volumen (Volume Integral Equation, VIE)

En la SIE la variable desconocida f aparece como una función vectorial fuente definida en la superficie del dispersor, en cambio en la VIE la variable desconocida está definida sobre todo el volumen del dispersor.

La formulación de problemas de radiación involucra la obtención de los campos en cualquier punto en el espacio debido a un conjunto de fuentes eléctricas y magnéticas. Como se mencionó anteriormente un problema de dispersión también puede ser considerado un problema de radiación, entendiéndose que las corrientes locales son generadas por un conjunto diferente de corrientes o campos impresos. A continuación en primer lugar se detalla la formulación de las ecuaciones integrales para radiación

2.2 Bases teóricas

cuando únicamente la densidad de corriente \mathbf{J} y la densidad de carga existen. Tomando el rotacional de la ecuación (2.1) y combinando ésta con la ecuación (2.2) se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{H} = \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E} - j\omega\mu\mathbf{J} \quad (2.14)$$

utilizando la identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} \quad (2.15)$$

podemos escribir la anterior como:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} - \kappa^2\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} \quad (2.16)$$

donde k es el número de onda, $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$, utilizando la ecuación (2.3) en la ecuación de arriba obtenemos:

$$\nabla^2\mathbf{E} + \kappa^2\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{J} + \frac{\nabla\rho_e}{\epsilon} \quad (2.17)$$

empleando la ecuación de continuidad (2.5) nos permite obtener:

$$\nabla^2\mathbf{E} + \kappa^2\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{J} - \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{J})}{j\omega\epsilon} \quad (2.18)$$

En un medio lineal, homogéneo e isotrópico, las ecuaciones de Maxwell son lineales [17], por lo que el vector densidad de corriente puede considerarse como la superposición de fuentes puntuales distribuidas sobre algún volumen, por lo que si conocemos la respuesta de una fuente puntual, el problema original puede ser resuelto al integrar ésta respuesta sobre el volumen total. Esta idea es aplicada para convertir la ecuación (2.18) en una forma integral. Ya que la ecuación (2.18) comprende tres ecuaciones escalares separables, la componente \hat{x} puede ser escrita como:

$$\nabla^2 E_x + \kappa^2 E_x = j\omega\mu \left(J_x + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{J} \right) \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) posee la forma de una ecuación escalar de Helmholtz no homogénea. La solución a ésta ecuación puede ser obtenida utilizando el método de la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, la cual satisface la ecuación escalar de Helmholtz:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.20)$$

De acuerdo a lo señalado por [42] la función de Green es considerada como la respuesta impulsiva de un sistema electromagnético, donde tal sistema consiste del medio en el cual se manifiestan los efectos (los campos \mathbf{E} y \mathbf{H}) debido a las las fuentes (\mathbf{J}, \mathbf{M}).

Asumiendo que la función de Green es conocida, se puede obtener E_x por medio de:

$$E_x(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[J_x(\mathbf{r}') + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] dV' \quad (2.21)$$

2.2 Bases teóricas

generalizando, la solución general vectorial de la ecuación (2.18) se puede escribir como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left[1 + \frac{1}{\kappa^2} \nabla' \nabla' \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (2.22)$$

La expresión (2.22) permite calcular directamente el campo eléctrico de radiación debido a las densidad de corriente volumétrica \mathbf{J} integrando ésta sobre el elemento radiante.

Una expresión semejante a la ecuación (2.22) puede ser deducida a partir del vector potencial magnético. Debido a que el vector densidad de campo magnético es siempre un campo solenoidal, el mismo puede expresarse en función de la función vectorial denominada potencial magnético. De ecuación (2.4), conociendo que $\rho_m = 0$ (debido a que es una densidad de corriente ficticia), entonces

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.24)$$

sustituyendo la ecuación (2.24) en la ecuación (2.1) se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.25)$$

la cual se puede agrupar de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A}) = 0 \quad (2.26)$$

Debido a la identidad nula

$$\nabla \times (-\nabla \Phi_e) = 0 \quad (2.27)$$

podemos escribir el campo eléctrico como:

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \Phi_e \quad (2.28)$$

donde Φ_e es un potencial eléctrico arbitrario.

Al tomar el rotacional de ambos lados de la ecuación (2.24) y utilizando la identidad vectorial de la ecuación (2.15) aplicada al vector potencial magnético obtenemos:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}) \quad (2.29)$$

combinando la ecuación (2.29) con la ecuación (2.2) tenemos:

$$\mu \mathbf{J} + j\omega \mu \epsilon \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.30)$$

insertando la ecuación (2.28) en la ecuación (2.30) y factorizando el operador gradiente, tenemos:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \mu \epsilon \Phi_e) \quad (2.31)$$

Ya que conocemos el rotacional del vector potencial magnético es necesario conocer su divergencia, ya que al teorema de Helmholtz establece que todo campo vectorial está completamente definido si se conoce su rotacional y divergencia, podemos establecer la divergencia de \mathbf{A} siempre y cuando seamos coherentes con esa definición. La misma es conocida como condición de Lorentz, la cual establece que podemos hacer

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega \mu \epsilon \Phi_e \quad (2.32)$$

Aplicando ésta condición a la ecuación (2.31) la misma se simplifica como:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (2.33)$$

La cual es una ecuación vectorial de Helmholtz no homogénea. La solución del campo eléctrico en cualquier parte en un a región libre de fuentes expresado totalmente en función de \mathbf{A} es:

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \Phi_e = -j\omega \mathbf{A} - \frac{j}{\omega \mu \epsilon} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2.34)$$

donde \mathbf{A} está escrita en términos de la convolución de la densidad de corriente \mathbf{J} y la función de Green. La función de Green electrodinámica en tres dimensiones es [42]:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (2.35)$$

por lo que el vector potencia magnético \mathbf{A} , puede escribirse como la convolución de la densidad de corriente \mathbf{J} con la función de de Green:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{v}' = \mu \int_{V'} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' \quad (2.36)$$

Escribiendo la ecuación (2.34) en función de la convolución de la función de Green con la densidad de corriente \mathbf{J} dada por (2.36) obtenemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mu \int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{v}' - \frac{j}{\omega \epsilon} \nabla \left(\nabla \cdot \int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{v}' \right) \quad (2.37)$$

la ecuación (2.37) puede ser reescrita de la siguiente manera utilizando la siguiente relación con el número de onda: $\kappa = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$, resultando:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mu \left(\int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{v}' + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla \cdot \int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{v}' \right) \quad (2.38)$$

factorizando el termino $\int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}'$ en la ecuación (2.38) resulta:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \left[1 + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla \cdot \right] \int_{V'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.39)$$

donde la ecuación (2.39) es reescrita en notación de operadores como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu (\mathcal{L}\mathbf{J})(\mathbf{r}) \quad (2.40)$$

donde \mathcal{L} es el operador definido como:

$$(\mathcal{L}\mathbf{X})(\mathbf{r}) = \left[1 + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla \cdot \right] \int_{V'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{X}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.41)$$

Las ecuaciones (2.22) y (2.38) son equivalentes, la diferencia está en que los operadores diferenciales en el segundo termino de la ecuación (2.38) están fuera de la integral y operan sobre las coordenadas de observación, mientras que en la ecuación (2.22) estos operadores están dentro de la integral y operan sobre las coordenadas punto fuente. Una demostración de su equivalencia puede verse en [17].

El vector intensidad de campo magnético de radiación $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, se determina utilizando la expresión (2.24):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \int_{V'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') .dv' \quad (2.42)$$

La (ecuación (2.42)) pueden escribirse en notación de operadores la siguiente manera [17]:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = (\mathcal{K}\mathbf{J})(\mathbf{r}) \quad (2.43)$$

donde \mathcal{K} es el operador definido como [17]:

$$(\mathcal{K}\mathbf{X})(\mathbf{r}) = \nabla \times \int_{V'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{X}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.44)$$

2.2.4. Ecuaciones integrales de superficie

En los problemas de radiación se requiere la integración de la corriente conocida \mathbf{J} para obtener los campos por medio de las ecuaciones (2.39) y (2.42). En problemas de dispersión, las densidades de corriente \mathbf{J} y \mathbf{M} son cantidades desconocidas. Así para resolver un problema de dispersión electromagnética se deben realizar los siguientes pasos:

1. Resolver una ecuación integral para corrientes locales desconocidas \mathbf{J} o \mathbf{M} creadas por campos incidentes conocidos \mathbf{E}^i o \mathbf{H}^i
2. Integrar las corrientes inducidas para obtener los campos dispersados \mathbf{E}^s y \mathbf{H}^s

2.2.5. Ecuación integral de campo eléctrico(EFIE)

El principio de equivalencia física permite seleccionar unas densidades de corrientes equivalentes de superficie $\{\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s\}$, en la superficie $S(V)$ de un dispersor metálico. Estas corrientes equivalentes están definidas como:

$$\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{M}_s = \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (2.45)$$

donde $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s$.

El campo eléctrico dispersado \mathbf{E}^s en función de la densidad de corriente equivalente \mathbf{J}_s puede ser escrito utilizando la ecuación (2.39) como:

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \left[1 + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla \cdot \right] \int_{S'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') ds' \quad (2.46)$$

o

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \left(\int_{S'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \cdot ds' + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla \cdot \int_{S'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \cdot ds' \right) \quad (2.47)$$

La dependencia de $\mathbf{E}^s(\mathbf{r})$ en la ecuación (2.47) puede ser eliminada al hacer cumplir las condiciones de borde de la componente tangencial del campo eléctrico obtenida del equivalente físico dada por la ecuación (2.10), la cual puede ser reescrita como:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i) = 0, \quad \mathbf{M}_s = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^s = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i \quad (2.48)$$

realizando esto, la ecuación (2.47) puede ser reescrita en términos del campo eléctrico incidente $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$ como:

$$-\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times \left[-j\omega\mu \left[1 + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla \cdot \right] \int_{S'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') ds' \right] \quad (2.49)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times j\omega\mu \left[1 + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla \cdot \right] \int_{S'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') ds' \quad (2.50)$$

en notación de operadores es [17]:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times j\omega\mu (\mathcal{L}\mathbf{J}_s)(\mathbf{r}) \quad (2.51)$$

La ecuación (2.50) es conocida como **ecuación integral de campo eléctrico** (Electrical Field Integral Equation, **EFIE**), para superficies perfectamente conductoras. Esta ecuación integral es de tipo Fredholm de primera clase, donde el vector $\mathbf{J}_s(\mathbf{r})$ únicamente aparece dentro del signo de la integral. La ecuación (2.50) será la utilizada para su discretización utilizando MoM y las funciones base RWG.

Es importante destacar que la ecuación (2.50) puede ser reescrita de forma diferente de tal forma que su utilización sea más manejable para obtener un sistemas de ecuaciones lineales usando el método de los momentos para interacciones cercanas y tener una forma alternativa cuando solo sean tomadas en cuenta la interacciones lejanas, la cuales son consideradas al momento de utilizar el método de los multipolos rápidos.

Para esto último la EFIE puede ser transformada utilizando la siguiente identidad:

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi \quad (2.52)$$

Haciendo uso de la identidad (2.52) y tomando en cuenta que $\nabla \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') = 0$ y $\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, el segundo termino de la ecuación (2.50) puede reescribirse como:

$$\nabla \nabla \cdot \int_{S'} \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' = -\nabla \int_{S'} \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' \quad (2.53)$$

e introduciendo el operador gradiente en la integral, y utilizando la identidad vectorial:

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (2.54)$$

se tiene

$$\nabla [\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \cdot \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = [\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \cdot \nabla] \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.55)$$

termino que se puede expresar en forma diádica como[29]:

$$[\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \cdot \nabla] \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \cdot [\nabla \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \quad (2.56)$$

y al substituir ésta en la ecuación (2.50) se obtiene:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times j\omega\mu \int_{S'} \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \cdot \left[\bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla' \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' \quad (2.57)$$

donde el termino $\left[\bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla' \right]$ es un operador diferencial diádico, siendo $\bar{\mathbf{I}}$ la diada unitaria. La aplicación de éste operador a la función de Green, se interpreta como una función de Green tensorial, de la siguiente manera:

$$\bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left[\bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla' \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.58)$$

2.2.6. Ecuación integral de campo magnético(MFIE)

Una ecuación integral para el campo magnético también puede ser derivada al forzar las condiciones de frontera magnéticas en la superficie del elemento conductor. Del equivalente físico dado por la ecuación (2.8) , la cual reescribimos nuevamente abajo tenemos:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^s + \mathbf{H}^i) = \mathbf{J}_s \quad (2.59)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el versor normal a la superficie. Escribiendo el campo magnético dispersado como:

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \int_{S'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') ds' \quad (2.60)$$

De acuerdo a [17] puede tomarse cuando \mathbf{r} se aproxima a S desde fuera del objeto ($\mathbf{r} \rightarrow S^+$) se puede sustituir la expresión de $\mathbf{H}^s(\mathbf{r})$ de la ecuación (2.60) en la ecuación (2.59), en lo que resulta:

$$\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \lim_{\mathbf{r} \rightarrow S^+} \left[\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \int_{S'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') ds' \right] \quad (2.61)$$

El operador rotacional es desplazado dentro de la integral usando la siguiente identidad:

$$\nabla \times [\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') - \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.62)$$

y ya que el operador rotacional solo opera sobre punto de observación, se tiene $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$ y usando el hecho de que $\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, la evaluación de la ecuación (2.61) resulta [17]:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r})}{2} - \hat{\mathbf{n}} \times \int_{S' - \delta S} \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot ds' \quad (2.63)$$

En los casos donde una pequeña superficie δS no es localmente plana, tal como la punta de un cono o el borde compartido de dos facetas planas, una modificación de la ecuación (2.63) es necesaria para incluir el ángulo sólido Ω_0 , exterior a la superficie en el punto \mathbf{r} [17], resultando:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \left[1 - \frac{\Omega_0}{4\pi} \right] \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{n}} \times \int_{S' - \delta S} \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot ds' \quad (2.64)$$

En el caso de geometrías suaves, el ángulo sólido exterior es $\Omega_0 = 2\pi$ en cada punto de observación y la ecuación (2.64) se reduce a la ecuación (2.63). En notación de operadores la ecuación (2.63) es:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r})}{2} - \hat{\mathbf{n}} \times (\mathcal{K}\mathbf{J}_s)(\mathbf{r}) \quad (2.65)$$

La ecuación (2.64) es conocida como ecuación integral de campo magnético, con iniciales en inglés **MFIE** de Magnetic Field Integral Equation. Ésta ecuación es del tipo Fredholm de segunda clase donde la densidad de corriente aparece dentro y fuera de la integral. Debido a que ésta ecuación ha sido derivada de un proceso límite argumentado para superficies cerradas la misma no puede ser aplicada superficies abiertas o superficies muy delgadas a diferencia de la EFIE[17].

2.2.7. Ecuación integral campo combinada (CFIE)

Cuando se aplican las ecuaciones integrales EFIE y MFIE, las mismas no producen una única respuesta para todas las frecuencias. Este problema típicamente aparece dentro de pequeños anchos de banda alrededor de las frecuencias de resonancia de un dispersor cerrado o que contenga cavidades, donde los resultados contienen la solución deseada más una cantidad de soluciones espurias correspondientes a las frecuencias de resonancia, ver Sección.2.2.11. El método de facto para eliminar las frecuencias de resonancia es una combinación lineal de la EFIE y MFIE, la cual es referida como ecuación integral de campo combinado, con siglas en ingles **CFIE** de Combined Field Integral Equation [24].

Ésta nueva ecuación hace cumplir las condiciones de borde del campo eléctrico y magnético y está libre de soluciones espurias. La CFIE puede ser escrita como [35]:

$$\alpha \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j} \omega \mu (\mathcal{L} \mathbf{J}_s) (\mathbf{r}) + (1 - \alpha) \eta \left(\frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r})}{2} - \hat{\mathbf{n}} \times (\mathcal{K} \mathbf{J}_s) (\mathbf{r}) \right) = \alpha \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + (1 - \alpha) \eta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) \quad (2.66)$$

donde η es la impedancia intrínseca del medio y α es un coeficiente de ponderación elegido para que las soluciones espurias sean eliminadas. De acuerdo a [17] menciona que el rango de α es de $0,2 \leq \alpha \leq 0,5$ mientras que, $\alpha = 0,2$ típicamente representa una buena elección debido a que se ha demostrado que minimiza el error de la corriente bajo algunas condiciones en problemas en dos dimensiones [35].

2.2.8. El método de los momentos

Las ecuaciones (2.50), (2.63) y (2.66) pueden ser discretizadas utilizando el método de los momentos (también conocido como método de los residuos ponderado) para formar un sistema lineal de ecuaciones. En éste método, una ecuación no homogénea puede escribirse como:

$$\mathcal{L}(f) = g \quad (2.67)$$

donde \mathcal{L} es un operador lineal, g es una función forzante conocida y f es la función desconocida. En problemas electromagnéticos \mathcal{L} es un operador integro-diferencial y f es la función desconocida (carga, corriente) y g es conocida como excitación fuente (campo incidente). Las función f puede ser expandida en una suma de N funciones base ponderadas f_n de la siguiente forma [21]:

$$\mathbf{f} \approx \sum_{n=1}^N I_n f_n \quad (2.68)$$

donde los I_n son coeficientes de peso o ponderación desconocidos, las $\{f_n\}$ son conocidas como funciones de expansión o funciones bases. Ya que \mathcal{L} es operador lineal, substituyendo ecuación (2.68) en la ecuación (2.67) resulta

$$\sum_{n=1}^N I_n \mathcal{L}(f_n) \approx \mathbf{g} \quad (2.69)$$

donde el error residual resultante es

$$\mathbf{R} = \mathbf{g} - \sum_{n=1}^N I_n \mathcal{L}(f_n) \quad (2.70)$$

las funciones base son elegidas de tal modo que el modelo tenga el comportamiento esperado de la función desconocida a través de su dominio, por ejemplo, si se modela una antena con alambres tipo rectas, en una porción del alambre se definen segmentos donde se establecen funciones base escalares, y si se modela la antena con una geometría superficial, como por ejemplo triángulos o parches, en estos parches se establecen funciones bases vectoriales. Si las funciones base solo aproximan la función corriente en un dominio pequeño desconocido ellas son conocidas funciones base locales. Si las funciones base modelan la corriente total en el dispersor o antena ellas se denominan funciones base de dominio entero o globales.

Para generalizar, en el método se define un producto interno o *momento* entre un conjunto de funciones base $\{f_n(\mathbf{r})\}$ y un conjunto de *funciones de prueba* o peso $\{w_m(\mathbf{r})\}$, con $m=1,2,\dots,N$, dado por [17]:

$$\langle w_m, f_n \rangle = \int_{w_m} w_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{f_n} f_n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (2.71)$$

donde las integrales pueden ser de línea, superficie o volumen dependiendo de las funciones bases y de prueba. El producto interno describe la proyección de una función sobre otra [16]. Requiriendo N **productos internos** de cada función de prueba con la función residual igual a cero, resulta:

$$\langle w_m, \mathcal{L}(f) \rangle = \langle w_m, \mathbf{g} \rangle \quad m = 1, 2, \dots, N$$

de acuerdo a [42] se pueden intercambiar los operadores $\mathcal{L} \leftrightarrow \sum$ resultando el producto interno como:

$$\left\langle w_m, \mathcal{L} \sum_{n=1}^N I_n f_n \right\rangle = \langle w_m, \mathbf{g} \rangle \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (2.72)$$

Posteriormente intercambiando los operadores $\langle \rangle \leftrightarrow \sum$ resulta

$$\sum_{n=1}^N I_n \langle w_m, \mathcal{L}(f_n) \rangle = \langle w_m, \mathbf{g} \rangle \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (2.73)$$

En forma matricial de acuerdo a [21] la ecuación (2.71) puede escribirse como

$$[l_{mn}] [I_n] = [g_m] \quad (2.74)$$

sistema que se puede expandir de la forma:

$$\begin{aligned}
 I_1 \langle w_1, \mathcal{L}f_1 \rangle + I_2 \langle w_1, \mathcal{L}f_2 \rangle + \dots + I_N \langle w_1, \mathcal{L}f_N \rangle &= \langle w_1, g \rangle \\
 I_1 \langle w_2, \mathcal{L}f_1 \rangle + I_2 \langle w_2, \mathcal{L}f_2 \rangle + \dots + I_N \langle w_2, \mathcal{L}f_N \rangle &= \langle w_2, g \rangle \\
 &\vdots \\
 I_1 \langle w_N, \mathcal{L}f_1 \rangle + I_2 \langle w_N, \mathcal{L}f_2 \rangle + \dots + I_N \langle w_N, \mathcal{L}f_N \rangle &= \langle w_N, g \rangle
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

lo cual resulta en una ecuación matricial $[Z][I] = [V]$ de orden $N \times N$, con cada elemento de la matriz dado por:

$$[Z_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, \mathcal{L}f_1 \rangle + \langle w_1, \mathcal{L}f_2 \rangle + \dots + \langle w_1, \mathcal{L}f_N \rangle \\ \langle w_2, \mathcal{L}f_1 \rangle + \langle w_2, \mathcal{L}f_2 \rangle + \dots + \langle w_2, \mathcal{L}f_N \rangle \\ \vdots \\ \langle w_N, \mathcal{L}f_1 \rangle + \langle w_N, \mathcal{L}f_2 \rangle + \dots + \langle w_N, \mathcal{L}f_N \rangle \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

$$[I] = [I_n] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

$$[V] = [g_m] = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \vdots \\ \langle w_N, g \rangle \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

La matriz $[Z]$ es conocida [42] como matriz del sistema, corrientemente denominada matriz de impedancias, con $Z_{m,n} = \langle w_m, \mathcal{L}(f_n) \rangle$. La matriz $[I]$ se le conoce como vector de pesos incógnita de orden $(N \times 1)$ y la matriz $[V]$ es el vector columna de valores conocidos de orden $(N \times 1)$ dado por $V_m = \langle w_m, g \rangle$, también conocido como vector excitación. Si la matriz $[Z]$ es no singular su inversa existe. El vector incógnita esta dado por:

$$[I] = [Z]^{-1} [V] \tag{2.79}$$

2.2.8.1. Método de Galerkin

En el método de los momentos, cuando se elige una función de peso o prueba $w(\mathbf{r})$ idéntica a una función base $f(\mathbf{r})$ a esto se le conoce como método de Galerkin[21]

2.2.9. Teoría de proyección de autovalores

El método para encontrar las soluciones a una ecuación no homogénea como la ecuación (2.67), mediante el método de los momentos, puede aplicarse a una ecuación lineal de autovalores, donde la soluciones a ésta, denominadas autofunciones (eigenfunctions) existen para unos valores particulares de un parámetro conocido como autovalor (eigenvalue en ingles). Los autovalores del operador continuo \mathcal{L} de la ecuación ecuación (2.67) pueden ser encontrados de la solución de la ecuación de autovalores [21]:

$$\mathcal{L}(f) = \lambda.M(f) \quad (2.80)$$

donde \mathcal{L} y M son operadores lineales, λ son los autovalores y las soluciones correspondientes a f son las autofunciones, lo cual significa que la solución a la ecuación (2.67) no homogénea puede ser hallada encontrando un conjunto de autovalores (λ), tales que multiplicados por la solución del operador M sobre f produzcan la misma solución $\mathcal{L}(f)$. La ecuación ecuación (2.80) se considera importante ya que los parámetros físicos característicos de un problema en estudio frecuentemente corresponden a los autovalores de la ecuación ecuación (2.80).

Aplicando el procedimiento de discretización que se realizó a la ecuación ecuación (2.67) se tiene:

$$f \approx \sum_{n=1}^N I_n f_n \quad (2.81)$$

donde los α_n son constantes. Substituyendo ecuación (2.81) en la ecuación (2.80) y aplicando la propiedad de linealidad a la ecuación (2.80) se transforma:

$$\sum_{n=1}^N I_n \langle w_m, \mathcal{L}(f_n) \rangle = \lambda \sum_{n=1}^N I_n \langle w_m, M(f_n) \rangle \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (2.82)$$

Se asume que un producto interno adecuado $\langle f, g \rangle$ ha sido defino de acuerdo a la ecuación (2.71). El sistema discreto se escribe como una ecuación matricial de la siguiente manera [21]:

$$[l_{mn}] [I_{mn}] = \lambda [m_{mn}] [I_{mn}] \quad (2.83)$$

donde los elementos de la matriz $[l_{mn}]$ son :

$$[l_{mn}] = \langle w_m, \mathcal{L}f_n \rangle \quad (2.84)$$

y los elementos de la matriz $[m_{mn}]$ son:

$$[m_{mn}] = \langle w_m, Mf_n \rangle \quad (2.85)$$

Si se asume que la matriz $[m_{mn}]$ es no singular, la ecuación (2.85) puede escribirse como:

$$M^{-1} \mathcal{L}(f) = \lambda f \quad (2.86)$$

De acuerdo a lo anunciado por A. F. Peterson [26], los autovalores λ de la ecuación (2.86) deben ser aproximados a los autovalores obtenidos de la ecuación (2.67). La ecuación (2.86) es una ecuación matricial de dimensión finita y posee al menos N autovalores independientes. El operador continuo \mathcal{L} en general posee un número infinito de autovalores [26].

2.2.10. Espectro de autovalores

Ya que el operador \mathcal{L} visto en el método de los momentos, tiene su representación matricial que es la matriz $[Z_{mn}]$, los autovalores de ésta matriz representan el espectro de autovalores aproximado del operador \mathcal{L} [27].

De acuerdo a la teoría de álgebra lineal, la ecuación :

$$Ax = b \quad (2.87)$$

tendrá una solución no trivial distinta de cero, siempre y cuando el $\det(A) \neq 0$. Si $\det(A) = 0$, la matriz A es singular y por lo tanto no invertible [32]. Una manera de determinar si la matriz A es singular es mediante el cálculo de los autovalores de ésta matriz.

El número λ es un autovalor de A si y únicamente si $(A - I\lambda)$ es singular, o lo que lo mismo decir :

$$\det(A - I\lambda) = 0 \quad (2.88)$$

donde I es la matriz identidad. Una relación importante entre los autovalores de la matriz A de orden $n \times n$ y el $\det(A)$ es la siguiente [32]:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n \quad (2.89)$$

donde se verifica que el $\det(A)$ es igual producto de todos los autovalores de la matriz A . La ecuación (2.89) es importante porque verifica que si existe al menos un autovalor de la matriz A que sea igual a cero, significa que su determinante es igual a cero y como consecuencia la matriz A es singular.

El espectro de autovalores de una matriz es el conjunto de todos sus autovalores, los cuales pueden ser números reales o complejos y cuyo espectro se representa en un plano complejo donde el eje X representa los valores reales y el eje Y representa los valores imaginarios. Ésta representación permite determinar el tipo de comportamiento de la matriz desde el punto de vista de su clasificación (Hermitiana, definida positiva, definida semi positiva, definida negativa y si es singular o no singular) y aportar propiedades del tipo de operador del cual proviene mediante la discretización del mismo mediante MoM para ecuaciones integrales como las tratadas en ésta investigación.

Los autovalores de las matrices que provienen de la discretización de los operadores de las ecuaciones integrales EFIE y MFIE, tienen un significado físico relacionado a las frecuencias internas de resonancias de un dispersor cerrado.

2.2.11. Problemas de resonancias Internas.

En las ecuaciones EFIE y MFIE existen ciertas frecuencias donde los operadores integrales \mathcal{L} para la EFIE y $(1 - \mathcal{K})$ para la MFIE se hacen singulares, lo cual corresponde a soluciones no triviales de problemas de contorno de las ecuaciones de Maxwell o resonancias internas de cavidades formadas en el interior del dispersor [35]. Esto significa que a la frecuencia de resonancia la cavidad formada por el dispersor cerrado, tanto la EFIE y la MFIE tienen soluciones de espacio nulo, lo cual implica que tienen una solución distinta de cero cuando no existe excitación.

Cuando se resuelve la EFIE imponiendo la condición de frontera $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = 0$ en la superficie del conductor, el campo eléctrico dentro del mismo no se extingue dentro del mismo si la frecuencia de la onda incidente es la frecuencia de resonancia de la cavidad formada por PEC, por lo que existirá una solución interna no trivial dentro de esta cavidad para la EFIE, lo cual representa una solución del espacio nulo para la ecuación:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}\omega\mu (\mathcal{L}\mathbf{J}_s)(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.90)$$

Cuando las ecuaciones EFIE o MFIE son únicamente aplicadas de forma individual la matriz del operador discretizado que resulta de aplicar el método de los momentos tiene un elevado número de condición cuando la frecuencia está cerca de la frecuencia de resonancia, esto trae como consecuencia que el método iterativo que se utilice para obtener la solución de la ecuación integral no converja o el tiempo de convergencia sea muy elevado en comparación con el tiempo de convergencia de matrices con bajo número de condición.

Para la EFIE el operador se hace singular a las frecuencias de resonancias para condiciones de borde tipo PEC mientras para la MFIE las resonancias internas están asociadas a las condiciones de frontera para conductores magnéticos perfectos (PMC).

Para un dispersor cerrado una resonancia interna esta asociada con una cavidad de resonancia ficticia que tiene la misma forma del dispersor[35]. Esta resonancia interna no es física en el sentido que aún si el dispersor es hueco la energía no puede entrar al interior desde a fuera del dispersor. Numéricamente una resonancia interna se manifiesta con un autovalor igual a cero del operador EFIE cuando el material es de tipo PEC y de la misma manera un autovalor cero está asociado a una resonancia interna para la MFIE cuando el material dispersor es de tipo PMC. Estas resonancias internas tienen un impacto en el método numérico las cuales afectan significativamente la exactitud de la solución.

2.2.11.1. Relaciones entre operadores y autovalores

Los operadores son caracterizados por las autofunciones y sus correspondientes autovalores. Algunos de los operadores más importantes y sus propiedades se dan en la Tabla 2.1

Tipo de operador	Propiedades de los autovalores(λ)
Hermitiano	todos los λ son reales y mayores > 0
Definido semi-positivo	si la parte real de los λ son ≥ 0
Definido positivo	si la parte real de los λ son > 0
Definido Negativo	si la parte real de los autovalores son < 0
No singular	$\lambda \neq 0$

Tabla 2.1: Operadores y las propiedades de sus autovalores [16]

2.2.12. Funciones base Rao-Wilton- Glisson

Las funciones base Rao-Wilton-Glisson (RWG) son funciones base tipo subdominio, definidas sobre parches triangulares planos adyacentes, las cuales son usadas para aproximar la corriente sobre la superficie del parche triangular [28]. Esta función esta definida como:

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{L_n}{2A^+} \boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}) & \forall \mathbf{r} \text{ en } T_n^+ \\ \frac{L_n}{2A^-} \boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}) & \forall \mathbf{r} \text{ en } T_n^- \\ 0 & \text{en otro lugar} \end{cases} \quad (2.91)$$

donde de acuerdo a [5], L_n es la longitud de una orilla común, A^\pm es el área del triángulo T_n^\pm , T_n^+ y T_n^- son los triángulos que comparten el borde n , $\boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r})$ es el vector posición desde el vértice libre del triángulo T_n^+ hasta un punto cualquiera en T_n^+ y $\boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r})$ es el vector posición desde un punto cualquiera de T_n^- hasta el vértice libre de T_n^- , tal como se representa en la Figura.2.2.

En las ecuaciones integrales EFIE, MFIE y CFIE la densidad de corriente equivalente \mathbf{J}_s es una función vectorial desconocida la cual se desea obtener debido a que los campos dispersados dependen de ella, y la forma de obtener una aproximación de ésta densidad de corriente es mediante una expansión de funciones base \mathbf{f}_n de la forma de la ecuación (2.91) que también serán funciones vectoriales.

De acuerdo a [17], la densidad de corriente \mathbf{J}_s , puede escribirse como:

$$\mathbf{J}_s \approx \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (2.92)$$

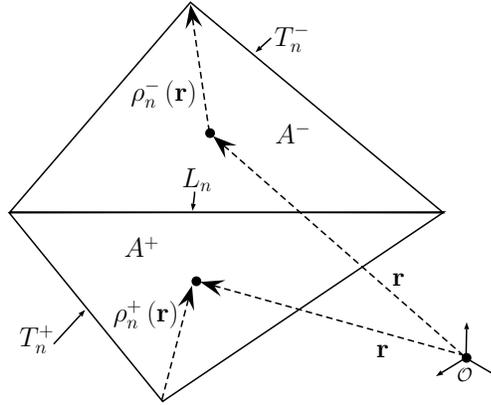


Figura 2.2: Función base Rao-Wilton-Glisson

y por lo establecido por [28] las función base RWG son apropiadas para aproximar las corrientes sobre el parche triangular debido a:

- La corriente(excluyendo a la orilla común) no tiene componente normal al contorno de la superficie formada por los triángulos T_n^\pm .
- La componente de la corriente normal a la n -ésima orilla es constante y continua a lo largo de la orilla.

2.2.13. El método de los multipolos rápidos (FMM)

El método de los multipolos rápidos (Fast Multipole Method, FMM) es un algoritmo numérico creado por Leslie Greengard and Vladimir Rokhlin [19] para reducir la complejidad computacional de un problema[17]. Éste algoritmo de acuerdo a estos autores es presentado para la evaluación del potencial y campos de fuerza en sistemas que involucran gran número de partículas cuyas interacciones son de tipo Coulombianas o gravitacionales. De acuerdo a [8] este algoritmo proporciona un mecanismo numérico eficiente para la convolución numérica de la función de Green en la ecuación de onda de Helmholtz, el cual puede ser utilizado radicalmente para acelerar la solución iterativa de ecuaciones integrales reduciendo la complejidad computacional de la convolución de $\mathcal{O}(N^2)$ a $\mathcal{O}(N^{3/2})$, donde N es el número de variables desconocidas en la discretización del problema. Éste algoritmo puede ser aplicado al método de los momentos, ya que de acuerdo [17] una de las complejidades computacionales encontradas al aplicar el MoM a grandes problemas es el llenado en memoria de la matriz $[Z]$ del sistema con un potencial tiempo de cómputo de factorización muy grande de ésta matriz.

Cuando este método es aplicado a problemas electromagnéticos, las iteraciones entre grupos de funciones que tienen una distancia de separación grande puede ser evaluadas muy rápidamente, mediante la agrupación de muchas funciones bases y tratando a éstas como si éstas fueran una única función base [17]. Una ventaja de aplicar éste

método es que permite el cálculo del producto matriz-vector utilizando una solución mediante un método iterativo sin la necesidad de acumular muchos de los elementos de la matriz Z del sistema MoM.

En el contexto de problemas electromagnéticos utilizando MoM, la matriz del sistema es vista como un problema de N cuerpos donde cada elemento de la matriz es el campo radiado por una función base y recibido por otra función base. Mediante la utilización de FMM se evita la acumulación de muchos de los elementos de la matriz del sistema, permitiendo la solución de problemas de manera más rápida, así como la solución de grandes problemas que no podían ser intentados previamente por las limitaciones de memoria.

2.2.13.1. Producto Matriz-Vector

A continuación se explicará la ventaja de utilizar el método FMM aplicado a problemas de dispersión electromagnética resueltos mediante el método de los momentos.

En el método de los momentos la matriz Z del sistema representa todas las interacciones (campos) entre funciones bases \mathbf{f}_n y funciones de prueba \mathbf{f}_m y el vector I representa la excitación de cada subdominio fuente. Cuando se computa el producto matriz-vector $Z.I$, la fila m del vector columna V representa la sumatoria coherente de todos aquellos campos recibidos por la función de prueba \mathbf{f}_m debido los campos radiados por todas las funciones base fuentes \mathbf{f}_n . Esto se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V_m &= Z_m I \\ V_m &= [\langle \mathbf{f}_m, \mathcal{L}(\mathbf{f}_1) \rangle I_1 + \langle \mathbf{f}_m, \mathcal{L}(\mathbf{f}_2) \rangle I_2 \dots + \\ &\quad + \langle \mathbf{f}_m, \mathcal{L}(\mathbf{f}_n) \rangle I_n + \dots + \langle \mathbf{f}_m, \mathcal{L}(\mathbf{f}_N) \rangle I_N] \end{aligned} \quad (2.93)$$

La ecuación (2.93) se escribe en forma matricial compacta como:

$$V_m = [Z_{m1} \ Z_{m2} \ \dots \ Z_{mn} \ \dots \ Z_{mN}] \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

donde $Z_{mN} = \langle \mathbf{f}_m, \mathcal{L}(\mathbf{f}_N) \rangle$. Es importante destacar que la amplitud de las interacciones entre funciones base \mathbf{f}_n y la función de prueba \mathbf{f}_m disminuye rápidamente con la distancia entre subdominios o parches, así, si dividimos el espacio alrededor a las funciones base en dos regiones: una región cercana donde las interacciones son más fuertes y otra región lejana donde las interacciones son más débiles, tal como se muestra en la Figura.2.3, los puntos dentro del círculo de diámetro “ d ” alrededor del

2.2 Bases teóricas

punto A representan las funciones base cercanas a la función de prueba f_m y aquellos que están fuera del círculo representan las funciones base lejanas a ella. Visto ésto, la ecuación (2.94) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V_m &= Z_m I = [Z_{mn}^{\text{cercanos}} \quad Z_{mn}^{\text{lejanos}}] \begin{bmatrix} I_n^{\text{cercanos}} \\ I_n^{\text{lejanos}} \end{bmatrix} \\ V_m &= [Z_{mn}^{\text{cercanos}}] [I_n^{\text{cercanos}}] + [Z_{mn}^{\text{lejanos}}] [I_n^{\text{lejanos}}] \end{aligned} \quad (2.95)$$

donde los elementos de los subvectores Z_{mn}^{cercanos} y I_n^{cercanos} son debido a las funciones bases cercanas a la función de prueba m (f_m) y los elementos Z_{mn}^{lejanos} y I_n^{lejanos} son debido a las funciones bases lejanas a ésta, de tal manera que la matriz del sistema puede descomponerse como la suma de una matriz debido a las interacciones cercanas y otra debido a las interacciones lejanas, como se muestra en la ecuación (2.96):

$$Z = Z_{\text{cercana}} + Z_{\text{lejana}} \quad (2.96)$$

donde Z_{cercana} y Z_{lejana} son matrices dispersas. El producto matriz-vector puede escribirse como la suma de un producto cercano y un producto lejano como:

$$V = V_{\text{cercana}} + V_{\text{lejano}} = Z_{\text{cercana}}.I_{\text{cercana}} + Z_{\text{lejana}}.I_{\text{lejano}} \quad (2.97)$$

Lo que hace eficiente al método FMM es que permite un producto matriz-vector $[Z_{mn}^{\text{lejanos}}] [I_n^{\text{lejanos}}]$ acelerado, donde los elementos individuales Z_{mn}^{lejanos} no son calculados explícitamente y no son almacenados como elementos de la matriz Z del sistema, si no, que son calculados en plena ejecución del método iterativo utilizado para encontrar la matriz de corriente desconocida I . Por otra parte, los elementos Z_{mn}^{cercanos} son calculados explícitamente mediante MOM directo y son almacenados para luego ser utilizados en el producto matriz-vector $[Z_{mn}^{\text{cercanos}}] [I_n^{\text{cercanos}}]$, donde también son utilizados dentro del mismo algoritmo del método iterativo utilizado, mencionado anteriormente.

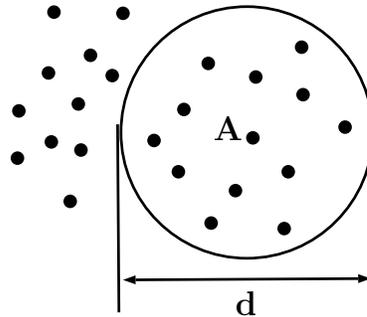


Figura 2.3: Funciones base cercanas y lejanas al punto A

2.2.13.2. FMM aplicado a problemas generales de N-Cuerpos

En un fenómeno físico, el cual pueda ser modelado como un problema de N cuerpos, la interacción o fuerza y_m , recibida por el cuerpo m-ésimo ubicado en la posición \mathbf{r}_m debida a todos los N cuerpos n-ésimos, ubicados en la posición \mathbf{r}'_n , puede escribirse como:

$$y_m(\mathbf{r}_m) = \sum_{n=1}^N \chi_n \Phi [K(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'_n)] \quad (2.98)$$

donde χ_n son magnitudes físicas propias de cada cuerpo fuente, $\Phi [.]$ es un operador lineal que modela el proceso físico y que es aplicado sobre el Kernel del sistema denotado por $K(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'_n)$, el cual es el encargado de cuantificar la interacción física entre los cuerpos [29].

Dependiendo del problema, el kernel tendrá una forma diferente. En el caso electrodinámico, el Kernel es la función de Green de la ecuación de Helmholtz tridimensional

$$K(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'_n) = \frac{e^{-j\kappa|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|}}{4\pi|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|} \quad (2.99)$$

Lo que se busca al aplicar el método multipolar rápido, es seleccionar un grupo de cuerpos y asociarle un nodo en común que permita tratar su interacción en conjunto [29]. Por lo tanto se debe desacoplar la dependencia de las posiciones fuentes \mathbf{r}'_n de las del punto de observación \mathbf{r}_m del Kernel, expresándolo de la siguiente manera :

$$K(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'_n) = K_1(\mathbf{r}_m) K_2(\mathbf{r}'_n) \quad (2.100)$$

Si las ecuaciones (2.99) y (2.100) son válidas para todo el dominio del problema, se dice que se ha realizado una factorización ideal del Kernel, por lo que la ecuación (2.98) puede escribirse como:

$$y_m(\mathbf{r}_m) = \Phi_m [K_1(\mathbf{r}_m)] \sum_{n=1}^N \chi_n \Phi [K_2(\mathbf{r}'_n)] \quad (2.101)$$

Como lo menciona [29], el resultado de la sumatoria de la ecuación (2.101), « reúne » o « agrega » las interacciones de todos los cuerpos en un solo nodo, en común.

2.2.13.3. Factorización de la función de Green.

El objetivo de la factorización de la función de Green es descomponer la generación de una onda que es radiada desde un punto fuente en un conjunto de ondas que son radiadas desde un punto cercano al punto fuente.

Para realizar esto partimos de la función de Green, nuevamente mostrada aquí:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-j\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (2.102)$$

donde \mathbf{r} es el punto de observación y \mathbf{r}' es la ubicación de la fuente. Ahora si se añade un pequeño desplazamiento vectorial \mathbf{x} en el punto campo, la ecuación (2.102) puede escribirse como:

$$\frac{e^{-j\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'+\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'+\mathbf{x}|} = \frac{e^{-j\kappa|\mathbf{R}+\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{R}+\mathbf{x}|} \quad (2.103)$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Siempre que $|\mathbf{x}| < |\mathbf{R}|$, la ecuación (2.103) puede ser expandida usando el teorema de adición para ondas esféricas [8, 7], el cual es:

$$\frac{e^{-j\kappa|\mathbf{R}+\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{R}+\mathbf{x}|} = -\frac{j\kappa}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) j_l(\kappa|\mathbf{x}|) h_l^{(2)}(\kappa|\mathbf{R}|) P_l(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \quad (2.104)$$

donde $j_l(x)$ es una función de Bessel esférica de primera clase, $P_l(x)$ es un polinomio de Legendre de orden l y $h_l^{(2)}(x)$ es la función esférica de Hankel de segunda clase definida como:

$$h_l^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+1/2}^{(2)}(x) = j_l(x) - jn_l(x) \quad (2.105)$$

donde $j_l(x)$ y $jn_l(x)$ son las funciones de Bessel esféricas de primera y segunda clase respectivamente y l el orden de todas las funciones antes señaladas. A pesar de que la función de Green (ecuación 2.104)) ha sido expandida utilizando el teorema de Adición, ésta aun posee términos acoplados de las variables punto fuente y punto campo, los cuales se encuentran en el polinomio de Legendre. Para poder desacoplar éstos términos se utiliza la expansión de ondas esféricas en términos de ondas planas[33]:

$$4\pi(-j^l) j_l(\kappa|\mathbf{x}|) P_l(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) = \oint_{4\pi} e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}} P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) d\Omega \quad (2.106)$$

donde la integral se realiza sobre una esfera unitaria con el vector unitario $\hat{\mathbf{k}}$ radialmente orientado sobre la esfera. $d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\phi$ es el diferencial de ángulo sólido. La ecuación (2.106) puede substituirse en la ecuación (2.104) e intercambiando la integral y la sumatoria, resulta:

$$\frac{e^{-j\kappa|\mathbf{R}+\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{R}+\mathbf{x}|} = \frac{\kappa}{(4\pi)^2} \oint_{4\pi} e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}} \sum_{l=0}^{\infty} (-j)^{l+1} (2l+1) h_l^{(2)}(\kappa|\mathbf{R}|) P_l(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) d\Omega \quad (2.107)$$

El intercambio entre la sumatoria y la integral será legítimo siempre que se trunque la sumatoria a un orden finito L , el cual limita los valores permisibles de \mathbf{R} y \mathbf{x} . Al realizar el truncamiento la ecuación (2.107) puede escribirse como:

$$\frac{e^{-j\kappa|\mathbf{R}+\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{R}+\mathbf{x}|} = \oint_{4\pi} e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{x}} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{R}) d\Omega \quad (2.108)$$

donde $T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{R})$ se denomina **función de transferencia** y viene dada por:

$$T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{R}) = \sum_{l=0}^L (-j)^{l+1} (2l+1) h_l^{(2)}(\kappa|\mathbf{R}|) P_l(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{R}}) \quad (2.109)$$

Esta función de transferencia permite convertir las ondas esféricas salientes desde un punto fuente a un conjunto de ondas esféricas entrantes a un punto de observación.

2.2.13.4. Traslación de ondas

Ahora se ilustrará el uso del teorema de adición al calcular la función de Green entre un punto fuente \mathbf{r}' y punto de observación \mathbf{r} . Se define al vector

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad (2.110)$$

e introducimos dos puntos \mathbf{a} y \mathbf{b} los cuales son muy cercanos a \mathbf{r} y \mathbf{r}' , respectivamente. Ver Figura.2.4. La ecuación (2.110) puede escribirse como:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{r} - \mathbf{a}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) - (\mathbf{r}' - \mathbf{b}) \quad (2.111)$$

o

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}_{ra} + \mathbf{r}_{ab} - \mathbf{r}'_{r'b} \quad (2.112)$$

donde $\mathbf{r}_{ra} = \mathbf{r} - \mathbf{a}$, $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{r}'_{r'b} = \mathbf{r}' - \mathbf{b}$.

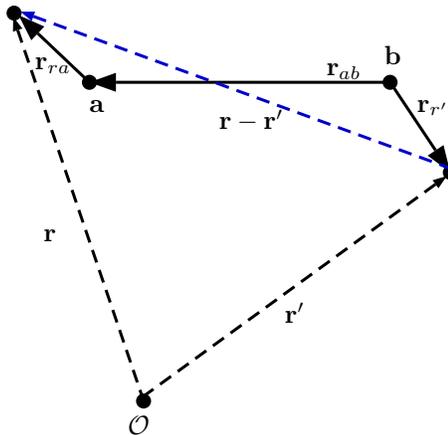


Figura 2.4: Traslación de onda

la ecuación (2.108) puede escribirse como:

$$\frac{e^{-j\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \oint_{4\pi} e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{r}_{\mathbf{a}}-\mathbf{r}'_{\mathbf{b}})} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{ab}}) d\Omega \quad (2.113)$$

donde

$$T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{ab}}) = \frac{\kappa}{(4\pi)^2} \sum_{l=0}^L (-j)^{l+1} (2l+1) h_l^{(2)}(\kappa|\mathbf{r}_{\mathbf{ab}}|) P_l(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{ab}}) \quad (2.114)$$

Una conclusión importante de la ecuación (2.114) es que ésta depende únicamente del vector $\mathbf{r}_{\mathbf{ab}}$ y si se desplaza una pequeña distancia los vectores \mathbf{r} y \mathbf{r}' desde su localización previa, ésta función de transferencia no cambiaría, por lo que el cómputo de la interacción entre cualquiera dos puntos lejanos \mathbf{a} y \mathbf{b} puede usar la misma función de transferencia.

La ecuación (2.113) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{e^{-j\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \oint_{4\pi} e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{\mathbf{a}}} e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{b}}} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{ab}}) d\Omega \quad (2.115)$$

Puede verse que en la ecuación (2.115) han quedado desacoplados los punto fuente y observación. La ecuación (2.115) puede escribirse ahora como:

$$\frac{e^{-j\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \oint_{4\pi} \mathbf{R}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{ab}}) \mathbf{T}(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{k}}) d\Omega \quad (2.116)$$

donde en el punto fuente \mathbf{r}' , se define la función de radiación:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{k}}) = e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_{\mathbf{b}}} \quad (2.117)$$

en la posición del punto campo \mathbf{r} se define la función recepción:

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) = e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{\mathbf{a}}} \quad (2.118)$$

Si ahora se mueve \mathbf{r}' o \mathbf{r} a otra posición, únicamente el cambio se produce en la función de radiación o recepción. Un resultado de esto, es el cómputo de una suma de las funciones de Green evaluadas en el punto campo \mathbf{r} , debido a muchos puntos fuentes \mathbf{r}'_n cercanas a \mathbf{b} . Usando la ecuación (2.116) lo anterior se puede expresar como:

$$\sum_{n=1}^N \frac{e^{-j\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_n|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_n|} = \oint_{4\pi} \mathbf{R}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{ab}}) \sum_{n=1}^N \mathbf{T}_n(\mathbf{r}'_n, \hat{\mathbf{k}}) d\Omega \quad (2.119)$$

donde la funciones de radiación son:

$$\mathbf{T}_n(\mathbf{r}'_n, \hat{\mathbf{k}}) = e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_{n\mathbf{b}}} \quad (2.120)$$

el arreglo de la ecuación (2.119) permite rápidamente calcular el producto matriz-

vector. Las funciones radiación para todas las funciones punto fuente son coherentemente añadidas(*agregadas*) para crear un campo local en \mathbf{b} , ver la Figura.2.4. Este campo es entonces transmitido utilizando la función de transferencia produciendo un campo local en \mathbf{a} , ver la Figura.2.4. El campo local es entonces multiplicado por la función recepción en el punto campo e integrado sobre la esfera unitaria(*desagregado*) produciendo la suma deseada [17].

2.2.14. Densidad de discretización

La densidad de discretización n_λ [35] es un parámetro muy utilizado al momento de tomar en cuenta la frecuencia a escoger para realizar un estudio de dispersión electromagnética. Este parámetro sin dimensión representa el número de orillas o elementos por longitud de onda. Esta viene dada por:

$$n_\lambda = \frac{\lambda}{h} \quad (2.121)$$

donde λ es la longitud de onda de operación y h es la longitud promedio de todas las orillas que conforman el elemento dispersor. Al momento de analizar y estudiar la dispersión electromagnética debido a un objeto PEC, se recomienda, como una regla del pulgar, que la densidad de discretización sea un número igual o mayor a 10 ($n_\lambda \geq 10$).

2.2.15. Criterio de selección de la frecuencia de muestreo

2.2.15.1. Criterio de para un mallado perfecto (criterio longitud RWG)

Para garantizar un mallado perfecto debe cumplirse:

$$\lambda_{\min} = 10 \cdot \ell_{\max} \quad (2.122)$$

donde ℓ_{\max} es la longitud máxima de las orillas de los triángulos utilizados para el mallado del dispersor y λ_{\min} es la longitud de onda mínima de operación para el estudio de la dispersión de un objeto.

2.2.16. El número de condición

El número de condición de una matriz es definido como:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \quad (2.123)$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma de la matriz. El número de condición también puede ser calculado mediante los autovalores de la matriz \mathbf{A} mediante el uso de la norma L^2 , usando la siguiente expresión:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{|\lambda_{\max}(\mathbf{A})|}{|\lambda_{\min}(\mathbf{A})|} \quad (2.124)$$

Este número de condición es también conocido como número de condición espectral [38], donde $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ y $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ son los autovalores mínimos y máximos de \mathbf{A} respectivamente. De acuerdo a [17] el número de condición es importante porque muchos elementos de la matriz $[\mathbf{Z}]$ de MoM y de la matriz de valores conocidos $[\mathbf{V}]$, son obtenidos por integración numérica, por lo que pequeños cambios en estos pueden ser magnificados en una matriz que está pobremente mal condicionada.

El número de condición de \mathbf{A} es una medida de cuan tan cerca esta a un operador a ser singular. Si la matriz \mathbf{A} es la identidad el número de condición es igual a uno(1). Si \mathbf{A} es singular, el número de condición es infinito, ya que posee al menos un autovalor igual a cero. Un operador con una valor elevado de número de condición, se dice ser mal condicionado [35].

El número de condición es una medida de la dificultad de la resolución del sistema lineal que proviene de la discretización. Es bien conocido que el número de condición crece en proporción inversa a la longitud de discretización promedio h de los lados de los triángulos [36].

2.2.17. Lapack

LAPACK es una biblioteca en código FORTRAN para resolver sistemas lineales densos, soluciones de mínimos cuadrados de sistemas de ecuaciones, problemas de valores propios y problemas de valores singulares [2]. Está disponible en el repositorio de Netlib en <http://www.netlib.org/lapack>, y puede usarse libremente en aplicaciones comerciales. Las rutinas LAPACK usan funciones BLAS para trabajo de bajo nivel y la implementación de BLAS debe acompañarse con una instalación de LAPACK. Al igual que con BLAS, versiones separadas de la mayoría de las rutinas LAPACK están disponibles para aritmética real y compleja en precisión simple y doble.

2.2.18. Integración sobre triángulos.

Debido a que en la presente investigación se utilizan las funciones base y peso tipo RWG las cuales aplican únicamente sobre subdominios triangulares, se explicará brevemente las técnicas numéricas de integración sobre éste tipo de geometría. Para ejecutar una integral sobre un dominio triangular resulta más efectivo realizar una transformación de un triángulo de forma arbitraria a un sistema canónico, denominado coordenadas simplex [17], donde mediante ésta transformación, resolver una integral mediante un método numérico de cuadratura resulta más fácil.

2.2.18.1. Coordenadas simplex.

La transformación a coordenadas simplex parte del conocimiento de los vectores dirigidos a los vértices de un triángulo de forma arbitraria, denominados v_1, v_2, v_3 y con orillas definidas como e_1, e_2 y e_3 , de un triángulo como el mostrado en la Figura.2.5, donde cada orilla de dicho triángulo vienen dadas por:

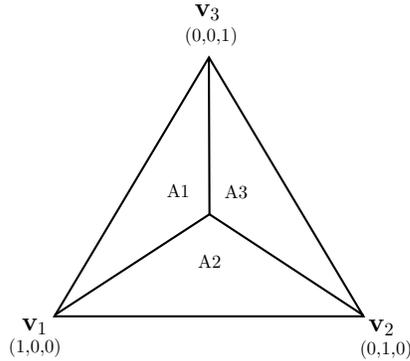


Figura 2.5: Coordenadas simplex para un triángulo

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 \quad (2.125)$$

Así, cualquier punto dentro del triángulo será escrito como una suma ponderada de tres vértices como:

$$\mathbf{r} = \gamma \mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_2 + \beta \mathbf{v}_3 \quad (2.126)$$

donde α , β y γ son las coordenadas simplex (también conocidas como coordenadas baricéntricas) dadas por:

$$\alpha = \frac{A_1}{A}, \quad \beta = \frac{A_2}{A}, \quad \gamma = \frac{A_3}{A}, \quad (2.127)$$

donde A es el área del triángulo " T " y A_1 , A_2 y A_3 son las sub áreas de los triángulos como se muestran en la Figura.2.5. Donde A_1 , A_2 , y A_3 cumplen con la relación:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A \quad (2.128)$$

y las coordenadas simplex están sujetas a cumplir:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (2.129)$$

por lo que el vector posición podrá escribirse como:

$$\mathbf{r} = (1 - \alpha - \beta) \mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_2 + \beta \mathbf{v}_3 \quad (2.130)$$

en el triángulo T, todas las tres coordenadas varían entre cero y uno, en particular las esquinas \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}_3 , las coordenadas simplex α, β y γ tomaran valores (1,0,0) (0,1,0) y (0,0,1) respectivamente. Como una consecuencia la integral de superficie de una función $f(\mathbf{r})$ sobre el triángulo se convierte:

$$\int_T f(\mathbf{r}) ds = \int_{T'} f(\alpha, \beta) |J(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta = 2A \int_{\alpha=0}^1 \int_{\beta=0}^{1-\alpha} f(\alpha, \beta) d\beta d\alpha \quad (2.131)$$

donde $2A = |J(\alpha, \beta)|$ es el módulo del Jacobiano. Por lo tanto las coordenadas simplex permiten realizar una interpolación lineal de una función $f(x,y)$ en los puntos dentro del triángulo si sus valores son conocidos en los vértices del mismo.

2.2.18.2. Regla de Cuadratura Gaussiana sobre triángulos

La integración sobre coordenadas de área normalizada o coordenadas simplex sobre triángulos , puede realizarse utilizando la regla de cuadratura Gauss Legendre presentadas en [11]. La integración de la función $f(\alpha, \beta)$ sobre el triángulo es ejecutada usando la Cuadratura Gauss Legendre de tal forma que:

$$2A \int_{\alpha=0}^1 \int_{\beta=0}^{1-\alpha} f(\alpha, \beta) d\beta d\alpha \approx A \sum_{n=1}^N w_n(\alpha_n, \beta_n) f(\alpha_n, \beta_n) \quad (2.132)$$

Aquí, A es el área del n-ésimo triángulo, N es el número de puntos de cuadratura. Las coordenadas simplex del punto de muestra $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ y el coeficiente de ponderación w_n , son dados en la Tabla.2.2 para 7 puntos de cuadratura y pueden ser encontrados en [11].

n	α_n	β_n	γ_n	w_n
1	0.3333333333333333	0.3333333333333333	0.3333333333333333	0.1125000000000000
2	0.059715871789770	0.470142064105115	0.470142064105115	0.066197076394253
3	0.470142064105115	0.059715871789770	0.470142064105115	0.066197076394253
4	0.470142064105115	0.470142064105115	0.059715871789770	0.066197076394253
5	0.797426985353087	0.101286507323456	0.101286507323456	0.062969590272414
6	0.101286507323456	0.797426985353087	0.101286507323456	0.062969590272414
7	0.101286507323456	0.101286507323456	0.797426985353087	0.062969590272414

Tabla 2.2: Puntos de la cuadratura Gauss Legendre y factores de ponderación sobre el triángulo T para N=7

2.2.19. Sección recta de radar(RCS)

La sección recta de radar(RCS por sus siglas en inglés) es una medida de la capacidad que tiene un objeto de reirradiar en la dirección de la antena receptora(radar). Se define la RCS, según la ecuación (2.136) como el área ficticia que interceptaría la cantidad de potencia incidente, la cual al ser re-irradiada(de manera isotrópica) produce en el receptor la misma densidad de potencia que el dispersor. Asumiendo que la densidad de potencia de una onda incidente sobre un objetivo(dispersor) localizado a la

distancia de zona lejana r desde el radar es S_{Di} , la cantidad de potencia reflejada desde el dispersor es:

$$P_r = \sigma S_{Di} \quad [W] \quad (2.133)$$

donde $\sigma(m^2)$ representa la RCS. Definiendo la S_{Dr} como la densidad de potencia de las ondas dispersadas o re-irradiadas de la antena receptora, ésta viene dada por:

$$S_{Dr} = \frac{P_r}{(4\pi r^2)} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (2.134)$$

igualando las ecuaciones 2.133 y 2.134 despejamos la sección recta de radar:

$$RCS = \sigma = 4\pi r^2 \left(\frac{S_{Dr}}{S_{Di}} \right) \quad [m^2] \quad (2.135)$$

y para asegurar que la antena receptora del radar esta en el campo lejano, es decir, que las ondas recibidas por la antena receptora sean ondas planas, la ecuación (2.135) se modifica como:

$$RCS = \sigma = 4\pi r^2 \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{S_{Dr}}{S_{Di}} \right) \quad [m^2] \quad (2.136)$$

Esta sección recta de radar también puede ser representada en unidades logarítmicas como :

$$dBsm = 10 \lg_{10} (\sigma) \quad (2.137)$$

2.2.20. RCS Monoestática

Los sistemas de radar que utilizan la misma antena para transmitir y recibir son denominados radares monoestáticos, por lo que la RCS que se mide utiliza las densidades de potencia transmitida por el radar (S_{Di}) y recibida por este (S_{Dr}) en una misma ubicación del sistema de medición. En la medición de esta figura de mérito la antena transmisora(Tx) y la antena receptora(Rx) poseen la misma ubicación. Ver Figura.2.6.

2.2.21. RCS Biestática.

En los sistemas de radar donde la ubicación de la antena transmisora y receptora no comparten la misma ubicación son denominados radares biestáticos. La medición de la RCS biestática se realiza dejando fija la antena transmisora(Tx) que emite las ondas electromagnéticas incidentes hacia el dispersor en una dirección específica y se mueve la antena receptora(Rx) alrededor del objetivo a una a la misma distancia de zona lejana en que esta la antena transmisora del dispersor. Ver Figura.2.7.

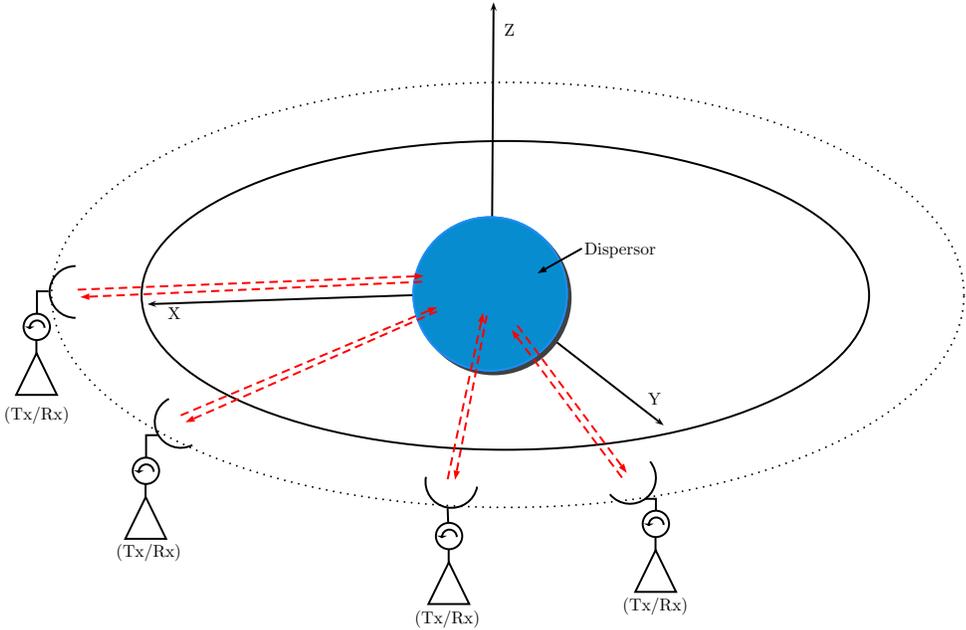


Figura 2.6: Medición de RCS monoestática

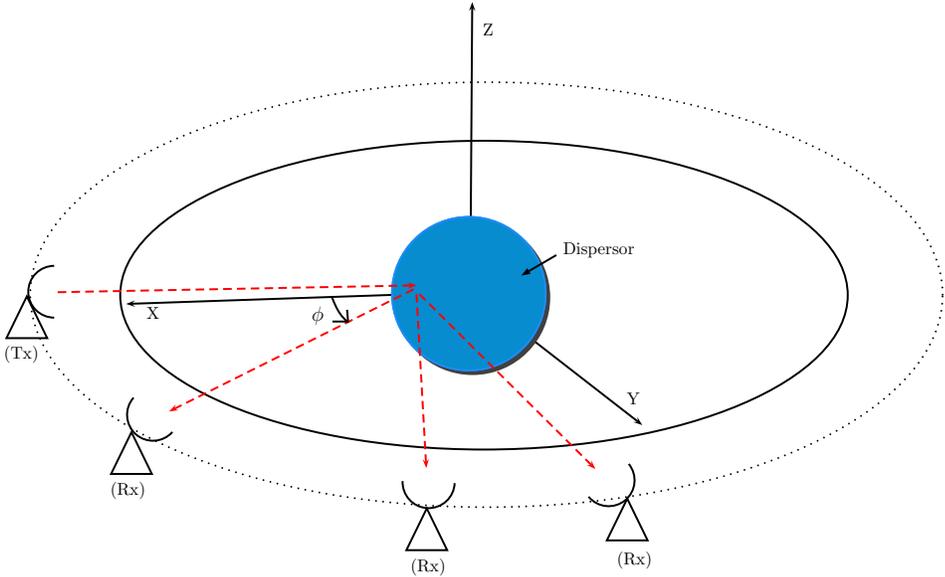


Figura 2.7: Medición de RCS Biestática

3 Procedimientos de la Investigación

3.1. Introducción.

En la determinación de la sección recta de radar (Radar Cross Section, RCS) de un objeto dispersor, los mecanismos computacionales más efectivos utilizados son el método de los multipolos rápidos o el algoritmo de los multipolos rápidos multinivel MLFMA (Multilevel Fast Multipole Algorithm) por lo que la razón de ser de ambos métodos, por el ejemplo, tal como se comentó en el capítulo II, Sección.2.2.13.1 para el FMM, es el no almacenamiento de los elementos de la matriz del sistema debido a las interacciones lejanas, garantizando un ahorro de memoria del computador y aumento en la velocidad en la determinación del vector de corrientes desconocidas I . A pesar de no ser almacenados los elementos debido a las interacciones lejanas, éstos si son utilizados para calcular el vector de corrientes desconocidas, ya que son calculados en plena ejecución del método iterativo utilizado para encontrar la solución al sistema de ecuaciones.

Por tanto, para cumplir con el objetivo principal de ésta investigación, se determinará explícitamente una matriz total del sistema compuesta tanto de los elementos debido las interacciones cercanas determinadas mediante MOM directo, la cual llamaremos Z_{cercana} y otra matriz debido a las interacciones lejanas determinada mediante el método FMM, la cual llamaremos Z_{lejana} para así formar la matriz total del sistema CFIE, denominada Z_{total} , ésta última como la suma de Z_{cercana} y Z_{lejana} .

De ésta manera el presente capítulo describe la metodología utilizada para determinar la matriz Z_{total} del sistema de las ecuaciones integrales EFIE, MFIE y CFIE, aplicando el método de los momentos y el método de los multipolos rápidos de un solo nivel, utilizando las funciones base Rao, Wilton, Glisson para luego realizar una evaluación de ésta matriz al determinar el espectro de autovalores y el número de condición en función del parámetro de ponderación α de la CFIE. A continuación se describen las fases a seguir para cumplir el objetivo general de ésta investigación.

En la Fase 1, se describe determinación de los elementos Z_{mn} de la matriz Z_{cercana} mediante MoM directo debido a las interacciones cercanas de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE, las cuales se utilizarán al momento de completar el llenado de la matriz total del sistema cuando las funciones bases RWG se encuentren en cubos cercanos o adyacentes y donde el método de los multipolos no puede ser utilizado para estas interacciones cercanas.

En la Fase 2, se describe la derivación de los elementos Z_{mn} de la matriz Z_{lejana} de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE utilizando el método de los multipolos rápidos FMM.

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

En la Fase 3 se programan las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos.

En la Fase 4 se describe la implementación del código Ztotal, código utilizado para determinar la matriz total del sistema en función de la Zcercana y Zlejana de la CFIE y la determinación de los autovalores y número de condición de dicha matriz.

En la Fase 5, se describe una serie de experimentos a realizar para determinar como se ve influenciado el espectro de autovalores y número de condición de la matriz del sistema, para diferentes tipos de dispersores al variar el coeficiente de ponderación α de la CFIE, en función del lado cubo W del método FMM, de la frecuencia y de la densidad de discretización n_λ .

En la última fase, Fase 6, se calcula la Sección Recta de Radar (RCS) de los dispersores estudiados en la Fase 5, cuyas matrices Zcercanas fueron evaluadas. Para el cálculo de la RCS se utilizó el Método de los Multipolos Rápidos (FMM), para diferentes valores del coeficiente α de ponderación de la CFIE y cuyos resultados se comparan con la data de referencia publicada en [39].

3.2. Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

3.2.1. Formulación de la matriz Z del sistema a partir de la EFIE aplicando el método de los momentos y las funciones RWG.

El primer paso para aplicar el método de los momentos para resolver numéricamente las ecuaciones integrales (2.50) y (2.63), consiste en discretizar la superficie del dispersor. Esto se realiza dividiendo la superficie en triángulos o rectángulos, ver Figura.3.1. Éste proceso es conocido como grillado o mallado de la superficie. En éste trabajo de investigación se utilizará el mallado por triángulos planos, ya que es el tipo de mallado donde solo pueden ser aplicadas las funciones RWG [34].

Luego del mallado de la superficie del dispersor, deben establecerse las funciones base RWG vistas en la ecuación (2.91) y nuevamente reescritas aquí:

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\ell_n}{2A^+} \boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}) & \forall \mathbf{r} \text{ en } T_n^+ \\ \frac{\ell_n}{2A^-} \boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}) & \forall \mathbf{r} \text{ en } T_n^- \\ 0 & \text{en otro lugar} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde ℓ_n es la longitud de la orilla compartida entre dos triángulos adyacentes y cada función base debe ser asignada a las orillas interiores compartidos por dos a más triángulos adyacentes. Ver Figura.3.2.

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

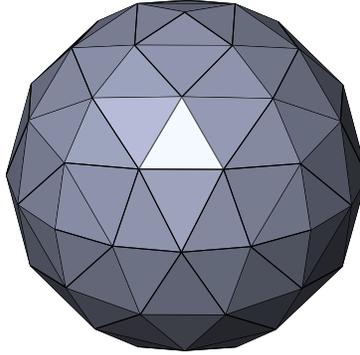


Figura 3.1: Aproximación de la superficie de una esfera utilizando un mallado de triángulos planos.

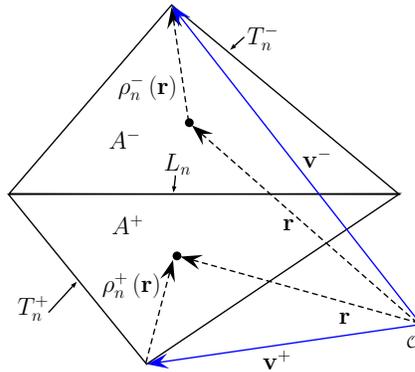


Figura 3.2: Función base RWG

Sobre el triángulo T_n^+ el vector ρ_n^+ señala hacia el vértice v^+ opuesto a la orilla, y es determinado como:

$$\rho_n^+ = v^+ - r \quad r \text{ en } T_n^+ \quad (3.2)$$

y sobre el triángulo T_n^- , ρ_n^- señala hacia el vértice opuesto v^- , determinado como:

$$\rho_n^- = r - v^- \quad r \text{ en } T_n^- \quad (3.3)$$

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

Estas funciones bases se utilizan para representar localmente y de manera aproximada la densidad superficial de corriente \mathbf{J}_s , tal como se mencionó en la ecuación (2.92), reescrita nuevamente:

$$\mathbf{J}_s \approx \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

Las funciones base tienen las siguientes propiedades [28]:

1. La corriente no tiene componente normal a los lados de los triángulos (exceptuando el borde común), por lo tanto no fluye corriente a través de ellos.
2. La componente de la corriente normal al borde común, es constante y continua a lo largo del mismo, por ejemplo, esta componente es la misma si se evalúa en el límite del triángulo T_n^+ o del triángulo T_n^- .
3. La divergencia de la función base \mathbf{f}_n en cada triángulo, es:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\ell_n}{A_n^+} & \forall \mathbf{r} \text{ en } T_n^+ \\ -\frac{\ell_n}{2A_n} & \forall \mathbf{r} \text{ en } T_n^- \\ 0 & \text{en otro lugar} \end{cases} \quad (3.5)$$

3.2.1.1. Discretización de la EFIE

Para discretizar la ecuación (2.50) en primer lugar introducimos la expansión de la densidad de corriente \mathbf{J}_s dada por (3.4) en la ecuación EFIE dada por ecuación (2.50) resultando:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times j\omega\mu \left[1 + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla \cdot \right] \sum_{n=1}^N \alpha_n \int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' \quad (3.6)$$

Posteriormente se lleva a cabo el método de prueba[28], en el cual se utilizan como funciones de prueba, las mismas funciones base utilizadas para la densidad de corriente, lo cual es el método de Galerkin. Utilizando el producto interno definido por la ecuación (2.71) se hallan los elementos de la matriz del sistema, donde \mathbf{f}_n son las funciones base RWG dadas por (2.91) y la integración se realiza sobre la superficie de la función de prueba m-ésima de la siguiente forma:

$$Z_{mn} = \langle \mathbf{f}_m, \mathcal{L} \mathbf{f}_n \rangle \quad (3.7)$$

$$= \int_{S_m} \mathbf{f}_m \cdot \mathcal{L} \mathbf{f}_n ds \quad (3.8)$$

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

realizando el procedimiento de prueba con N funciones de prueba \mathbf{f}_m , resulta un sistema lineal de ecuaciones con elementos de la matriz del sistema EFIE [17] dado por:

$$Z_{mn}^E = j\omega\mu \left(\int_{S_n} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') ds' ds + \frac{1}{\kappa^2} \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left[\nabla \nabla' \cdot \int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' \right] ds \right) \quad (3.9)$$

En la ecuación (3.9) se ha obviado el producto vectorial con el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$, debido a que la función base \mathbf{f}_m es tangente a la superficie y elimina por si sola la componente normal. La ecuación (3.9) debe ser manejada algebraicamente de tal modo de redistribuir los operadores diferenciales, para que estos solo operen sobre las funciones base y de prueba ya que sus derivadas son de buen comportamiento. Esto evita que los operadores actúen sobre el término $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ de la función de Green, resultando como beneficio la simplificación de los cálculos de los elementos de la matriz [17]. Al realizar tal procedimiento descrito en [17], la ecuación (3.9) se reescribe como:

$$Z_{mn}^E = j\omega\mu \int_{S_m} \int_{S_n} \left[\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \nabla' \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' ds \quad (3.10)$$

donde S_m y S_n son las superficies de los subdominios bases \mathbf{f}_m y \mathbf{f}_n respectivamente. Substituyendo las funciones bases RWG dadas por la ecuación (3.1) en la ecuación (3.10) y separando las integrales sobre la superficie de los triángulos T^+ y T^- se tiene:

$$\begin{aligned} Z_{mn}^E &= j\omega\mu \frac{\ell_m \ell_n}{A_m^+ A_n^+} \int_{S_m^+} \int_{S_n^+} \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_m^+(\mathbf{r}) \boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}') - \frac{1}{\kappa^2} \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' ds \\ &\quad + j\omega\mu \frac{\ell_m \ell_n}{A_m^+ A_n^-} \int_{S_m^+} \int_{S_n^-} \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_m^+(\mathbf{r}) \boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}') + \frac{1}{\kappa^2} \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' ds \\ &\quad + j\omega\mu \frac{\ell_m \ell_n}{A_m^- A_n^+} \int_{S_m^-} \int_{S_n^+} \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_m^-(\mathbf{r}) \boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}') + \frac{1}{\kappa^2} \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' ds \\ &\quad + j\omega\mu \frac{\ell_m \ell_n}{A_m^- A_n^-} \int_{S_m^-} \int_{S_n^-} \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_m^-(\mathbf{r}) \boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}') - \frac{1}{\kappa^2} \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' ds \quad (3.11) \end{aligned}$$

3.2.1.2. Evaluación de términos no cercanos

Cuando los triángulos fuente y de prueba están separados una distancia mayor a 0.3λ la ecuación (3.11) puede ser implementada tal como es escrita. El computo de la ecuación (3.11) se realizará mediante el método numérico de cuadratura Gauss-Legendre [11] de orden N, sobre cada triángulo. A continuación la forma discretizada

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

de la Ecuación (3.11) [17]:

$$Z_{mn}^E = \frac{j\omega\mu\ell_m\ell_n}{4\pi} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M w_p w_q \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}'_q) \pm \frac{1}{\kappa^2} \right] \frac{e^{-j\kappa R_{pq}}}{R_{pq}} \quad (3.12)$$

donde, M es el número de puntos de cuadratura sobre el triángulo, p y q se refiere a las coordenadas de prueba y fuente respectivamente, y los pesos de cuadratura son w_p y w_q que han sido normalizados con respecto al área de los triángulos. La distancia R_{pq} es:

$$R_{pq} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2} \quad (3.13)$$

Los signos de las variables en la ecuación (3.12) dependen de las orientaciones de las funciones base y prueba en cada triángulo.

3.2.1.3. Evaluación de los elementos de la Matriz Z EFIE para términos cercanos o singulares

Cuando los triángulos fuente y de prueba se superponen o están unos muy cerca de otros (distancias menores a 0.3λ) la función de Green presenta singularidades que generan errores numéricos [29], por lo que la evaluación de los elementos de la Z_{mn}^E de la EFIE dados por la ecuación (3.10) deben ser evaluados extrayendo tal singularidad y evaluar ciertos términos de ésta ecuación en forma analítica. A continuación se describe el procedimiento para aislar tales singularidades [23][17].

En caso que la distancia entre el baricentro (centro geométrico) de los triángulos sea menor a 0.3λ , la función de Green es reescrita como:

$$\frac{e^{-j\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \left[\frac{e^{-j\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] + \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (3.14)$$

La ecuación (3.14) es referida como una extracción de singularidad. El primer término del lado derecho de ésta ecuación es de buen comportamiento teniendo como límite de $-j\kappa$ cuando $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ y es resuelto mediante la cuadratura Gauss-Legendre.

Insertando la ecuación (3.14) en la ecuación (3.11) nos queda como:

$$Z_{mn}^E = j\omega\mu \frac{\ell_m\ell_n}{A_m^\pm A_n^\pm} \int_{S_m^\pm} \int_{S_n^\pm} \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') - \frac{1}{\kappa^2} \right] \left[\frac{e^{-j\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] ds' ds \\ + j\omega\mu \frac{\ell_m\ell_n}{A_m^\pm A_n^\pm} \int_{S_m^\pm} \int_{S_n^\pm} \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') - \frac{1}{\kappa^2} \right] \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds' ds \quad (3.15)$$

llamaremos como la integral IA e IB las siguientes :

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

$$IA = j\omega\mu \frac{\ell_m \ell_n}{A_m^\pm A_n^\pm} \int_{S_m^\pm} \int_{S_n^\pm} \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') - \frac{1}{\kappa^2} \right] \left[\frac{e^{-j\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] ds' ds \quad (3.16)$$

$$IB = j\omega\mu \frac{\ell_m \ell_n}{A_m^\pm A_n^\pm} \int_{S_m^\pm} \int_{S_n^\pm} \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') - \frac{1}{\kappa^2} \right] \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds' ds \quad (3.17)$$

Como se mencionó arriba la integral IA es de buen comportamiento y utilizando cuadratura Gauss-Legendre nos queda como

$$IA = \begin{cases} \frac{j\omega\mu\ell_m\ell_n}{4\pi} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M w_p w_q \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}'_q) \pm \frac{1}{\kappa^2} \right] \cdot \left[\frac{e^{-j\kappa R_{pq}}}{R_{pq}} - \frac{1}{R_{pq}} \right] & S_m \neq S_n \\ \frac{j\omega\mu\ell_m\ell_n}{4\pi} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M w_p w_q \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}'_q) \pm \frac{1}{\kappa^2} \right] \cdot (-j\kappa) & S_m = S_n \end{cases} \quad (3.18)$$

La integral IB, puede escribirse como:

$$IB = j\omega\mu \frac{\ell_m \ell_n}{16\pi A_m^\pm A_n^\pm} \left\{ IC - \frac{1}{\kappa^2} ID \right\} \quad (3.19)$$

donde

$$IC = \int_{S_m^\pm} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}) \cdot \int_{S_n^\pm} \frac{\boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}')' ds' ds}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (3.20)$$

$$ID = \int_{S_m^\pm} \int_{S_n^\pm} \frac{ds' ds}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (3.21)$$

En las ecuaciones (3.20) y (3.21) las superficies S_m y S_n están muy cercas o se superponen. Estas integrales se evalúan al calcular la integral más externa ($\int_{S_m^\pm} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}) ds$) numéricamente mediante cuadratura Gauss-Legendre y la integral más interna ($\int_{S_n^\pm} \frac{\boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}')' ds'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$) analíticamente siguiendo el procedimiento descrito por [23].

Realizando éste procedimiento tenemos:

$$IC = A_m^\pm \sum_{p=1}^M w_p \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \int_{S_n^\pm} \frac{\boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (3.22)$$

$$IC = A_m^\pm \sum_{p=1}^M w_p \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \left[\int_{S_n^\pm} \frac{\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds' + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n^\pm) \int_{S_n^\pm} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds' \right] \quad (3.23)$$

donde w_p es la amplitud de los pesos de cuadratura de los triángulos de prueba

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

normalizados con respecto al área de estos triángulos. A continuación llamamos a :

$$I1 = \int_{S_n^\pm} \frac{\rho' - \rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' \quad (3.24)$$

$$I2 = \int_{S_n^\pm} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' \quad (3.25)$$

Las integrales I1 e I2 son resueltas analíticamente mediante el procedimiento descrito por Richard E. Hodges[23]. Este método es aplicado a polígonos planares de N-lados de forma arbitraria y se resume en términos de las orillas individuales del polígono. Se considera el segmento de línea C con puntos finales denominados l^- y l^+ localizados sobre S (el plano del polígono) como se muestra en la Figura.3.3. La proyección de los vectores fuente \mathbf{r}' y observación \mathbf{r} sobre S son ρ' y ρ respectivamente. Las cantidades en la Figura.3.3 son calculadas de la siguiente forma:

$$\rho^\pm = \mathbf{r}^\pm - \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}^\pm) \quad (3.26)$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \frac{\rho^+ - \rho^-}{|\rho^+ - \rho^-|} \quad (3.27)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (3.28)$$

$$l^\pm = (\rho^\pm - \rho) \cdot \hat{\mathbf{l}} \quad (3.29)$$

$$P^0 = |(\rho^\pm - \rho) \cdot \hat{\mathbf{u}}| \quad (3.30)$$

$$P^\pm = |(\rho^\pm - \rho)| = \sqrt{(P^0)^2 + (l^\pm)^2} \quad (3.31)$$

$$\hat{\mathbf{P}}^0 = \frac{(\rho^\pm - \rho) - l^\pm \cdot \hat{\mathbf{l}}}{P^0} \quad (3.32)$$

$$R^0 = \sqrt{(P^0)^2 + d^2} \quad (3.33)$$

$$R^\pm = \sqrt{(P^\pm)^2 + d^2} \quad (3.34)$$

donde d es la distancia desde el punto de observación al plano S que contiene al triángulo, la cual viene dada por :

$$d = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}^\pm) \quad (3.35)$$

Usando las ecuaciones desde la (3.26) a la (3.35) la integral I1(3.24) puede ser calculada como:

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

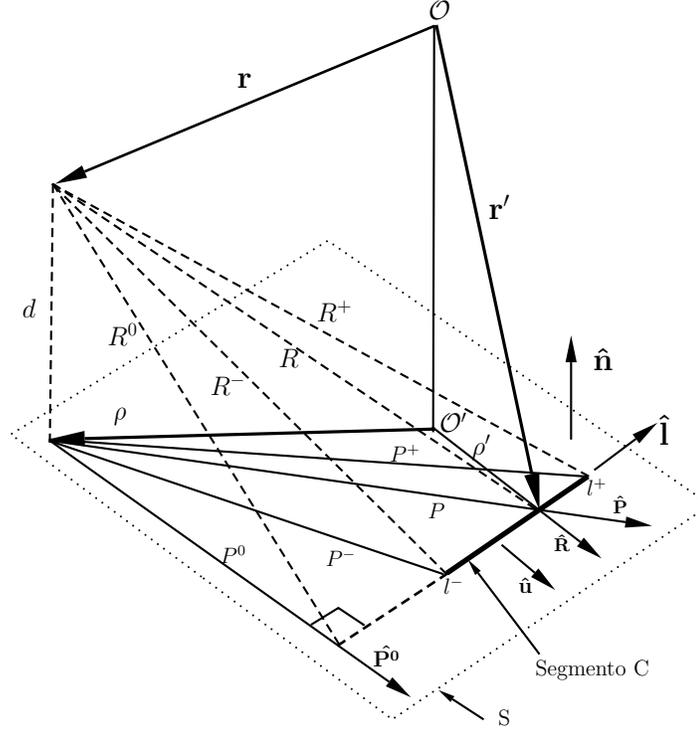


Figura 3.3: Cantidades geométricas para un segmento C de un polígono sobre el plano S

$$I1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{u}}_i \left[(R_i^0)^2 \ln \left(\frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} \right) + l_i^+ R_i^+ - l_i^- R_i^- \right] \quad (3.36)$$

y la integral I2(3.25) de la manera siguiente:

$$I2 = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{P}}_i^0 \cdot \hat{\mathbf{u}}_i \left[P_i^0 \ln \left(\frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} \right) - |d| \left(\tan^{-1} \frac{P_i^0 l_i^+}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^+} - \tan^{-1} \frac{P_i^0 l_i^-}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^-} \right) \right] \quad (3.37)$$

de acuerdo a lo establecido por [17] si el punto de observación ρ está en cualquier parte a lo largo de la orilla, la contribución de tal orilla a la ecuación (3.36) será cero. Adicionalmente la ecuación (3.36) y la ecuación (3.37) sufren de problemas numéricos cuando \mathbf{r} está sobre S a lo largo de la extensión de un borde ($R_i^0 = 0$). En estos casos se desplaza el punto de observación una distancia muy pequeña lejos de la orilla, por ejemplo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} + \epsilon \hat{\mathbf{u}} \quad (3.38)$$

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

donde ϵ es un valor decimal pequeño. Al evaluar la integral más interna de IC se escribe la función base $\rho_n(\mathbf{r}')$ como:

$$\rho_n(\mathbf{r}') = \rho' - \rho_n \quad (3.39)$$

donde ρ_n es la proyección de \mathbf{v}_n sobre S. Se puede colocar:

$$\rho' - \rho_n = (\rho' - \rho) + (\rho - \rho_n) \quad (3.40)$$

permitiendo escribir a la ecuación (3.22) como:

$$IC = A_m^\pm \sum_{p=1}^M w_p \rho_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \left[\int_{S_m^\pm} \frac{\rho' - \rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' + (\rho - \rho_n^\pm) \int_{S_m^\pm} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' \right] \quad (3.41)$$

donde:

$$\int_{S_m^\pm} \frac{\rho_n^\pm(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' = \int_{S_m^\pm} \frac{\rho' - \rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' + (\rho - \rho_n^\pm) \int_{S_m^\pm} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' \quad (3.42)$$

3.2.2. Formulación de la matriz Z de la MFIE aplicando el método de los momentos y las funciones RWG.

3.2.2.1. Discretización de la MFIE

La matriz Z_{mn}^M de la MFIE dada por la ecuación (2.63) es obtenida expandiendo la corriente $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')$ utilizando la ecuación (2.68) y utilizando el producto punto dado por $\langle \mathbf{f}_m, \mathcal{L}\mathbf{f}_n \rangle$ quedando como:

$$Z_{mn}^M = \frac{1}{2} \int_{S_m, S_n} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') ds - \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left[\hat{\mathbf{n}} \times \int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' \right] ds \quad (3.43)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el versor normal a la superficie del dispersor en el triángulo T_m^\pm y el gradiente de la función de Green queda como:

$$\nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (1 + j\kappa |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{e^{-j\kappa |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.44)$$

Substituyendo como funciones base para \mathbf{f}_n las funciones base RWG y utilizando el método de Galerkin (Sección.2.2.8.1), la ecuación (3.43) puede escribirse como:

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

$$Z_{mn}^M = \frac{\ell_m \cdot \ell_n}{8A_m^\pm A_n^\pm} \int_{S_m^\pm} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}) \cdot ds - \frac{\ell_m \cdot \ell_n}{4A_m^\pm A_n^\pm} \int_{S_m^\pm} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}) \cdot \left[\hat{\mathbf{n}}_m^\pm \times \int_{S_n^\pm} \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_m^\pm ds' \right] ds \quad (3.45)$$

3.2.2.2. Evaluación de los elementos de la matriz Z MFIE para términos no cercanos.

Al igual que en el caso presentado en la evaluación numérica de la matriz Z de EFIE, la evaluación de la matriz Z de MFIE puede ser evaluada numéricamente considerando elementos no cercanos (cuando la distancia de los centroides de los triángulos de prueba y fuente se encuentran separados una distancia mayor a $0,3\lambda$).

El primer término del lado derecho de la ecuación (3.45) es evaluado cuando los triángulos fuentes y de prueba se solapan, lo cual solo ocurre para distancias menores a 0.3λ y el segundo término es evaluado cuando no se solapan.

Las integrales que permiten calcular los elementos de la matriz Z_{mn}^M de MFIE para triángulos no cercanos, ecuación (3.45), pueden ser resueltas aplicando una regla de cuadratura de M puntos sobre triángulos de prueba(m) y triángulos fuentes(n) [17]. Aplicando tal regla se obtiene:

$$Z_{mn}^M = \frac{\ell_m \cdot \ell_n}{8A_m^\pm} \sum_{p=1}^M w_p \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}_p) + \frac{\ell_m \cdot \ell_n}{16\pi} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M w_p w_q \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \left[\hat{\mathbf{n}}^\pm(\mathbf{r}_p) \times (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_q) \times \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}'_q) \right] [1 + j\kappa R_{pq}] \frac{e^{-jkR_{pq}}}{(R_{pq})^3} \quad (3.46)$$

donde $R_{pq} = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q| = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}$
p y q son referidos a los triángulos de prueba y fuente respectivamente.
Así tenemos que el término:

$$\frac{\ell_m \cdot \ell_n}{8A_m^\pm} \sum_{p=1}^M w_p \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}_p) \quad (3.47)$$

se aplica cuando los triángulos se solapan y el término:

$$\frac{\ell_m \cdot \ell_n}{16\pi} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M w_p w_q \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \left[\hat{\mathbf{n}}^\pm(\mathbf{r}_p) \times \mathbf{R}_n \times \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}'_q) \right] [1 + j\kappa R_{pq}] \frac{e^{-jkR_{pq}}}{(R_{pq})^3} \quad (3.48)$$

cuando los triángulos no se solapan, donde:

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

$$(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_q) \times \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') = \mathbf{R}_n \times \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}')$$

El vector \mathbf{R}_n es explicado en la ecuación (3.53).

R_{pq} es la distancia entre el elemento fuente y de prueba. Las variables w_p y w_q son los pesos de la cuadratura fuente y observación normalizados a las áreas de los triángulos. La ecuación (3.46) puede ser aplicada tal como aparece escrita si los triángulos fuente y de prueba están lo suficientemente alejados. Por otra parte cuando estos triángulos están suficientemente cerca la integración debe ser realizada analíticamente para obtener resultados exactos, como se desarrollará a continuación.

3.2.2.3. Evaluación de los elementos de la matriz Z MFIE para términos cercanos o singulares

La MFIE mostrada en la ecuación (2.63) posee una singularidad del orden $1/R^2$, debido al gradiente de la función de Green que al ser evaluada en puntos de observación cercanos a puntos fuentes ocasionan problemas numéricos [23]. Para evitar estos problemas se plantea la extracción de la singularidad mediante el procedimiento descrito por [23]. En primer lugar para realizar esto se debe mover el producto vectorial que aparece en el integrando de la ecuación (3.43) encontrado también en la ecuación (3.45). El movimiento del producto vectorial se realizará al término entre corchetes de la ecuación (3.45), el cual es reescrito nuevamente abajo como:

$$\int_{S_n^\pm} \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' \quad (3.49)$$

que al sustituir el gradiente de la función de Green en la ecuación (3.49) nos queda como:

$$- \int_{S_n^\pm} \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (1 + j\kappa |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{e^{-j\kappa |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds' \quad (3.50)$$

La ecuación (3.50) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\int_{S_n^\pm} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') \cdot (1 + j\kappa |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{e^{-j\kappa R}}{4\pi R^3} ds' \quad (3.51)$$

donde

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (3.52)$$

Para la función base $\boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}')$ definimos el vector \mathbf{R}_n en la ecuación (3.53), como el vector que va desde vértice opuesto de la orilla n-ésima al centroide del triángulo T_m^\pm . Ver Figura.3.4.

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{r} - \mathbf{v}_n \quad (3.53)$$

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

donde \mathbf{v}_n^\pm es el vector al vértice opuesto de la orilla n-ésima sobre el triángulo T_n^\pm . Puede verificarse que:

$$\mathbf{r}_m - \mathbf{r}' = \mathbf{R}_n - \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') \quad (3.54)$$

lo cual puede escribirse :

$$(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\rho}_n(\mathbf{r}') = \mathbf{R}_n \times \boldsymbol{\rho}_n(\mathbf{r}') \quad (3.55)$$

de tal manera que la ecuación (3.51) puede reescribirse como:

$$\int_{S_n^\pm} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') \cdot (1 + j\kappa R) \frac{e^{-j\kappa R}}{4\pi R^3} ds' = \mathbf{R}_n \times \int_{S_n^\pm} \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') \cdot (1 + j\kappa R) \frac{e^{-j\kappa R}}{R^3} ds' \quad (3.56)$$

Tales vectores pueden verse en la Figura.3.4

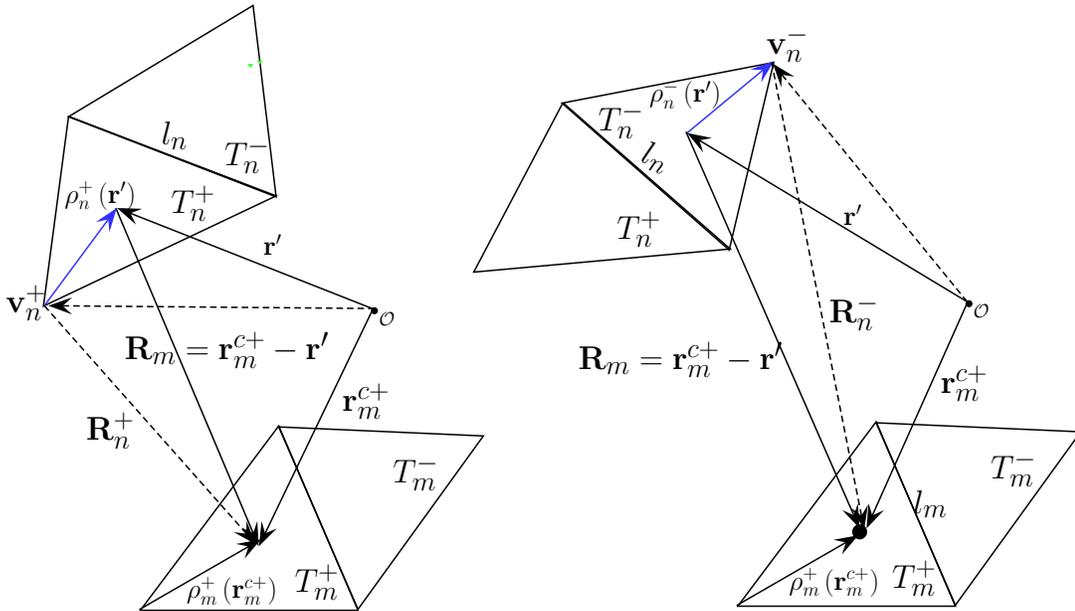


Figura 3.4: Funciones RWG en los Triángulos T_m y T_n

En la ecuación (3.56) se ha movido el producto vectorial fuera de la integral ya que facilita la extracción de la singularidad del integrando y permitirá expresar la integral en en coordenadas simplex [23]. La matriz de impedancia del sistema MFIE queda de la siguiente manera:

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

$$Z_{mn}^M = \frac{l_m \cdot l_n}{8A_m^\pm A_n^\pm} \int_{S_m^\pm} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}) \cdot ds + \frac{l_m \cdot l_n}{16\pi A_m^\pm A_n^\pm} \int_{S_m^\pm} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}) \cdot \left[\hat{\mathbf{n}}^\pm \times \mathbf{R}_n \times \int_{S_n^\pm} \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') \cdot (1 + j\kappa R) \frac{e^{-j\kappa R^\pm}}{R^3} ds' \right] ds \quad (3.57)$$

En la ecuación (3.57) el primer término es no evaluable si los triángulos son iguales ($m=n$) y el segundo cuando ($m \neq n$) pero cercanos en distancias menores a $0,3\lambda$.

La singularidad se extrae de la siguiente manera:

$$(1 + j\kappa R) \frac{e^{-j\kappa R}}{R^3} = \frac{(1 + j\kappa R) e^{-j\kappa R} - \left(1 + \frac{1}{2}\kappa^2 R^2\right)}{R^3} + \frac{1}{R^3} + \frac{\kappa^2}{2R} \quad (3.58)$$

cuyo límite es de $\frac{-j\kappa^3}{3}$ cuando $R \rightarrow 0$. La ecuación (3.58) representa la forma de extracción del término singular. Introduciendo éste término en:

$$\mathbf{R}_n \times \int_{S_n^\pm} \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') \cdot (1 + j\kappa R) \frac{e^{-j\kappa R}}{R^3} ds'$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_n \times \int_{S_n^\pm} \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') \cdot \left[\frac{(1 + j\kappa R) e^{-j\kappa R} - \left(1 + \frac{1}{2}\kappa^2 R^2\right)}{R^3} + \frac{1}{R^3} + \frac{\kappa^2}{2R} \right] ds' = \\ & \mathbf{R}_n \times \left\{ \int_{S_n^\pm} \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') \cdot \left[\frac{(1 + j\kappa R) e^{-j\kappa R} - \left(1 + \frac{1}{2}\kappa^2 R^2\right)}{R^3} \right] ds' + \int_{S_n^\pm} \frac{\boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}')}{R^3} + \frac{\kappa^2}{2} \int_{S_n^\pm} \frac{\boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}')}{R} \right\} = \\ & \mathbf{R}_n \times \left\{ \int_{S_n^\pm} \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') \cdot \left[\frac{(1 + j\kappa R) e^{-j\kappa R} - \left(1 + \frac{1}{2}\kappa^2 R^2\right)}{R^3} \right] ds' + \mathbf{a}_n(\mathbf{r}) + \frac{\kappa^2}{2} \mathbf{b}_n(\mathbf{r}) \right\} \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde :

$$\mathbf{a}_n(\mathbf{r}) = \int_{S_n^\pm} \frac{\boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}')}{R^3} ds' \quad (3.60)$$

y

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

$$\mathbf{b}_n(\mathbf{r}) = \int_{s_n^\pm} \frac{\boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}')}{R} ds' \quad (3.61)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (3.59) es de buen comportamiento y se evalúa numéricamente por cuadratura [17]. Las dos integrales restantes $\mathbf{a}_n(\mathbf{r})$ y $\mathbf{b}_n(\mathbf{r})$ son las contribuciones singulares y son evaluadas analíticamente.

La integral singular vista en la ecuación (3.61) se evalúa usando las integrales I1 e I2 utilizadas en el cálculo de la Z_{mn}^E de EFIE que viene dada por las ecuaciones (3.36) y (3.37), así el término $\mathbf{b}_n(\mathbf{r})$ será expresado como [37][23][17]:

$$\mathbf{b}_n(\mathbf{r}) = I1 + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) \cdot I2 \quad (3.62)$$

La ecuación (3.60) puede ser calculada utilizando [37][23] como:

$$\mathbf{a}_n = \int_{s_n^\pm} \frac{\boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}')}{R^3} ds' = I3 + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) I4 \quad (3.63)$$

donde

$$I3 = \int_{s_n^\pm} \frac{\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}}{R^3} ds' = - \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{u}}_i \text{Ln} \left(\frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- - l_i^-} \right) \quad (3.64)$$

y

$$I4 = \int_{s_n^\pm} \frac{1}{R^3} ds' \quad (3.65)$$

donde

$$I4 = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{P}}_i^0 \cdot \hat{\mathbf{u}}_i \frac{1}{|d|} \left[\tan^{-1} \frac{p_i^0 l_i^+}{(R_i^0)^2 - |d| R_i^+} - \tan^{-1} \frac{p_i^0 l_i^-}{(R_i^0)^2 - |d| R_i^-} \right] & d \neq 0 \\ - \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{P}}_i^0 \cdot \hat{\mathbf{u}}_i \left[\frac{l_i^+}{p_i^0 R_i^+} - \frac{l_i^-}{p_i^0 R_i^-} \right] & d = 0 \end{cases} \quad (3.66)$$

Los vectores que aparecen identificados en las ecuaciones desde la (3.62) hasta la (3.66) son los mismos que se describieron en el cálculo de la Z_{mn}^E de la EFIE para triángulos cercanos, descritos de acuerdo a la Figura.3.3. Las nuevas cantidades en el cálculo de la Z_{mn}^M son vistos en la Figura.3.5 [37] [17].

3.2 Fase 1. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los momentos

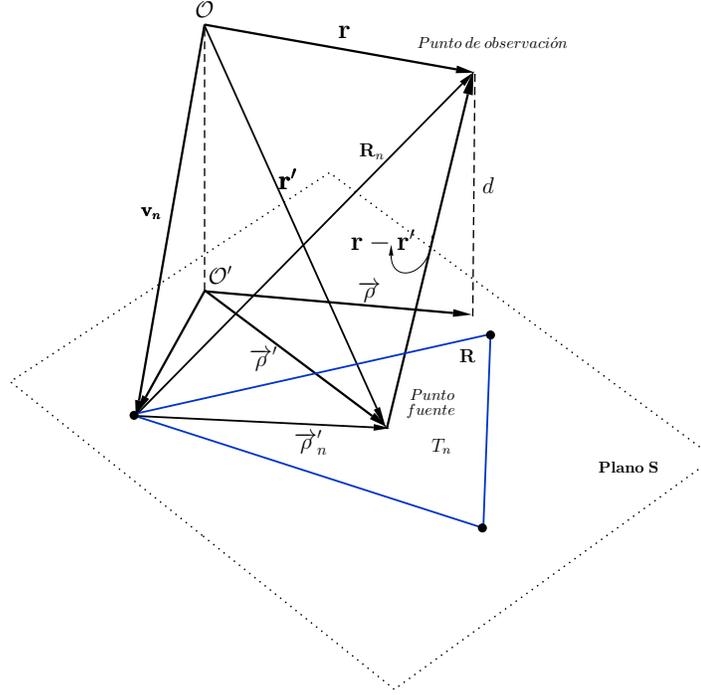


Figura 3.5: Cantidades geométricas utilizadas para calcular Z_{mn}^M cercanos.

En resumen, el calculo de la Z_{mn}^M se realizará de la siguiente manera para triángulos cercanos cuyos centroides tengan una distancia menor o igual a $0,3\lambda$:
para triángulos que se solapan $T_m = T_n$

$$Z_{mn}^M = \frac{\ell_m \cdot \ell_n}{8\mathcal{A}_m^\pm} \sum_{p=1}^M w_p \rho_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \rho_n^\pm(\mathbf{r}_p) \quad (3.67)$$

para triángulos cercanos $T_m \neq T_n$

$$Z_{mn}^M = \frac{\ell_m \ell_n}{16\pi} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M w_q \rho_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \left\{ \hat{\mathbf{n}}_p \times \mathbf{R}_p \times \left[\rho_n^\pm(\mathbf{r}'_q) \cdot \left[\frac{(1 + j\kappa R) e^{-j\kappa R} - \left(1 + \frac{1}{2} \kappa^2 R^2\right)}{R^3} \right] + \right. \right. \quad (3.68)$$

$$\left. \left. + I3 + (\rho - \rho_n) \cdot I4 + \frac{k^2}{2} [I1 + (\rho - \rho_n) \cdot I2] \right\}$$

Cuando la distancia $R \rightarrow 0$

3.3 Fase 2. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos.

$$\begin{aligned}
 Z_{mn}^M &= \frac{\ell_m \ell_n}{16\pi} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M w_q \rho_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \\
 &\hat{\mathbf{n}}_p \times \mathbf{R}_p \times \left\{ \rho_n^\pm(\mathbf{r}'_q) \cdot \left[\frac{-jk^3}{3} \right] + \right. \\
 &\left. + \mathbf{I}3 + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) \cdot \mathbf{I}4 + \frac{k^2}{2} [\mathbf{I}1 + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) \cdot \mathbf{I}2] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

3.2.3. Elementos de la matriz de la ecuación integral de campo combinada (CFIE)

Utilizando la ecuación (2.66) los elementos de ésta ecuación vendrán dados por la matriz Z de EFIE discretizada dada por (3.11) y los elementos de la matriz Z de la MFIE dada por la ecuación (3.45), para quedar expresada como:

$$Z_{mn}^C = \alpha Z_{mn}^E + (1 - \alpha) \eta Z_{mn}^M \tag{3.70}$$

3.3. Fase 2. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos.

3.3.1. Introducción.

Habiendo visto el teorema de traslación y adición de ondas, necesarios para factorizar la función de Green, en la Sección.2.2.13, se derivan las funciones de radiación y recepción que se usan para el cálculo de los elementos de la matrices de EFIE y MFIE utilizando la incorporación de FMM al método de los momentos.

3.3.2. MoM-FMM aplicado a la EFIE

Debido a que las interacciones en el FMM no se realizan en una zona cercana, no es necesario redistribuir los operadores para que actúen sobre las funciones bases, como se hizo en la ecuación (3.10), donde se evita su uso sobre la función de Green. En el caso de FMM la redistribución se hace para que éstos si operen sobre la función de Green, tal como se hizo en la ecuación (2.57), por lo que el procedimiento para obtener la matriz Z de EFIE es a partir de la ecuación (2.57). Utilizando el procedimiento de prueba y expansión que se realizó en la Sección.3.2.1.1 y utilizando las funciones bases RWG, se tiene que los elementos de la matriz vienen dados por:

$$Z_{mn}^E = j\omega\mu \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \left[\bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{k^2} \nabla \nabla' \right] \frac{e^{-j|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{3.71}$$

3.3 Fase 2. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos.

La ecuación (3.71) podrá ser utilizada para determinar la interacción entre elementos lejanos de la matriz Z de EFIE siempre y cuando los puntos \mathbf{r} y \mathbf{r}' abarquen zonas cercanas a dos puntos alejados \mathbf{a} y \mathbf{b} , donde \mathbf{a} será el centro de un grupo al cual pertenece \mathbf{r} , y \mathbf{b} en el centro del grupo al cual pertenece \mathbf{r}' , de tal forma que se cumpla que la distancia entre los centros sea: $r_{ab} > r_{ra} - r_{r'b}$, tal como se muestra en la Figura.2.4. Bajo estas condiciones se introduce en la ecuación (3.71) la factorización de la función de Green, dada por la ecuación (2.115):

$$\begin{aligned}\bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \left[\bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla' \right] \frac{e^{-j|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &= \left[\bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla' \right] \oint_{4\pi} e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{ra}} e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_b} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) d\Omega\end{aligned}\quad (3.72)$$

Al aplicar las operaciones diferenciales vectoriales del operador diádico $\left[\bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla' \right]$ en la ecuación (3.72) se tiene [15]:

$$\left[\bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla' \right] \frac{e^{-j|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \oint_{4\pi} [\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{ra}} e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_b} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) d\Omega\quad (3.73)$$

de acuerdo a [15] el operador diádico $\left[\bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla' \right]$ aplicado sobre la función de Green, puede intercambiarse por el producto con la diada $[\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}]$, la cual extrae la dirección $\hat{\mathbf{k}}$ de un vector \mathbf{A} , de tal manera que:

$$[\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] \mathbf{A} = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{k}} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} - A_{\kappa} \hat{\mathbf{k}}\quad (3.74)$$

de este modo substituyendo la ecuación (3.73) en la ecuación (3.71) obtenemos Z_{mn}^E para interacciones lejanas:

$$Z_{mn}^E = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \oint_{4\pi} [\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{ra}} e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_b} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) d\Omega\quad (3.75)$$

Intercambiando la integral sobre la esfera unitaria con las integrales sobre S_m y S_n , y agrupando los términos dependientes de \mathbf{r}' y los dependientes de \mathbf{r} , se tiene:

$$Z_{mn}^E = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \oint_{4\pi} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) \left[\int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{ra}} ds \right] \cdot [\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] \cdot \left[\int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_b} ds' \right] d\Omega\quad (3.76)$$

en la ecuación (3.76) se ha tomado en cuenta que $\mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot [\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] = [\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')$ ya

3.3 Fase 2. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos.

que la diada es una función simétrica. Ya que la diada $[\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}]$ elimina la componente de un vector en la dirección de $\hat{\mathbf{k}}$ del vector $\left[\int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{ra}} ds \right]$, no contribuye al calculo de $\left[\int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{ra}} ds \right] \cdot [\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] \cdot \left[\int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_b} ds' \right]$ [29], por lo que la ecuación (3.76) puede escribirse como:

$$Z_{m,n}^E = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \oint_{4\pi} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) \mathbf{R}_{ra}^E(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{T}_{r'b}(\hat{\mathbf{k}}) d\Omega \quad (3.77)$$

donde

$$T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) = \frac{\kappa}{(4\pi)^2} \sum_{l=0}^L (-j)^{l+1} (2l+1) h_l^{(2)}(\kappa|\mathbf{r}_{ab}|) P_l(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_{ab}) \quad (3.78)$$

es la función de transferencia,

$$\mathbf{R}_{ra}^E(\hat{\mathbf{k}}) = [\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{ra}} ds \quad (3.79)$$

es la función de recepción, y

$$\mathbf{T}_{r'b}(\hat{\mathbf{k}}) = [\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] \int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_b} ds' \quad (3.80)$$

es la función de radiación.

La función de recepción $\mathbf{R}_{ra}^E(\hat{\mathbf{k}})$, solo depende los puntos de recepción, mientras la función de radiación $\mathbf{T}_{r'b}(\hat{\mathbf{k}})$, solo depende de los puntos fuentes. Debido a que ambos términos son independientes, ellos pueden calcularse y almacenarse por separado. Esto representa un ahorro de tiempo al momento del llenado de la matriz Z, tal como lo ha demostrado [15]. Debido a que la presente investigación tiene como objetivo evaluar la matriz Z de la ecuación CFIE mediante MoM-FMM, éste procedimiento alternativo se implementará al momento de calcular la matriz Z de CFIE usando FMM debido a las interacciones lejanas, en vez del procedimiento directo indicado en la Sección.3.2.1.2. Otro punto importante de destacar es que las funciones de radiación y recepción que se deben calcular para cada subdominio base, son una la conjugada de la otra, trayendo como consecuencia un ahorro adicional de tiempo de llenado de la matriz Zcercana.

3.3.3. MoM-FMM aplicado a la MFIE

De manera igual al procedimiento seguido en la Sección.3.3.2, se procederá a calcular las interacciones lejanas entre elementos de la MFIE mediante MoM-FMM. Partiendo de la ecuación (3.43) y dejando el segundo término debido a que éste solo aplica cuando los triángulos m y n son diferentes, se tiene:

$$Z_{mn}^M = - \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left[\hat{\mathbf{n}} \times \int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' \right] ds \quad (3.81)$$

3.3 Fase 2. Derivar la matriz Z de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos.

haciendo uso de la expansión multipolar de la función de Green y tomando su gradiente , se obtiene que:

$$\begin{aligned}\nabla'G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi} \oint_{4\pi} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{ra}} \left(\nabla' e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_{rb}} \right) d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{4\pi} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{ra}} \left(j\kappa\hat{\mathbf{k}} e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_{rb}} \right) d\Omega\end{aligned}\quad (3.82)$$

substituyendo la ecuación (3.82) en la ecuación (3.81) y reordenando se tiene:

$$Z_{mn}^M = -\frac{j\kappa}{4\pi} \oint_{4\pi} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) \left[\int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{ra}} ds \right] \hat{\mathbf{n}} \times \left[\int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_{rb}} ds' \times \hat{\mathbf{k}} \right] d\Omega\quad (3.83)$$

el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ es constante y normal sobre la superficie S_m , tal como ocurre en las funciones base RWG[29]. Utilizando la identidad $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ en (3.83) se tiene:

$$Z_{mn}^M = -\frac{j\kappa}{4\pi} \oint_{4\pi} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) \left[\int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_{rb}} ds' \right] \left[\int_{S_m} [\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}}] e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{ra}} ds \times \hat{\mathbf{k}} \right] d\Omega\quad (3.84)$$

y aplicando la identidad vectorial: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ se tiene:

$$Z_{mn}^M = -\frac{j\kappa}{4\pi} \oint_{4\pi} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) \left[\int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}'_{rb}} ds' \right] \left[-\hat{\mathbf{k}} \times \int_{S_m} [\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}}] e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{ra}} ds \right] d\Omega\quad (3.85)$$

debido a que el segundo término entre corchetes de la ecuación (3.85) no tiene componente paralela a vector unitario $\hat{\mathbf{k}}$, ésta es reescrita como:

$$Z_{mn}^M = -\frac{j\kappa}{4\pi} \oint_{4\pi} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) \mathbf{T}_{r'_{rb}}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{R}_{ra}^M(\hat{\mathbf{k}}) d\Omega\quad (3.86)$$

donde $\mathbf{T}_{r'_{rb}}(\hat{\mathbf{k}})$ es la misma función de radiación hallada mediante EFIE, vista en la ecuación (3.80) y $\mathbf{R}_{ra}^M(\hat{\mathbf{k}})$ es la función recepción encontrada para MFIE dada por:

$$\mathbf{R}_{ra}^M(\hat{\mathbf{k}}) = -\hat{\mathbf{k}} \times \int_{S_m} [\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}}] e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_{ra}} ds\quad (3.87)$$

Debe ser notado en la ecuación (3.87) que la función radiación $\mathbf{R}_{ra}^M(\hat{\mathbf{k}})$ solo tiene componentes en la direcciones $\hat{\mathbf{a}}_\theta$ y $\hat{\mathbf{a}}_\phi$ debido al el producto vectorial entre el vector $\hat{\mathbf{k}}$ con el producto $(\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}})$

3.4 Fase 3. Programar las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos

3.3.4. MoM- FMM aplicado a la CFIE

El calculo de la ecuación integral de campo combinada podrá calcularse usando las ecuaciones (2.66), (3.77) y (3.86) de la siguiente forma:

$$Z_{mn}^C = \alpha Z_{mn}^E + (1 - \alpha)\eta.Z_{mn}^M \quad (3.88)$$

substituyendo las matrices de Z_{mn}^E y Z_{mn}^M en ésta ecuación se tiene:

$$Z_{mn}^C = \alpha \left(\frac{j\omega\mu}{4\pi} \oint_{4\pi} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) \mathbf{R}_{ra}^E(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{T}_{r'b}(\hat{\mathbf{k}}) d\Omega \right) + \quad (3.89)$$

$$+ (1 - \alpha)\eta \left(-\frac{j\kappa}{4\pi} \oint_{4\pi} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) \mathbf{T}_{r'b}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{R}_{ra}^M(\hat{\mathbf{k}}) d\Omega \right)$$

la cual puede escribirse como:

$$Z_{mn}^C = \frac{1}{4\pi} \oint_{4\pi} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) \mathbf{R}_{ra}^C(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{T}_{r'b}(\hat{\mathbf{k}}) d\Omega \quad (3.90)$$

siendo $\mathbf{R}_{ra}^C(\hat{\mathbf{k}})$ la función recepción hallada mediante CFIE dada por:

$$\mathbf{R}_{ra}^C(\hat{\mathbf{k}}) = j\omega\mu [\alpha \mathbf{R}_{ra}^E(\hat{\mathbf{k}}) - (1 - \alpha)\mathbf{R}_{ra}^M(\hat{\mathbf{k}})] \quad (3.91)$$

La ecuación (3.90) incluye sólo las contribución de funciones bases de grupos no adyacentes(lejanos), y existirán conjuntos de funciones bases (las pertenecientes a un mismo grupo) que tendrán asociadas la misma función de transferencia, por lo que ésta se puede factorizar por cada cubo resultando:

$$Z_{mn}^C = \frac{1}{4\pi} \oint_{4\pi} \left[\mathbf{R}_{ra}^C(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \sum_{b=1}^{N_{cub}} T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) \cdot \mathbf{T}_{r'b}(\hat{\mathbf{k}}) \right] d\Omega \quad (3.92)$$

donde N_{cub} es la cantidad de cubos lejanos a la función base m-ésima.

3.4. Fase 3. Programar las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos

A continuación se describirá la implementación práctica para programar las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE, mediante FMM de un nivel.

Se describirá el agrupamiento de las funciones bases en grupos cercanos y grupos lejanos, el truncamiento de las función de transferencia y el muestreo sobre la esfera unitaria, el cálculo y acumulación de las funciones de radiación y recepción y la matriz de zona lejana.

3.4.1. Agrupamiento de las funciones base

El agrupamiento de las funciones base es necesario para establecer cuales funciones son consideradas como lejanas y cuales no, para así decidir cuando una interacción es lejana o cercana. Para determinar cuales funciones bases están bien separadas, éstas se arreglaran en grupos por región. El procedimiento para realizar lo anterior es:

- Se determina una caja de mínimo tamaño que encierre al objeto dispersor, ver Figura.3.7. En ésta figura solo se muestra un plano de ésta caja. Al usar las funciones base RWG, esto se hace al probar los limites de la caja contra de los puntos extremos de los bordes del dispersor.
- Se divide la caja que encierra al dispersor en un número de pequeños cubos, igualmente espaciados que tienen lados de longitud w y que sean bordes de una esfera de diámetro $d = W\sqrt{3}$.
- La caja externa es expandida, de tal forma que exista un número de cubos de longitud w en cada dimensión del espacio. La longitud w del lado de cada cubo es seleccionada a ser $\lambda/2$ o $\lambda/4$ [17].
- Ya que cada función base está definida entre un par de triángulos que comparten una orilla en común, se le asociará la función base a la orilla que comparten éstos triángulos, ver Figura.3.6. Luego cada función base y de prueba es asignada a cada cubo y se comparará con los limites de cada cubo, ver Figura.3.7. A medida que este proceso se realiza se va asignando un índice “p” a cada cubo que representa al numero de grupo y se indica a cual grupo “p” pertenece cada función base.

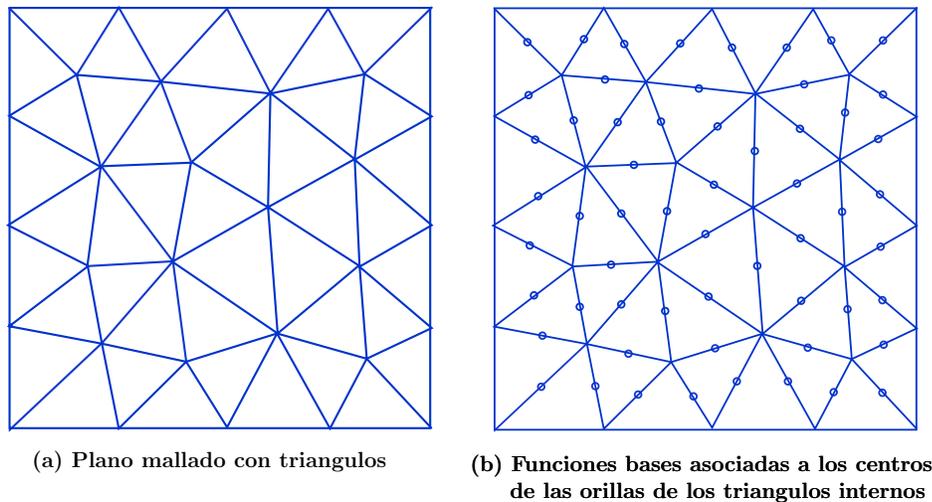


Figura 3.6: Dispersor mallado con triángulos

3.4 Fase 3. Programar las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos

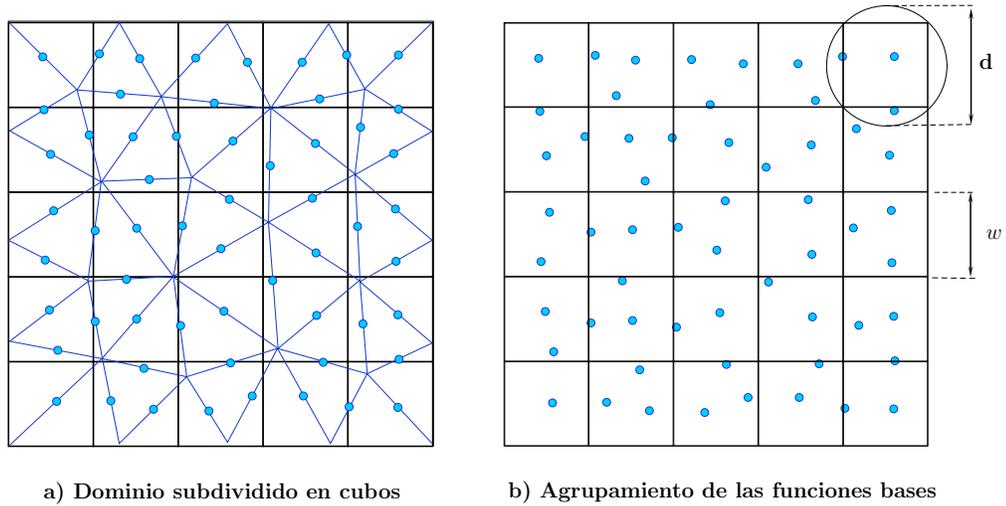


Figura 3.7: Subdivisión espacial y agrupamientos de las funciones bases

3.4.2. Clasificación de grupos cercanos y lejanos

Se consideran grupos cercanos aquellos cubos que comparten un borde común o un vértice con otro cubo, con una distancia “ d ” de separación. Todas aquellas funciones bases que se encuentran en estos cubos serán funciones con interacciones cercanas y su interacción una con otra será determinada utilizando MoM directo. Aquellos cubos que no cumplan la condición anterior se consideran grupos lejanos y su interacción se determina aplicando MoM-FMM. La Figura.3.8 muestra el cubo con centro **b**, el cual formará un grupo cercano con todos los cubos que son adyacentes a el, como lo son, por ejemplo, los cubos con centro en **c** y **e**, mientras que los cubos con una distancia de separación de un cubo por lo menos, se consideran cubos lejanos, por ejemplo, el cubo con centro **a**, es un cubo lejano del cubo con centro **b**.

3.4 Fase 3. Programar las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos

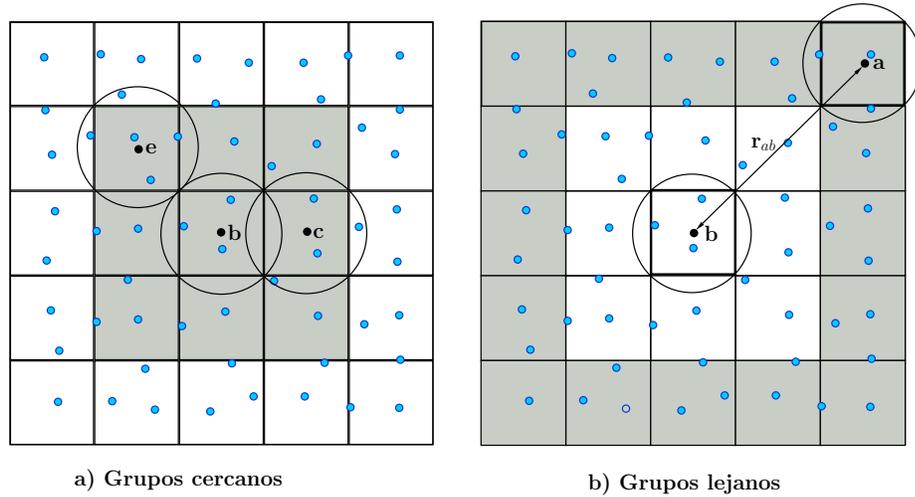


Figura 3.8: Grupos cercanos y lejanos

3.4.3. Determinación del número de multipolos

La evaluación exacta de la ecuación (2.115) requiere truncar la función de transferencia dada por (2.114) en un límite L , denominado número de multipolos. Este límite depende del número de grupos y del número de onda. Expresiones para el cálculo de L han sido dadas empíricamente. Para valores reales de κ , Rokhlin [8] recomienda la siguiente ecuación empírica para determinar el número de multipolos en función de la diagonal d de los cubos donde se agrupan las funciones base (ver Figura.3.7):

$$L = \kappa d + \beta \lg(\kappa d + \pi) \quad (3.93)$$

donde β es una constante relacionada con la precisión requerida. Para cálculos de simple precisión $\beta=5$, y para doble precisión $\beta=10$. Estudios posteriores realizados por Song y Chew [30] han derivado una nueva ecuación para el número de multipolos que funciona en todos los casos:

$$L = \kappa d + \beta (kd)^{1/3} \quad (3.94)$$

donde β es el número de dígitos de precisión requerida. Estos investigadores sugieren que $\beta=6$ es suficiente para la mayoría de los propósitos.

3.4.3.1. Limitación del número de multipolos L para la función de transferencia

Aunque en cada región hay muchas distancias diferentes entre grupos, la utilización de un único valor de L de para todos $|r_{ab}|$ dará lugar a problemas numéricos. Esto se debe a que la función esférica Hankel $h_l^{(2)}(\kappa r_{ab})$ se convierte en altamente oscilante para un valor fijo de su argumento y para valores creciente de su orden l . Por lo tanto, no se se puede tomar un valor de L que sea más grande que el argumento de la

3.4 Fase 3. Programar las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos

función Hankel, que es $\kappa |\mathbf{r}_{ab}|$. El enfoque adoptado en la mayoría de las implementaciones prácticas es limitar el valor de L al mínimo entre $(\kappa |\mathbf{r}_{ab}|, \kappa d + \beta (kd)^{1/3})$ [15, 29]. Aunque esto tiene el efecto de reducir la exactitud de la extensión para los grupos que tienen las separaciones más pequeñas, en la práctica esto no afecta los resultados [17]. Por lo tanto en ésta investigación se tomara como valor del numero de multipolos a:

$$L = \min \left(\kappa |\mathbf{r}_{ab}|, \kappa d + \beta (kd)^{1/3} \right) \quad (3.95)$$

3.4.4. Cálculo de las funciones de transferencia.

Conociendo el número de multipolos L , dado por la ecuación (3.95), se procede a hacer el cálculo de $T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab})$. Por cada par de cubos no adyacentes con centros \mathbf{r}_a y \mathbf{r}_b se procede hacer el cálculo de $T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab})$, deben ser calculadas dos funciones de transferencia diferentes: una con \mathbf{r}_{ab} y otra con \mathbf{r}_{ba} . Debido a la distribución espacial de los grupos, pueden existir varios pares de cubos con el mismo vector \mathbf{r}_{ab} , y en consecuencia con la misma función de transferencia. Es por esto que se debe precalcular y almacenar una sola instancia de cada función de transferencia y luego indexarlas apropiadamente por cada par de cubos lejanos. De esta manera, la cantidad de funciones de transferencia a almacenar puede llegar a ser decenas de veces menor a la cantidad de funciones de transferencia totales, por lo que se ahorra memoria y tiempo de cómputo significativo. De igual forma, la ecuación de Hankel usada en el cálculo de la función de transferencia a través de la ecuación (3.78), es constante para todos los cubos lejanos separados a la misma distancia $D = |\mathbf{r}_{ab}|$. Como consecuencia, existirán varias funciones de transferencia con el mismo valor de la función de Hankel, por lo que esta puede ser precalculada y almacenada para todas las distancias D , optimizando el computo de las funciones de transferencia.

3.4.5. Cálculo de las funciones de radiación y recepción para CFIE

La función de radiación para la función base n ubicada en \mathbf{r}' y contenida en un cubo con centro \mathbf{r}_b esta dada por:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{r}'_b}(\hat{\mathbf{k}}) = [\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] \int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}'_b} d\mathbf{s}' \quad (3.96)$$

y la función recepción para la función de prueba m , ubicada en \mathbf{r} y contenida en un cubo de centro \mathbf{r}_a , utilizando ecuación (3.91) es:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}_a}^C(\hat{\mathbf{k}}) = j\omega\mu [\alpha \mathbf{R}_{\mathbf{r}_a}^E(\hat{\mathbf{k}}) - (1 - \alpha) \mathbf{R}_{\mathbf{r}_a}^M(\hat{\mathbf{k}})] \quad (3.97)$$

donde $\mathbf{R}_{\mathbf{r}_a}^E(\hat{\mathbf{k}})$ y $\mathbf{R}_{\mathbf{r}_a}^M(\hat{\mathbf{k}})$ vienen dadas por las ecuaciones (3.79) y (3.87) respectivamente. Substituyendo estas en la ecuación (3.97) se tiene:

3.4 Fase 3. Programar las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos

$$\mathbf{R}_{r_a}^C(\hat{\mathbf{k}}) = j\omega\mu \left[\alpha [\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}_{ra}} d\mathbf{s} - (1 - \alpha)(-\hat{\mathbf{k}} \times \int_{S_m} [\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}}] e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}_{ra}} d\mathbf{s}) \right] \quad (3.98)$$

Substituyendo las funciones base RWG en la ecuación (3.98), se tiene:

$$\mathbf{T}_{r'b}(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{\ell_n}{2} [\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] \left(\frac{1}{A_n^+} \int_{S_n^+} \rho_n^+(\mathbf{r}') e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}'_b} d\mathbf{s}' + \frac{1}{A_n^-} \int_{S_n^-} \rho_n^-(\mathbf{r}') e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}'_b} d\mathbf{s}' \right) \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{r_a}^C(\hat{\mathbf{k}}) = & \frac{j\omega\mu\ell_m}{2} \left[\alpha \left([\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] \frac{1}{A_m^\pm} \int_{S_m^\pm} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}) e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}_{ra}} d\mathbf{s} \right) \right. \\ & \left. - \hat{\mathbf{k}} \times (1 - \alpha) \left(\hat{\mathbf{n}}^\pm \times \frac{1}{A_m^\pm} \int_{S_m^\pm} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}) e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}_{ra}} d\mathbf{s} \right) \right] \quad (3.100) \end{aligned}$$

Las integrales sobre las superficies de las funciones base RWG son calculadas aplicando la regla de cubatura de Gauss-Legendre [11] de orden 5 sobre triángulos, en la cual se requiere un muestreo de 7 puntos de la superficie de cada triángulo, determinados por la regla. Cada muestra es multiplicada por un peso correspondiente, definido en la regla de cubatura. Aplicando la integración numérica en (3.99) y (3.100) resultan las siguientes expresiones para la programación:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{r'b}(\hat{\mathbf{k}}) = & \frac{\ell_n}{2} [\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] \left(\sum_{p=1}^7 e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r}'_p^+ - \mathbf{b})} \rho_n^+(\mathbf{r}'_p^+) w_p^+ \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^7 e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r}'_p^- - \mathbf{b})} \rho_n^-(\mathbf{r}'_p^-) w_p^- \right) \quad (3.101) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{r_a}^C(\hat{\mathbf{k}}) = & \frac{j\omega\mu\ell_m}{2} \left[\alpha \left([\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}] \sum_{p=1}^7 e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r}_p^\pm - \mathbf{a})} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}_p^\pm) w_p^\pm \right) \right. \\ & \left. - \hat{\mathbf{k}} \times (1 - \alpha) \left(\hat{\mathbf{n}}^\pm \times \sum_{p=1}^7 e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r}_p^\pm - \mathbf{a})} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}_p^\pm) w_p^\pm \right) \right] \quad (3.102) \end{aligned}$$

donde los pesos w_p^\pm están normalizados respecto al área de triángulos.

3.4 Fase 3. Programar las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos

3.4.5.1. Aspectos de optimización

Ya que las funciones de radiación y recepción deben almacenarse para cada función base, éstas pueden ocupar un espacio considerable de memoria, por lo que cualquier optimización es importante. Puede observarse que el operador diádico $[\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}]$ elimina la componente de los vectores $\mathbf{T}_{r'b}(\hat{\mathbf{k}})$ y $\mathbf{R}_{r'a}^C(\hat{\mathbf{k}})$ en la dirección de $\hat{\mathbf{k}}$. En coordenadas esféricas $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{a}}_r$ por lo que las funciones de radiación y recepción sólo tendrán componentes $\hat{\mathbf{a}}_\theta$ y $\hat{\mathbf{a}}_\phi$. Esto es ventajoso computacionalmente, ya que solo se requieren almacenar dos componentes en lugar de tres, reduciendo los requerimientos de memoria. Otro aspecto importante, es que si se utiliza EFIE ($\alpha = 1$), las funciones de recepción se obtienen conjugando las de radiación, por lo que solo se necesitan almacenar las primeras.

3.4.6. Estudio espectral de la factorización.

La utilización factorizada de los elementos de la matriz de zona lejana obtenidos mediante el método FMM, la cual se resume en la ecuación (3.90) requiere la integral de superficie de una función escalar sobre una esfera unitaria, tal como lo demuestra [29]. La integral debe resolverse numericamente, por lo que se requiere un muestreo de la función a integrar. El numero de muestras a tomar para la integración debe cumplir con el teorema de muestreo de Nyquist, por lo que se requiere un estudio espectral de las funciones de transferencia, radiación y recepción, para así determinar el numero de muestras necesarias para la integración numerica precisa. El estudio de la factorización ha sido relizado por [29]. A continuación se muestra un resumen de los criterios para realizar ésta integración numericamente, empezando por el estudio de la función de transferencia, luego de las funciones de radiación y recepección.

3.4.6.1. Estudio espectral de la función de transferencia.

Partimos de la función de traasferencia vista en la ecuación (2.114) la cual es copiada nuevamente abajo, donde puede visualizarse que el único termino que depende de los puntos sobre la esfera unitaria estan en el argumento del polinomio de Legendre $P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab})$

$$T_L(\kappa, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) = \frac{\kappa}{(4\pi)^2} \sum_{l=0}^L (-j)^{l+1} (2l+1) h_l^{(2)}(\kappa |\mathbf{r}_{ab}|) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab}) \quad (3.103)$$

El polinomio de Legendre se puede expandir mediante el teorema de adición para armonicos esféricos encontrado en [3](página 813), de la siguiente manera:

$$P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l [Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}_{ab})]^* Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}) \quad (3.104)$$

donde $Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}) = Y_l^m(\theta, \phi)$ son armónicos esféricos dados por:

3.4 Fase 3. Programar las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{jm\phi} \quad (3.105)$$

siendo $P_l^m(x)$ los polinomios asociados de Legendre, determinados por:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (3.106)$$

Utilizando la formula de Rodrigues[1](página 785) , que establece:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l(l!)} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2-1)^l] \quad (3.107)$$

podemos escribir el polinomio de Legendre como:

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} [(x^2-1)^l] \quad (3.108)$$

Siendo posible obtener la siguiente relación:

$$P_l^{-q}(x) = (-1)^q \frac{(l-q)!}{(l+q)!} P_l^q(x), \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (3.109)$$

A partir ecuación (3.109) los armónicos esféricos se puede hallar para cualquier m entero, como:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = C_{lm} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi}, \quad m = 0 \pm 1, \dots, l \quad (3.110)$$

donde C_{lm} viene dado por:

$$C_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad (3.111)$$

Los armónicos esféricos dados por la ecuación (3.110) forman una base del espacio vectorial expandido por todas las funciones continuas con dominio en la esfera unitaria[3].

El contenido espectral de los armónicos esféricos es hallada por [29] determinando la transformada de Fourier en dos dimensiones la cual es:

3.4 Fase 3. Programar las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos

$$\mathcal{F}[Y_l^m(\theta, \phi)] = C_{lm} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi} e^{-j(\omega_\theta\theta + \omega_\phi\phi)} d\theta d\phi \quad (3.112)$$

y aplicando el el teorema de Fubini a la ecuación (3.112), se tiene que se puede reordenar de la siguiente forma:

$$\mathcal{F}[Y_l^m(\theta, \phi)] = C_{lm} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jm\phi} e^{-j\omega_\phi\phi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{-j\omega_\theta\theta} d\theta \quad (3.113)$$

$$= C_{lm} \mathcal{F}[e^{jm\phi}] \mathcal{F}[P_l^{|m|}(\cos\theta)] \quad (3.114)$$

Este resultado demuestra que el espectro de los armónicos esféricos se puede descomponer como el producto de los espectros de los polinomios de Legendre y del espectro de los exponenciales complejos. Estos exponenciales complejos tienen un ancho de banda de $W_\phi = m$, que de acuerdo al criterio de Nyquist significa que para reconstruir los exponenciales complejos $e^{jm\phi}$ se necesitan al menos una cantidad de N_ϕ muestras en ϕ de $N_\phi = W_{m_{ax}} = 2m$ muestras equitativamente espaciadas en ϕ .

Los polinomios asociados a Legendre $P_l^{|m|}$ vienen dados por la ecuación (3.108), los cuales son de grado l cuya derivada de orden $l + m$ resulta en polinomios de grado $l - m$. Reescribiendo la ecuación (3.108) se tiene:

$$P_l^{|m|}(\cos\theta) = \left[\frac{1}{2^l l!} (\sin\theta)^{|m|} \left(a_{l-|m|} (\cos\theta)^{l-|m|} + a_{l-|m|} (\cos\theta)^{l-|m|-1} + \dots + a_0 \right) \right] \quad (3.115)$$

Evaluando la transformada de Fourier de la expresión anterior como la convolución de los espectros individuales de los términos senoidales que se multiplican, se concluye que la función $P_l^{|m|}(\cos\theta)$ tiene un ancho de banda $W_\theta = l$, por lo que se requieren como mínimo, de acuerdo al teorema de Nyquist, de N_θ muestras en θ igualmente espaciadas, dada por $N_\theta = 2 \left(\frac{l}{2\pi} \right) \pi = l$, para reconstruir correctamente la función $P_l^{|m|}(\cos\theta)$.

Por lo anterior, un armónico esférico $Y_l^m(\theta, \phi)$ podrá ser reconstruido con número total de muestras de $N = N_\theta \times N_\phi = 2ml$ sobre la esfera unitaria. Ya que en la ecuación (3.104), el máximo de valor de l corresponde con el valor del número de multipolos L de truncamiento de la serie de la función de transferencia dada por la ecuación (3.103) y se necesitan $2L^2$ muestras sobre la esfera unitaria para reconstruirla función de transferencia.

3.4.6.2. Estudio espectral de las funciones de radiación y recepción.

El contenido espectral de la funciones de radiación y recepción se determina por los exponenciales complejos dados en las ecuaciones 3.96 y 3.79 para la EFIE y ecuación (3.87) para la MFIE. La función de radiación multiplica de igual manera las funciones de recepción de la EFIE o MFIE, por lo que solo se estudiara el contenido espectral las ecuaciones 3.96 y 3.79. El producto de estas dos funciones da a lugar el termino: $e^{j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r}_{ra} - \mathbf{r}_{rb})}$, el cual se puede expandir una una serie infinita mediante el teorema de adición de Gegenbauer[1](página 363):

$$e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}} = \sum_{l=0}^{\infty} (-j)^l (2l+1) j_l(\kappa|\mathbf{d}|) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_d) \quad (3.116)$$

donde $\mathbf{d} = \mathbf{r}_{ra} - \mathbf{r}_{rb}$. La exponencial compleja $e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}} = e^{-j\kappa|\mathbf{d}|\cos\gamma}$ oscila más rápido a medida que aumenta $|\mathbf{d}|$. Por esta razón, para el estudio del ancho de banda de éste término, se considera a $|\mathbf{d}| = |\mathbf{d}_{max}| = d$ siendo d la diagonal de los cubos en los que se agrupan las funciones bases. Utilizando el teorema de adición para armónicos esféricos[3] utilizado en la ecuación (3.103), se obtiene:

$$e^{-j\kappa\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}_{max}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (-j)^l j_l(\kappa d) \sum_{m=-l}^l \left[Y_l^m(\hat{\mathbf{d}}_{max}) \right]^* Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}) \quad (3.117)$$

La cantidad de terminos significativos de la suma infinta dada por la ecuación (3.117) se incrementa a medida que aumenta d y [29] demostró que es suficiente tomar un número de terminos igual a L , donde L viene dada por la expresión 3.94. La razón de esto, es que la función esférica de Bessel $j_l(\kappa d)$ converge a cero cuando l es ligeramente superior a κd , y los terminos de orden superior a L son despreciables. Finalmente los exponenciales complejos de la ecuación (3.117) se descomponen en una combinación lineal de armonicos esféricos $Y_l^m(\theta, \phi)$ con $0 \leq l \leq L$ y $-l \leq m \leq l$. Ya que las funciones radaición y recepción por separado dependen de $d/2$, tienen la mitad de ancho de banda por lo que será suficiente tomar L muestras en ϕ y $L/2$ muestras en θ , para asi ser suficiente tomar $L^2/2$ muestras sobre la esfera unitaria para reconstruir el producto de las funciones de recepción y radiación.

3.4.7. Integración numérica sobre la esfera unitaria.

Para determinar cada término de la matriz de zona lejana dada por la ecuación (3.90) es necesario de una integración numérica sobre la esfera unitaria en las direcciones discretas $\hat{\mathbf{k}}_p$ del producto de las funciones de transferencia, transmisión y recepción las cuales deben ser computadas y acumuladas previamente en cada una de las direcciones mencionadas anteriormente en función del ancho de banda de cada una de estas funciones y de la regla de cubatura a utilizar.

Con lo explicado anteriormente, la multiplicación de la funcion recepción, trans-

3.4 Fase 3. Programar las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE aplicando el método de los multipolos rápidos y el método de los momentos

misión y radiación, se podrá descomponer en una suma de productos armónicos esféricos, provenientes de la multiplicación de la ecuación (3.117) y de la ecuación (3.104), lo cual se puede expresar como una combinación lineal de funciones sobre la esfera unitaria de la forma:

$$f(\theta, \phi) = T_L(\theta, \phi) \cdot \mathbf{R}_{ra}^C(\theta, \phi) \cdot \mathbf{T}_{rb}(\theta, \phi) \quad (3.118)$$

$$\approx \sum_{l=0}^{2L} \sum_{m=-l}^l C_{lm} Q_l^{|m|}(\theta) e^{jm\phi} \quad (3.119)$$

donde el caracter aproximado se debe al truncamiento de la serie infinita de la ecuación (3.117) y $Q_l^{|m|}(\theta)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$Q_l^{|m|}(\theta) = (\sin\theta)^{|m|} \left(b_{l-|m|} (\cos\theta)^{l-|m|} + b_{l-|m|-1} (\cos\theta)^{l-|m|-1} + \dots + b_0 \right) \quad (3.120)$$

La ecuación (3.120) tiene un ancho de banda $W = 2L$, con L obtenido a partir de la ecuación (3.94), y calculando el número de multipolos de la función de transferencia a partir de la ecuación (3.95), de ésta manera se precisa de al menos de $N_\theta = 2L$ muestras en θ y $N_\phi = 2(2L) = 4L$ muestras en ϕ para reconstruir la función, sin embargo la utilización de una regla de cuadratura adecuada reduce puede reducir la cantidad de muestras requeridas para la integración.

La integración de algun término de la la sumatoria ecuación (3.118) viene dado por:

$$I = \int_0^{2\pi} e^{jm\phi} d\phi \int_0^\pi Q_l^{|m|}(\theta) \sin\theta d\theta \quad (3.121)$$

La integral de $e^{jm\phi}$, se calcula en un a período completo y puede ser obtenida de manera exacta para $-2L \leq m \leq 2L$ mediante la regla de cuadratura trapezoidal de $2L + 1$ puntos[9]. Esta integral es igual a cero sin $m \neq 0$. por lo que en este caso el resultado de I será exacto independientemente de la regla de cuadratura utilizada en la integral en θ . Para $m = 0$ se tiene:

$$I = 2\pi \int_0^\pi \left(b_l (\cos\theta)^l + b_{l-1} (\cos\theta)^{l-1} + \dots + b_0 \right) \sin\theta d\theta \quad (3.122)$$

$$= 2\pi \int_0^\pi (b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_0) dx \quad (3.123)$$

con $0 \leq l \leq 2L$. La utilización de una regla de cuadratura Gauss-Legendre de $L+1$ puntos no igualmente espaciados, permite calcular de manera exacta la integral defi-

3.5 Fase 4. Implementación del código.

nidad de cualquier función polinómica de grado menor o igual a $2L + 1$ [18]. Por lo tanto la integral sobre la esfera unitaria discretizando la función $f(\theta, \phi)$ en con un total de $N_\theta \times N_\phi = (L + 1)(2L + 1)$ muestras sobre la esfera unitaria.

[17, 29] que si el número de multipolos a utilizar es el obtenido de la ecuación (3.95), son suficientes $N_\theta = L + 1$ muestras en θ con una cuadratura de Gauss-Legendre y $N_\phi = 2L + 1$ muestras en ϕ con una cuadratura trapezoidal para integrar la multiplicación de las tres funciones. Esto totaliza una cantidad de $K = (L + 1)(2L + 1)$ muestras sobre la esfera unitaria, correspondientes a la suma del ancho de banda de la función de radiación, recepción y transferencia. Como cada función tiene un ancho de banda propio, individualmente es suficiente con almacenarlas a un muestreo menor a K , sin embargo al hacer la multiplicación de las tres funciones, éstas deben ser interpoladas a K muestras, lo que acarrea un adicional tiempo de cómputo en interpolaciones. Por esta razón, cada función se almacena individualmente con K muestras, para obtener un mejor rendimiento del CPU a expensas de un mayor uso de memoria.

3.4.7.1. Regla de Cubatura

Una regla de cuadratura [29], es un método numérico para aproximar el resultado de una integral definida, comúnmente como una combinación lineal de muestras de la función integrando:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^M w_i f(x_i) \quad (3.124)$$

Se suele denominar cuadratura, cuando la integral es unidimensional, y cubatura cuando se trata de integrales de más de una dimensión. En nuestro caso, la integración sobre la esfera unitaria puede expresarse como:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (3.125)$$

donde $f(\theta, \phi)$ representa la multiplicación de la función traslación, recepción y radiación. Esta integral

3.5. Fase 4. Implementación del código.

3.5.1. Introducción

Uno de los principales aportes de ésta investigación es la creación de rutinas para la programación del algoritmo que determina la matriz total del sistema de la ecuación integral de campo combinada CFIE denominada Z_{total} en formato denso, añadiendo rutinas al Código diseñado por Santamaría y Nuñez [29]. Esta matriz formada por

la suma de la matriz Z_{cercana} , que contiene únicamente las interacciones entre funciones bases cercanas que se encuentran en un mismo cubo o cubos adyacentes y las cuales son determinadas usando MoM directo, más la matriz Z_{lejana} que contiene las componentes debido a las interacciones entre funciones base lejanas que se encuentran en cubos distantes. Adicionalmente se tiene la incorporación de la rutina del cálculo de autovalores para grandes matrices encontradas en el paquete de álgebra lineal Lapack(Sección.2.2.17), la cual se insertó en el programa del cálculo de Z_{total} diseñado en Fortran 95, para así formar un código denominado Z_{total} , el cual arma la matrices total de la CFIE y determina los autovalores y el número de condición en función de la frecuencia y del parámetro de condición " α " de la CFIE.

3.5.2. Descripción del Diseño del código Z_{total} .

A continuación se explicaran los algoritmos utilizados, basados en el código MLFMLA [29]. El código MLFMLA permite determinar la RCS de objetos dispersores metálicos de forma arbitraria, las corrientes inducidas sobre éstos dispersores, y el diagrama de radiación de los mismos, basados en la resolución del sistema de ecuaciones obtenido mediante MoM y el algoritmo de los multipolos rápidos multinivel(MLFMA) utilizando un preconditionamiento basado en la matriz Z_{cercana} del sistema CFIE obtenida en formato CSR(Compressed Sparse Row)y luego aplicando el método del gradiente conjugado para encontrar las corrientes incógnitas en el dispersor.

Para describir el código que se ha implementado en este trabajo se hará uso del diagrama de flujo mostrado en la Figura.3.9.

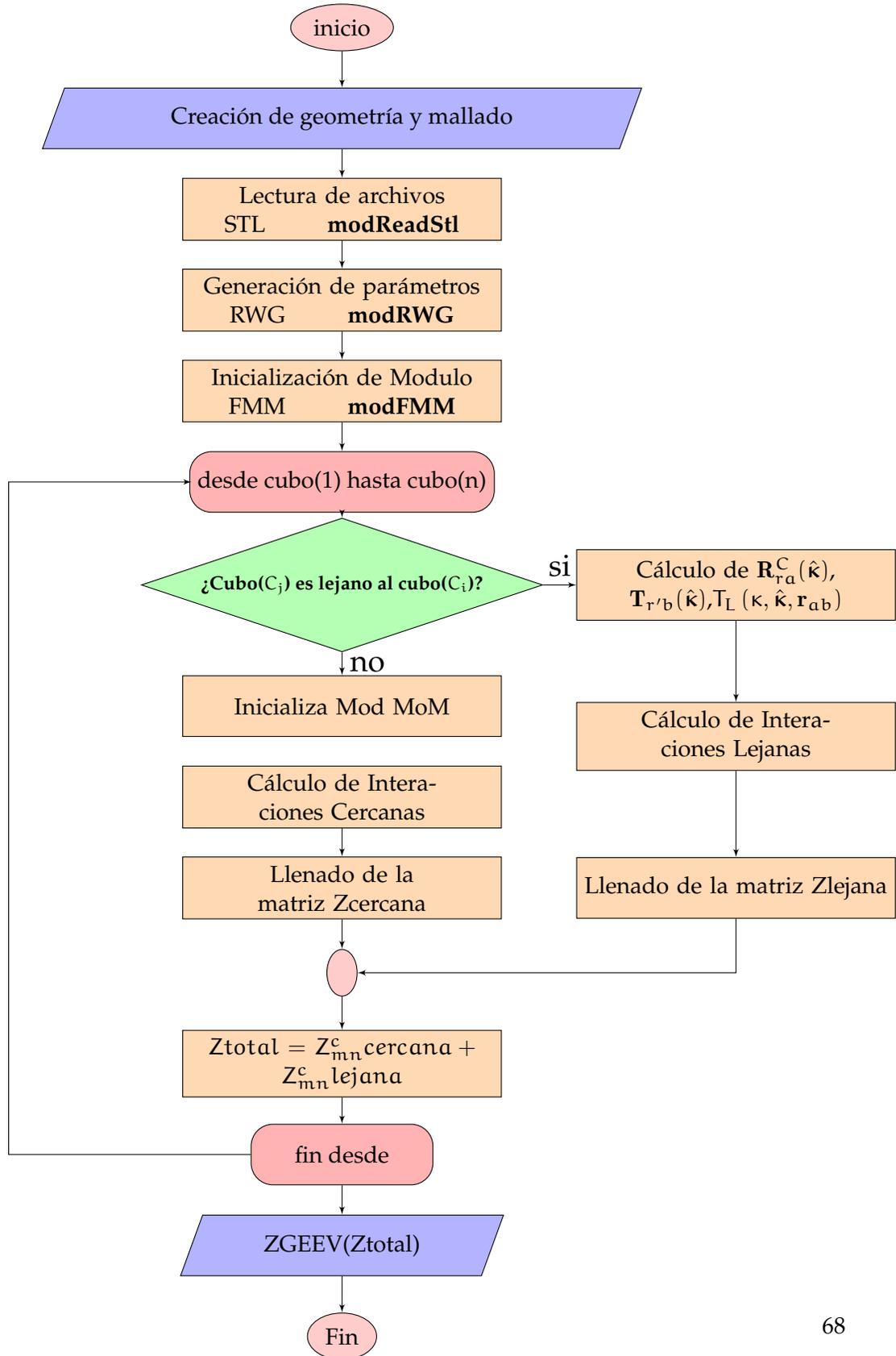


Figura 3.9: Diagrama de Flujo del Código Ztotal

3.5.2.1. Creación del dispersor.

Para crear la geometría del dispersor se ha utilizado el programa Gmsh¹, el cual es un programa de licencia libre utilizado para diseñar y mallar el elemento dispersor. Este programa malla el elemento en triángulos planos, obteniéndose un archivo tipo estereolitografía (.STL), el cual está en formato ASCII, y el cual será cargado al módulo modReadStl.f90.

3.5.2.2. Lectura de archivos .STL

La lectura de los archivos .stl son realizados por el módulo modReadStl diseñado por [29], el cual se encarga de leer el archivo .stl y determinar:

- La cantidad de triángulos en que se ha mallado la superficie del dispersor.
- Las coordenadas geométricas de los vértices de cada triángulo
- Los vectores unitarios normales a la superficie de cada triángulo.

y devolver tres arreglos bidimensionales relacionados al mallado del dispersor, los cuales son:

- **[p_coord]** es una matriz o a arreglo de 3 filas \times num_p, que contiene las coordenadas geométricas de cada punto o vértice que forma el elemento dispersor, donde num_p es el número de puntos nodos o vértices que posee el dispersor. Cada columna de la matriz representa un punto de cada triángulo del dispersor.

$$[\mathbf{p_coord}]_{3 \times \text{num_p}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{p\text{-esimo}} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{p\text{-esimo}} \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_{p\text{-esimo}} \end{bmatrix}_{3 \times \text{num_p}} \quad (3.126)$$

- **[t_p]** es una matriz de 3 filas \times num_t, la cual contiene por cada columna el número del vértice asociada a cada triángulo.

$$[\mathbf{t_p}]_{3 \times \text{num_t}} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_1 & \cdots \\ p_2 & p_3 & p_3 & \cdots \\ p_3 & p_7 & p_5 & \cdots \end{bmatrix}_{3 \times \text{num_t}} \quad (3.127)$$

- **[t_normal]** es una matriz de 3 filas \times num_t, la cual contiene por cada columna las coordenadas de los vectores normales a cada triángulo.

$$[\mathbf{t_normal}]_{3 \times \text{num_t}} = \begin{bmatrix} x_{n1} & x_{n2} & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots \end{bmatrix}_{3 \times \text{num_t}} \quad (3.128)$$

¹<http://gmsh.info/>

3.5.2.3. Generación de los parámetros de geometría utilizando las funciones RWG

Este módulo diseñado por [29], se encarga de generar los parámetros relacionados con las funciones RWG, adaptados al mallado. Este modulo denominado ModRWG.f90 utiliza los arreglos `[p_coord]`, `[t_p]` y `[t_normal]` para asociar a cada par de triángulos adyacentes una función base, por lo que cada orilla común entres dos triángulos contabilizará una función base, siendo (`num_e`) el número de orillas internas o funciones bases RWG, por lo que éste número sera el número de incógnitas a resolver o el número de elementos de la matriz total del sistema. El modulo modRWG genera los siguientes arreglos:

- `[e_p]` es una matriz de 2filas \times num_e, la cual contiene los números de vértice asociados a una orilla(edge). Cada columna representa una orilla.

$$[e_p]_{3 \times \text{num_e}} = \begin{bmatrix} p_1 & p_5 & p_3 & \cdots \\ p_3 & p_2 & p_7 & \cdots \end{bmatrix}_{3 \times \text{num_e}} \quad (3.129)$$

- `[e_long]` es vector de 1fila \times num_e, que contiene la longitud de cada orilla interna de los triángulos del dispersor

$$[e_long] = [\ell_{e1} \ \ell_{e2} \ \cdots \ \ell_{(\text{num_e})}]_{1 \times \text{num_e}} \quad (3.130)$$

- `[e_t]` es una matriz de 2filas \times num_e, la cual contiene por columna los triángulos que comparten una misma orilla en común. Cada columna esta asociada a una orilla en común

$$[e_t]_{3 \times \text{num_e}} = \begin{bmatrix} t_1 & t_4 & t_3 & \cdots \\ t_3 & t_9 & t_7 & \cdots \end{bmatrix}_{3 \times \text{num_e}} \quad (3.131)$$

- `[e_po]` es una matriz de 2filas \times num_e, la cual contiene por columna los puntos o vértices puestas a una orilla . Cada columna esta asociada a una orilla en común.

$$[e_po]_{3 \times \text{num_e}} = \begin{bmatrix} p_1 & p_4 & p_3 & \cdots \\ p_5 & p_3 & p_6 & \cdots \end{bmatrix}_{3 \times \text{num_e}} \quad (3.132)$$

- `[e_centro]`, es una matriz de 3 filas \times num_e , la cual contiene las coordenadas (x,y,z) del centro de cada orilla de cada función base RWG.

$$[e_centro]_{3 \times \text{num_e}} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{\text{num_e}} \\ y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{\text{num_e}} \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & \cdots & z_{\text{num_e}} \end{bmatrix}_{3 \times \text{num_e}} \quad (3.133)$$

Todos estos arreglos bidimensionales son paralelos, siendo cada índice externo (columna) correspondiente con el índice de cada función base RWG. El módulo también devuelve los siguientes arreglos paralelos a los arreglos `[t_normal]`, `[t_p]` donde cada índice externo corresponde con el índice de un triángulo:

- $[t_area]$ es vector de $1 \text{ fila} \times \text{num_t}$, que contiene el área de cada triángulo

$$[t_area] = [area_{e1} \quad area_{t2} \quad \cdots \quad area_{t(\text{num_t})}]_{1 \times \text{num_t}} \quad (3.134)$$

- $[t_baric]$ es una matriz de $3 \text{ filas} \times \text{num_t}$, que contiene las coordenadas geométricas del baricentros de cada triángulo o cada elemento dispersor. Cada columna de la matriz representa un triángulo del dispersor.

$$[t_baric]_{3 \times \text{num_t}} = \begin{bmatrix} x_{baric1} & x_{baric2} & x_{baric3} & \cdots & x_{\text{num_t}} \\ y_{baric1} & y_{baric2} & y_{baric3} & \cdots & y_{\text{num_t}} \\ z_{baric1} & z_{baric2} & z_{baric3} & \cdots & z_{\text{num_t}} \end{bmatrix}_{3 \times \text{num_t}} \quad (3.135)$$

3.5.2.4. Ejecución de Ztotal

El algoritmo encargado de llenar la matriz Z total del sistema, se encuentra en el módulo `modFMM`, donde se ha modificado el original diseñado por [29], agregándole los algoritmos necesarios para determinar la matriz Z_{total} del sistema CFIE en formato denso debido a las interacciones cercanas y lejanas, y los algoritmos del paquete Lapack para el cálculo de autovalores y número de condición. A diferencia del diseñado por [29], el `modFMM` para éste trabajo, almacena la matriz debido a las interacciones cercanas en un formato denso, a diferencia del formato esparcido (CSR), es decir, rellena con ceros los elementos debido a las interacciones entre bases lejanas, las cuales éstas últimas son calculadas y almacenadas de forma explícita en otra matriz denominada Z_{lejana} . Esta matriz Z_{lejana} es necesaria para conformar la matriz total del sistema. El módulo `ModFMM` diseñado por [29] no realiza el llenado de la matriz Z_{lejana} ya que aplica directamente el método FMM para calcular las interacciones lejanas en plena ejecución del producto matriz-vector al momento de encontrar la matriz de corrientes I , mediante el método interactivo el gradiente conjugado cuadrado, CGS por su siglas en ingles. Actualmente el modulo a usar tiene como entrada los arreglos provenientes de los módulos `modReadStl` y `modRGW`, y configura la geometría del dispersor, calculando el cubo que se ajuste a las dimensiones del dispersor y que encierre a todas las funciones bases, para luego subdividir a éste en cubos más pequeños que agrupen a funciones bases de acuerdo a los criterios establecidos en la Sección.3.4.1.

El modulo FMM opera con una estructura unidimensional de dato tipo derivado, denominado *cubos*, el cual incluye como variables arreglos con los índices de las funciones bases contenidas y cercanas al cubo en cuestión, también contiene los índices de las funciones de transferencias asociadas con cada cubo lejano. A continuación se explicará la estructura de este tipo de dato derivado denominado *cubos*.

$$[cubos] = [1, 2, \dots, C_j, \dots, n] \quad (3.136)$$

3.5 Fase 4. Implementación del código.

$$\left[\text{cubos} \right] = \left\{ \begin{array}{l}
 \text{cubo}(C_j) \% \text{centro}(\;) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{contiene las coordenadas} \\ \text{geométricas del centro} \\ \text{del cubo } C_j \end{array} \right. \\
 \text{cubo}(C_j) \% \text{n_propias} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{contiene el número bases propias} \\ \text{contenidas en } C_j \end{array} \right. \\
 \text{cubo}(C_j) \% \text{n_cercanas} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{contiene el número bases propias} \\ \text{cercanas_al_cubo_} C_j \end{array} \right. \\
 \text{cubo}(C_j) \% \text{n_cubos_lejanos} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{contiene el número de cubos} \\ \text{lejanos al cubo } C_j \end{array} \right. \\
 \text{cubo}(C_j) \% \text{bases_propias}(i) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{vector que contiene los índices} \\ \text{de las funciones bases propias} \\ \text{contenidas al cubo } C_j \end{array} \right. \\
 \text{cubo}(C_j) \% \text{bases_cercanas} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{vector que contiene las} \\ \text{las funciones bases cercanas} \\ \text{al cubo } C_j \end{array} \right. \\
 \text{cubo}(C_j) \% \text{cubos_lejanos}(i) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{vector que contiene los} \\ \text{índices_de los cubos lejanos} \\ \text{al cubo } C_j \end{array} \right. \\
 \text{cubo}(C_j) \% \text{ind_functransf}(i) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{vector que contiene los} \\ \text{índices_de las funciones} \\ \text{de transferencia_al_} C_j \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

Para la explicación de dicho dato tipo derivado, se muestra en la Figura.3.10 un ejemplo de un dispersor tipo plano el cual ha sido mallado con 12 triángulos y encerrado con un cubo de mínima dimensión que encierra todas las funciones bases dentro del dispersor. Este a su vez que contiene 9 cubos más pequeños.

Dentro del modulo FMM también se encuentran otro tipos de arreglos que son precalculados y almacenados al momento de calcular la ecuación (3.90) mediante el método FMM. A continuación su descripción:

- $[\text{kappas}]_{3 \times n_{\text{kappas}}}$
Es un arreglo real bidimensional que contiene las coordenadas (x,y,z) de cada punto sobre la esfera unitaria en donde se tomaran las muestras de FMM.

$$[\text{kappas}] = \begin{bmatrix} \hat{\kappa}_1 & \hat{\kappa}_2 & \hat{\kappa}_3 & & \\ (\kappa_1)_x & (\kappa_2)_x & (\kappa_3)_x & \dots & \\ (\kappa_1)_y & (\kappa_2)_y & (\kappa_3)_y & \dots & \\ (\kappa_1)_z & (\kappa_2)_z & (\kappa_3)_z & \dots & \end{bmatrix}_{3 \times n_{\text{kappas}}}$$

3.5 Fase 4. Implementación del código.

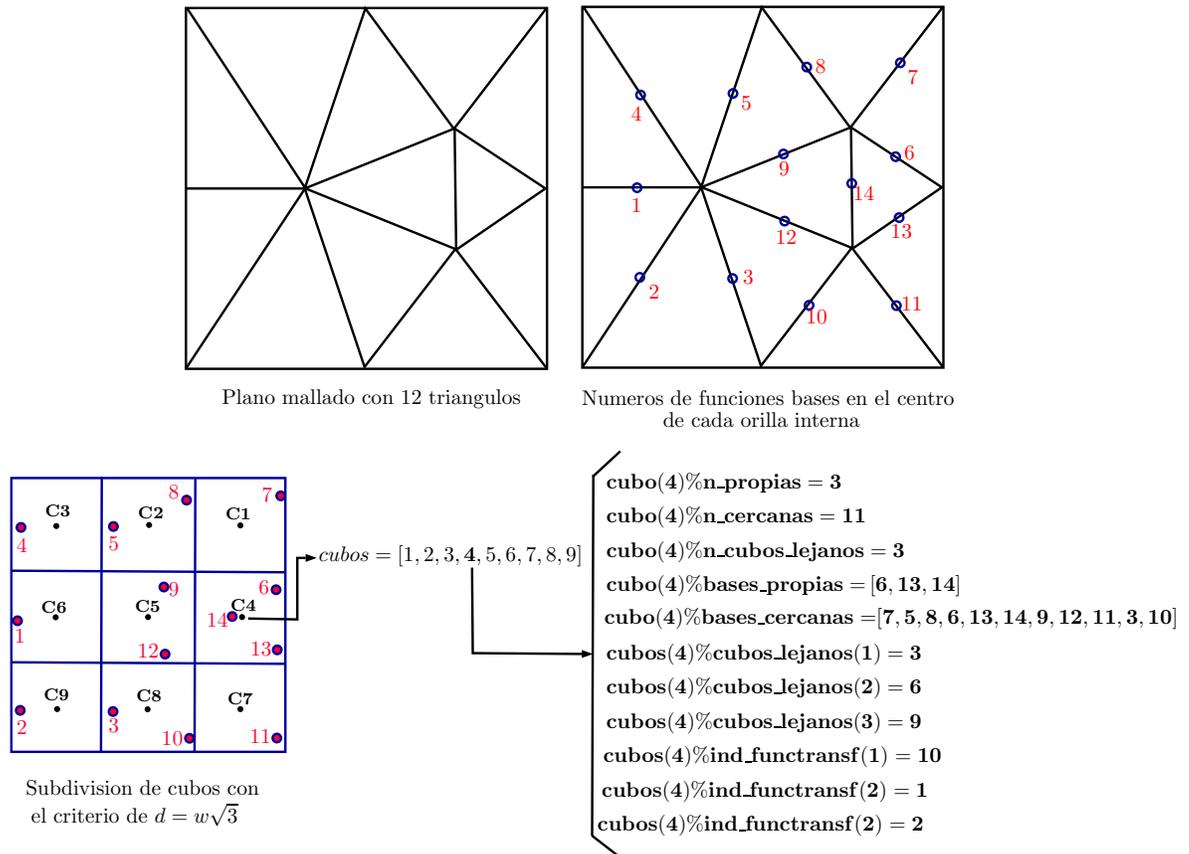


Figura 3.10: Ejemplo del dato tipo derivado:[cubos]. Fuente propia

- $[\text{ang_kappas}]_{2 \times n_kappas}$
Arreglo real que contiene los valores en (θ, ϕ) de cada punto sobre la esfera unitaria. Las columnas de éste arreglo son paralelas a al arreglo [kappas]
- $[\text{funcRAD}]_{n_kappas \times 2 \times \text{num_e}}$
Es un arreglo tridimensional que contiene las funciones de radiación de todas las funciones bases (num_e) en sus dos componentes vectoriales $\hat{a}_\theta, \hat{a}_\phi$ muestreadas en sus n_kappas en el único nivel de FMM.
- $[\text{funcREC}]_{n_kappas \times 2 \times \text{num_e}}$
Es un arreglo tridimensional semejante a $[\text{funcRAD}]_{n_kappas \times 2 \times \text{num_e}}$ pero referido a las funciones de recepción.
- $[\text{functransf}]_{n_kappas \times n_functransf}$
Es un arreglo de tipo complejo con todas las n funciones de trasferencias únicas (n_functransf) almacenadas en las respectivas número de kappas (n_kappas)

3.5 Fase 4. Implementación del código.

$$[\text{functransf}] = \begin{bmatrix} T_{L1}(\hat{\kappa}_1) & T_{L2}(\hat{\kappa}_1) & T_{L3}(\hat{\kappa}_1) & \cdots \\ T_{L1}(\hat{\kappa}_2) & T_{L2}(\hat{\kappa}_2) & T_{L3}(\hat{\kappa}_2) & \cdots \\ T_{L1}(\hat{\kappa}_3) & T_{L2}(\hat{\kappa}_3) & T_{L3}(\hat{\kappa}_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{n_kappas \times n_functransf}$$

- $[\text{campoB}]_{n_kappas \times 2 \times n_cubos}$
Es una arreglo complejo que contiene por cada cubo las componentes $\hat{\mathbf{a}}_\theta$ y $\hat{\mathbf{a}}_\phi$ del campo local almacenado definido por el producto de $T_L(\kappa, \hat{\kappa}, \mathbf{r}_{ab}) \cdot \mathbf{T}_{r'/b}(\hat{\kappa}) = [\text{functransf}] \cdot [\text{funcRAD}]$ en las n_kappas , donde n_cubos es la cantidad de cubos llenos.

3.5.3. Código para determinar la matriz Z de la CFIE debido a las interacciones cercanas (Zcercana)

La implementación de éste código ésta basada en el formato de datos derivado *cubos*. Esta rutina computa las componentes de la matriz de CFIE debido a las interacciones cercanas, tal como se muestra en la Figura.3.12 y utiliza el algoritmo de llenado Z_{mn_MoM} encontrado en módulo *ModMoM*, el cual computa el llenado de la matriz CFIE utilizando únicamente el método de los momentos. A continuación el pseudocódigo para para el llenado de $Z_{cercana}$.

Algoritmo 3.1 $Z_{cercana}$

```

Inicializa la matriz vacía  $Z_{cercana}$   $Z_{cercana}(:, :) \leftarrow 0.0$ 
for cada orilla m hasta num_e do
  for cada cubo Cj do
    for cada bases_propias en el cubo Cj do
      If bases_propias del cubo Cj = num_e
        Asignar a nc  $\leftarrow$  Num_bases_propias contenidas en el cubo Cj
        for all nc do
          Asignar a n  $\leftarrow$  Num_base_cercana contenida en el cubo Cj
           $Z_{cercana}(m,n) \leftarrow Z_{mn\_MoM}(m,n)$ 
        end for
      end If
    end for
  end for
end for

```

3.5.4. Código para determinar la matriz Z de la CFIE debido a las interacciones lejanas (Zlejana)

Semejante al código para determinar la Zcercana, éste código utiliza el formato de dato derivado *cubos*, para llenar la matriz de Zlejana de CFIE solamente debido a las interacciones lejanas, es decir, entre las funciones bases que se encuentran en grupos lejanos separados una distancia mayor a $d = w\sqrt{3}$

Algoritmo 3.2 Zlejana CFIE

Inicializa la matriz vacía Zlejana(:, :) ← 0,0

for cada cubo (C_j) do

 if Num_cubos_lejanos del cubo (C_j) ≠ 0 then

 nbp ← el num de bases propias contenidas en el cubo (C_j)

 for cada (nbp) do

 m ← el índice de la función_base_propia para cada (nbp)

 cl ← el num de cubos_lejanos del cubo (C_j)

 for cada (cl) do

 ncl ← el índice_del_Cubo_lejano_(cl) al cubo (C_j)

 for cada base_propia del Cubo (ncl) do

 n ← el índice de la función bases_propias del cubo(ncl)

 nft ← el índice del índice de func_transferencia(cl) del cubo(ncl)

 campoB(:, 1, C_j) ← functransf(:, nft) * funcRAD(:, 1, n)

 campoB(:, 2, C_j) ← functransf(:, nft) * funcRAD(:, 2, n)

 Zlejana(m, n) ← $\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{L+1} \sum_{k=1}^{2L+1} w_i^\theta w_k^\phi \text{campoB}(:, :, C_j) \cdot \text{funcREC}(:, :, m)$

 end for

 end for

 end for

 end if

end for

previamente antes de aplicar el código para llenar la Zlejana, deben haberse computado y almacenado, las matrices [funcRAD], [funcREC], y [functransf].

A continuación en la ecuación (Figura. 3.12) se muestra un ejemplo de la distribución de los elementos de las matrices Zcercana y Zlejana obtenidas mediante los códigos mencionados arriba, aplicados al del dispersor utilizando la función SPY.m del programa Octave.

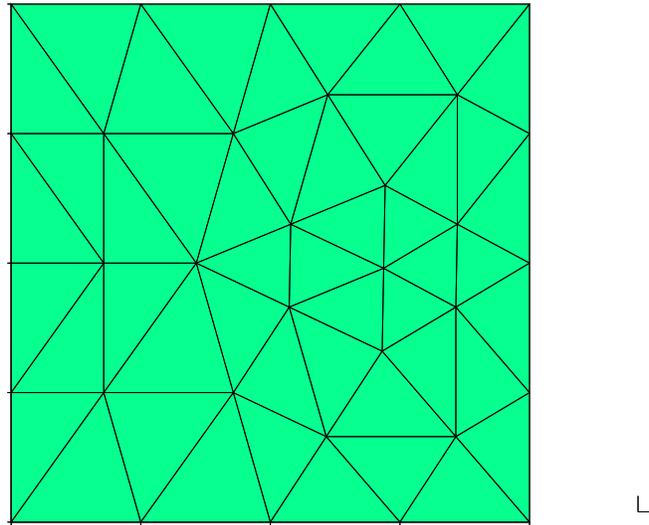
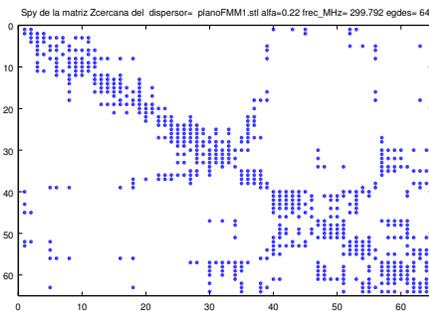
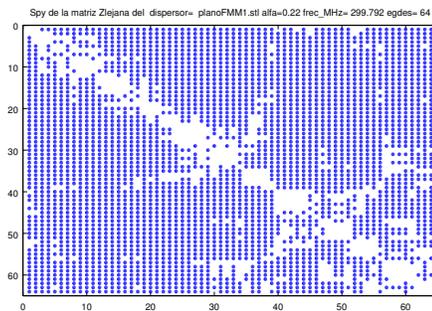


Figura 3.11: PlanoFMM1.stl 64 orillas



(a) Elementos de la matriz Zcercana CFIE. $\alpha=0.22$



(b) Elementos de la matriz Zlejana CFIE. $\alpha=0.22$

Figura 3.12: Aplicación del comando Spy en el programa Octave a la matriz Zcercana y Zlejana del dispersor planoFMM1.stl

3.5.5. Inserción del código Lapack para el calculo de Autovalores y número de condición.

Para el cálculo de los autovalores de la matriz del sistema de la CFIE se utilizó el paquete de álgebra lineal LAPACK (Sección.2.2.17). Este paquete se instaló en Linux mediante las siguientes líneas de comando, citadas a continuación, en el prompt de la consola.

3.5 Fase 4. Implementación del código.

Algoritmo 3.3 Instalación de Lapack en Ubuntu

```

~$ sudo apt-get install libblas3gf
~$ sudo apt-get install libblas-doc
~$ sudo apt-get install libblas-dev
~$ sudo apt-get install liblapack3gf
~$ sudo apt-get install liblapack-doc
~$ sudo apt-get install liblapack-dev
    
```

Posteriormente de instalado se inserto la subrutina ZGEEV()², la cual computa los autovalores de matrices no simétricas densas complejas. A continuación se describe la descripción de las entradas y salidas de dicha rutina:

Algoritmo 3.4 Subrutina ZGEEV

ZGEEV(JOBVL,JOBVR,N,A,LDA,W,VL,VR,LDVR,WORK,LWORK,RWORK ,INFO)

in/out	Param	descripción	in/out	Param	descripción
[in]	JOBVL	JOBVL is CHARACTER*1	[in]	LDVL	LDVL is INTEGER
		= 'N': left eigenvectors of A are not computed;			he leading dimension of the array VL.
		= 'V': left eigenvectors of are computed.			LDVL >= 1; if JOBVL = 'V', LDVL >= N.
[in]	JOBVR	JOBVR is CHARACTER*1	[out]	VR	VR is COMPLEX*16 array, dimension (LDVR,N). IF
		= 'N': right eigenvectors of A are not computed;			JOBVR = 'V', the right eigenvectors v(j) are stored one
		= 'V': right eigenvectors of A are computed.			after another in the columns of VR, in the same order
[in]	N	N is INTEGER The order of the matrix A.	[in]	LDVR	LDVR is INTEGER. he leading dimension of the
		N >= 0			array VR. LDVR >= 1; if JOBVR = 'V', LDVR >= N
[in/out]	A	A is COMPLEX*16 array, dimension (LDA,N)	[out]	WORK	.WORK is COMPLEX*16 array
		On entry, the N-by-N matrix A.			WORK is COMPLEX*16 array, On exit, if INFO = 0,
[in]	LDA	LDA is INTEGER. The leading dimension	[out]	LWORK	WORK(1) returns the optimal LWORK.
		of the array A. LDA >= max(1,N).			LWORK is INTEGER.
[out]	W	W is COMPLEX*16 array, dimension (N).	[out]	RWORK	RWORK is DOUBLE PRECISION array, dimension (2*N)
		W contains the computed eigenvalues.			
[out]	VL	VL is COMPLEX*16 array, dimension	[out]	INFO	INFO is INTEGER
					= 0: successful exit. < 0: if INFO = -i,< 0: if INFO = -i
		dimension (LDVL,N)			the i-th argument had an illegal value.
					> 0: if INFO = i, the QR algorithm failed to compute

Las entradas y salidas aplicadas a Ztotal para ésta subrutina son:

²<http://www.netlib.org/lapack/explore-html/>

3.6 Fase 5. Experimentos a realizar

nombre del parámetro	valor implementado	descripción
JOBVL	'N'	los autovalores a la Izquierda no son calculados
JOBVR	'N'	los autovalores a la Derecha no son calculados
N	num_e	NÚMERO DE BORDES= n° DE INCÓGNITAS.
A	Ztotal	Matriz del sistema de CFIE
LDA	num_e	los autovalores a la Izquierda no son calculados
W	autovalores	matriz de los autovalores de la matriz CFIE
VL	DUMMY	elemento vacío (0+0j)
LDVL	1	1
VR	DUMMY	elemento vacío (0+0j)
LDVR	1	1
WORK	WORK	2^{\ast}num_e
LWORK	DWORK	2^{\ast}num_e
RWORK	DWORK	2^{\ast}num_e
INFO	OK	

Tabla 3.1: Valores de la variables implementadas en la subrutina ZGEEV()

3.6. Fase 5. Experimentos a realizar

En ésta fase se realizarán experimentos numéricos para determinar como se ve afectado el espectro de autovalores y el número de condición de las matriz del sistema de las ecuaciones integrales EFIE, MFIE y CFIE para dispersores PEC.

Los experimentos serán realizados discretizando el objeto dispersor con el programa Gmsh, el cual realiza un mallado tipo conforme no estructurado.

Para la determinación de como se ve influenciado el espectro de autovalores y el número de condición de la matriz Zcercana en función de los parámetros: coeficiente de ponderación de la CFIE, frecuencia, densidad de mallado, y forma del dispersor, se realizaran los siguientes experimentos.

3.6.1. Experimento N°1

Este experimento tiene como finalidad comparar el espectro de autovalores y el número de condición las matrices Ztotal y Zcercana en función del parámetro de ponderación α de CFIE, cuando se varía la longitud del lado cubo W utilizado en FMM. Para dicha evaluación se tomará un barrido del parámetro α desde el valor 0.0 hasta 1.0 en pasos de 0.1. Para éste experimento se tomará como dispersores tipo PEC la EMCC Al-mendra de la Nasa y la EMCC Cono-Esfera, dispersores de referencia utilizados para probar los algoritmos de determinación de la RCS de objetos metálicos [39].

Para éste experimento se utilizaron valores recomendados del lado cubo W por Walton C. Gibson [17] página 341 de $0,5\lambda$ y $0,25\lambda$ y valores usados por Santamaría y Nuñez [29] donde demuestran que para lados cubos W de $0,125\lambda$ y $0,0625\lambda$ se obtienen

3.6 Fase 5. Experimentos a realizar

resultados satisfactorios en el cálculo de la RCS en la implementación de su algoritmo MLFMA.

$\lambda/2 = 0,5\lambda$
$\lambda/4 = 0,25\lambda$
$\lambda/8 = 0,125\lambda$
$\lambda/16 = 0,0625\lambda$
$\lambda/32 = 0,03125\lambda$

Tabla 3.2: Valores del lado cubo W utilizados en el experimento N°1

3.6.2. Experimento N°2

3.6.2.1. Descripción.

En éste experimento se varía el coeficiente de ponderación α desde 0.0 hasta 1.0 en pasos de 0.1 y se calcula el espectro de autovalores y el numero de condición de la matriz Zcercana de los dispersores: esfera, cilindro, Almendra de la Nasa y la Doble Ojiva en función de la frecuencia. Para

llevar a cabo éste experimento se definen las siguientes variables:

- h : Es la longitud promedio de las orillas internas de los triángulos.
- ℓ_{max} : Es la longitud máxima de la orillas de los triángulos
- ℓ_{min} : Es la longitud mínima de la orillas de los triángulos
- N_{Δ} : Es el número de triángulos utilizados para mallar al dispersor.
- num_e : Es el numero de orillas internas entre triángulos adyacentes del dispersor. Esta cantidad es igual al número filas y columnas de la matriz Zcercana.
- n_{λ} : Es la densidad de discretización promedio del dispersor para la frecuencia del experimento utilizando el número promedio de orillas de los triángulos (h)
- $(n_{\lambda})_{min}$: Es la densidad de discretización mínima del dispersor para la frecuencia del experimento utilizando la máxima longitud de orillas de los triángulos (ℓ_{max}), es decir:

$$(n_{\lambda})_{min} = \frac{\lambda}{\ell_{max}} \quad (3.137)$$

- $h(\lambda)$: Es la longitud promedio de todas las orillas que conforman el elemento dispersor en longitud de onda a la frecuencia de estudio.

3.6.2.2. Mallado de los dispersores

Para mallar los dispersores se utiliza el programa Gmsh, donde el procedimiento para su mallado y el de todas las dispersores fue el siguiente:

1. Por cada una de las frecuencias utilizadas para el estudio se utiliza una densidad de discretización promedio $n_\lambda = 10$, del cual se despeja la longitud promedio de las orillas de los triángulos internos que cumplieran con éste requisito para cada frecuencia.
2. Calculada la longitud promedio de las orillas (h), ésta se introduce en el programa Gmsh, como longitud característica la cual se utiliza para mallar el dispersor con longitud promedio de los triángulos esperada para los cálculos.
3. Este mallado se guarda como extensión .stl, el cual es utilizado en el Programa Ztotal, para el calculo de autovalores.
4. Para verificar la longitud promedio, máxima y mínima de las orillas de los triángulos obtenidas luego del mallado del dispersor en Gmsh se implementaron rutinas en el código de Ztotal para calcular dichos parámetros.
5. Para verificar las longitudes h , ℓ_{max} y ℓ_{min} las cuales arroja el programa Ztotal, se aplica el comando: `run=frec`, donde se introduce el nombre del modelo .STL en el cual se ha mallado el dispersor.

3.6.2.3. Especificaciones de los dispersores elegidos para el experimento N°2

Esfera.

1. Se eligió una esfera de radio de 1 metro, la cual a la frecuencias de estudio son 600MHz, 450MHz, 300MHz y 150MHz, se encuentran en la región óptica de la misma ya que el diámetro de la misma es aproximadamente mayor que las longitudes de onda que quedan atrapadas en su diámetro por lo que en este rango de frecuencias la esfera posee como máximo 4 longitudes de onda a 600MHz y 1 una longitud de onda a 150Mhz. En este rango de frecuencia la RCS monoestática es aproximadamente constante, razón por la cual diseñadores utilizan esferas para calibrar sistemas de radar.
2. Para determinar el espectro de autovalores se utilizo como tamaño del cubo en el FMM ($lw = 0,5\lambda$).

Cilindro.

1. Se utilizó un cilindro de radio 1metro y de altura 2metros. Las frecuencia elegidas de estudio son 600MHz, 450MHz, 300MHz y 150MHz, las cuales se encuentran en la región óptica del mismo.
2. Para determinar el espectro de autovalores se utilizo como tamaño del cubo en el FMM ($lw = 0,5\lambda$)

Almendra de la Nasa.

1. La Almendra de la nasa utilizada en este proyecto en la EMCC Metallic Almond, la cual es un blanco de referencia (Benchmark) en el Electromagnetic Code Consortium (EMCC), utilizada como validación de códigos electromagnéticos. Sus especificaciones de longitud pueden obtenerse de la siguiente referencia [39].
2. Las frecuencias utilizadas para el estudio fueron de 9.92GHz, 7Ghz, 1.57Ghz y 1.18Ghz.
3. Para determinar el espectro de autovalores se utilizo como tamaño del cubo en el FMM ($lw = 0,5\lambda$)

Doble Ojiva

1. La Doble Ojiva utilizada en este proyecto es la EMCC Metallic Double Ogive, la cual es un blanco de referencia (Benchmark) en el Electromagnetic Code Consortium (EMCC), utilizada como validación de códigos electromagnéticos. Sus especificaciones de longitud pueden obtenerse de la siguiente referencia [39].
2. Las frecuencias utilizadas para el estudio fueron de 9.92GHz, 7Ghz, 1.57Ghz y 1.18Ghz.
3. Para determinar el espectro de autovalores se utilizo como tamaño del cubo en el FMM ($lw = 0,5$)

3.6.3. Experimento N°3

En éste del experimento a diferencia del Experimento N°2, el parámetro que varía es la densidad de discretización. Esta variación se realiza cambiando la longitud promedio de los bordes de los triángulos utilizados para mallar el dispersor manteniendo la frecuencia constante. Para cada n_λ se varió del coeficiente de ponderación α de la CFIE desde 0.0 hasta 1.0 en pasos de 0.1 y se calculó el espectro de autovalores y el numero de condición de la matriz Zcercana de los dispersores: EMCC Almendra de la Nasa, EMCC Doble Ogive utilizando el programa Ztotal.

Posteriormente se aplico el mismo procedimiento de mallado para analizar el comportamiento de la matriz Zcercana del dispersor EMCC cono-esfera para variaciones del coeficiente de ponderación de la CFIE desde 0.0 a 0.5 y se determinó su espectro de autovalores y numero de condición.

El dispersor EMCC Cone-Sphere también forma parte de los dispersores usados para validación de códigos electromagnéticos citados en [39].

3.7. Fase 6. Validación de los resultados obtenidos.

Para validar los resultados obtenidos en el llenado y determinación de la matrices Zcercana y Ztotal, se realizó el cálculo la sección recta de radar (RCS) mediante la

3.7 Fase 6. Validación de los resultados obtenidos.

implementación del método FMM usado para calcular los elementos $Z_{mn}^{lejanos}$ de la matriz Zlejana, y el método de los momentos para el cálculo de los $Z_{mn}^{cercanos}$ de la matriz Zcercana, para posteriormente utilizar el módulo implementado por [29], que permite resolver el sistema de ecuaciones $Z_{total} \cdot I = V$ mediante el método del gradiente conjugado al cuadrado (CGS, por sus siglas en inglés de Conjugate Gradient Squared). Posteriormente los resultados del cálculo de la RCS se comparan con la RCS reportada en la fuente [39] y mediante el Programa CST Suite Studio 2018, que permite el cálculo de RCS monoestáticas y biestáticas.

4 Análisis, interpretación y presentación de resultados

En este capítulo se muestran los resultados y los respectivos análisis de los experimentos 1 al 3 utilizados para la evaluación de matriz Z del sistema de la CFIE al determinar el espectro de autovalores y el número de condición en función del parámetro de ponderación α para diferentes tipos de dispersores al variar este coeficiente de ponderación en función del lado cubo W , de la frecuencia y de la densidad de discretización n_λ .

4.1. Resultados

4.1.1. Experimento N°1. Determinación y comparación del espectro de autovalores y número de condición de la matriz Z_{total} y $Z_{cercana}$ en función del lado cubo W del método FMM.

Para este experimento se utilizaron los siguientes dispersores: EMCC Almendra de la Nasa y el EMCC Cono Esfera.

A continuación se describen los resultados al aplicar el programa Z_{total} para determinar el espectro de autovalores y número de condición de un dispersor cerrado en función de lado cubo W del método FMM.

4.1.1.1. Superficie abiertas: EMCC Almendra de la Nasa y EMCC Cono-Esfera

A continuación características de los dispersores utilizados en el experimento N°1

Dispersor	N_Δ	num_e	$(n_\lambda)_{min}$	Frecuencia
EMCC_almond_nl10	574	861	10.20	1.19GHz
EMCC_cone_sphere_nl_10	704	1056	9.93	869MHz

Tabla 4.1: Características de los dispersores usados en el experimento N°1

A continuación en la Tabla 4.2 y Tabla 4.3 se muestra el porcentaje de interacciones cercanas y número de elementos que conforman la matriz $Z_{cercana}$ en función del lado cubo W para los dispersores del experimento N°1,

4.1 Resultados

Lado W	% de Interacciones cercanas	Nº de elementos de Zcercana	Número de cubos
$0,5\lambda$	100	741321	2
$0,25\lambda$	63.32	469421	8
$0,125\lambda$	27.04	200449	32
$0,0625\lambda$	8.69	64467	189
$0,03125\lambda$	1.996	14797	534

Tabla 4.2: Porcentaje de interacciones cercanas en el llenado de la Matriz Zcercana en función del lado W para la EMCC Almendra a 1.19GHz.

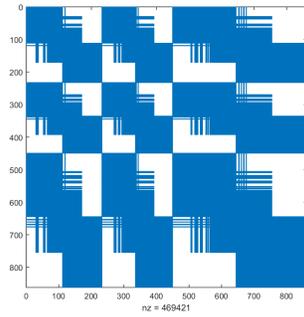
Lado W	% de Interacciones cercanas	Nº de elementos de Zcercana	Número de cubos
$0,5\lambda$	63.22	705024	4
$0,25\lambda$	34.73	387328	29
$0,125\lambda$	11.32	126260	123
$0,0625\lambda$	3.26	36320	429
$0,03125\lambda$	0.84	9370	921

Tabla 4.3: Porcentaje de interacciones cercanas en el llenado de la Matriz Zcercana en función del lado W para la EMCC Cono Esfera a 869MHz.

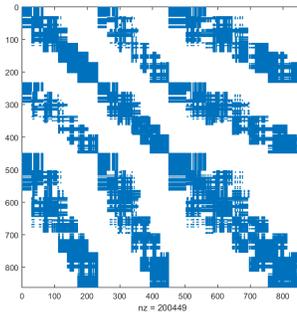
En la Figura.4.2 se muestra la variación de número de condición en función del coeficiente de ponderación α de la CFIE para las matrices Ztotal y Zcercana para los diferentes valores de lado cubo W indicados en la Tabla 4.2 y Tabla 4.3.

En la Figura.4.1 se visualiza la conformación de elementos Zmn de la matriz Zcercana en función del lado cubo W, utilizando la Función Spy.m del programa Octave.

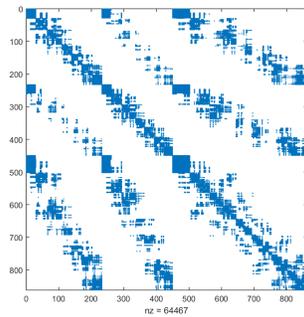
4.1 Resultados



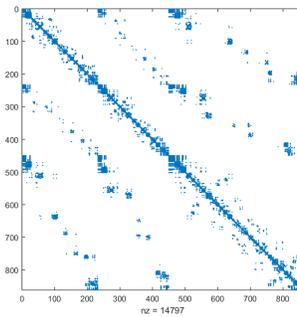
Lado $W=0,25\lambda$



Lado $W= 0,125\lambda$



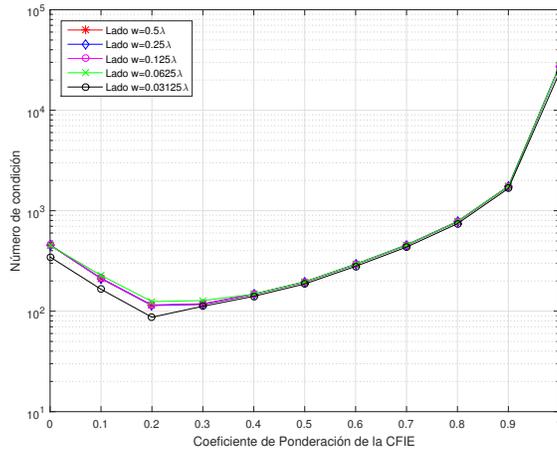
Lado $W=0,0625\lambda$



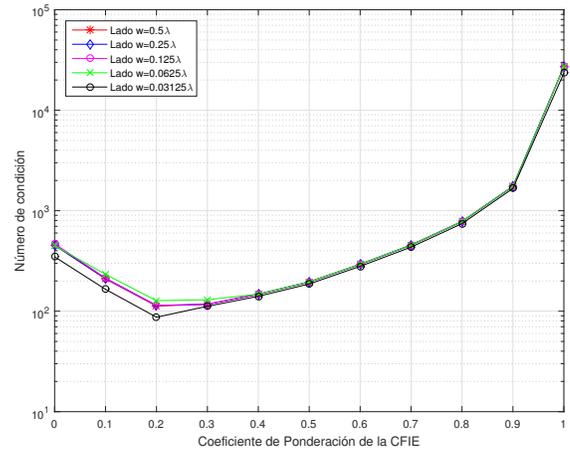
Lado $W= 0,03125\lambda$

Figura 4.1: Conformación de los elementos de la Matriz Zcercana en función de lado cubo W para la EMCC almendra de la nasa a 1.19GHz .

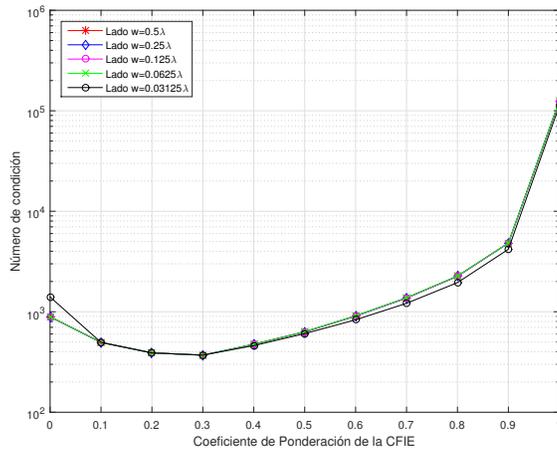
4.1 Resultados



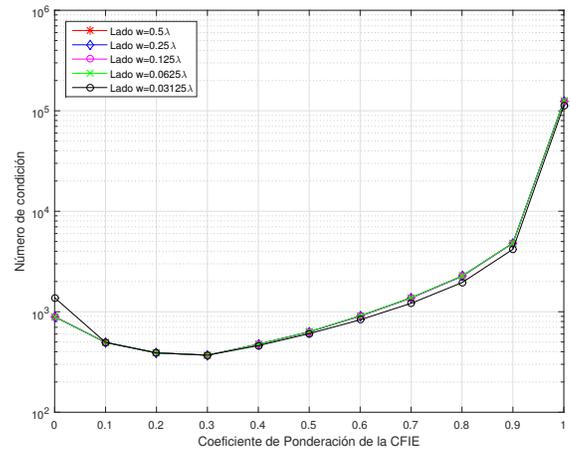
a) Ztotal EMCC Cono -Esfera. $(n_\lambda)_{\min} = 9,93$



b) Zcercana EMCC Cono -Esfera. $(n_\lambda)_{\min} = 9,93$



c) Ztotal EMCC Almond $(n_\lambda)_{\min} = 10,20$



d) Zcercana EMCC Almond $(n_\lambda)_{\min} = 10,20$

Figura 4.2: Variación del número de condición Vs. el coeficiente de ponderación α de la CFIE en función del lado cubo W para las matrices: a) Ztotal Cono-Esfera a 869MHz b) Zcercana EMCC Cono -Esfera a 869MHz, c) Ztotal EMCC_almond a 1.19GHz d) Zcercana de EMCC_almond a 1.19GHz.

A continuación se compara el espectro de autovalores de la matriz Zcercana y de la matriz Ztotal del dispersor EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz. Es de notar que el autovalor máximo consiste en el elemento que tenga la mayor magnitud.

Espectro de autovalores para las matrices Zcercana y Ztotal de la EFIE.

4.1 Resultados

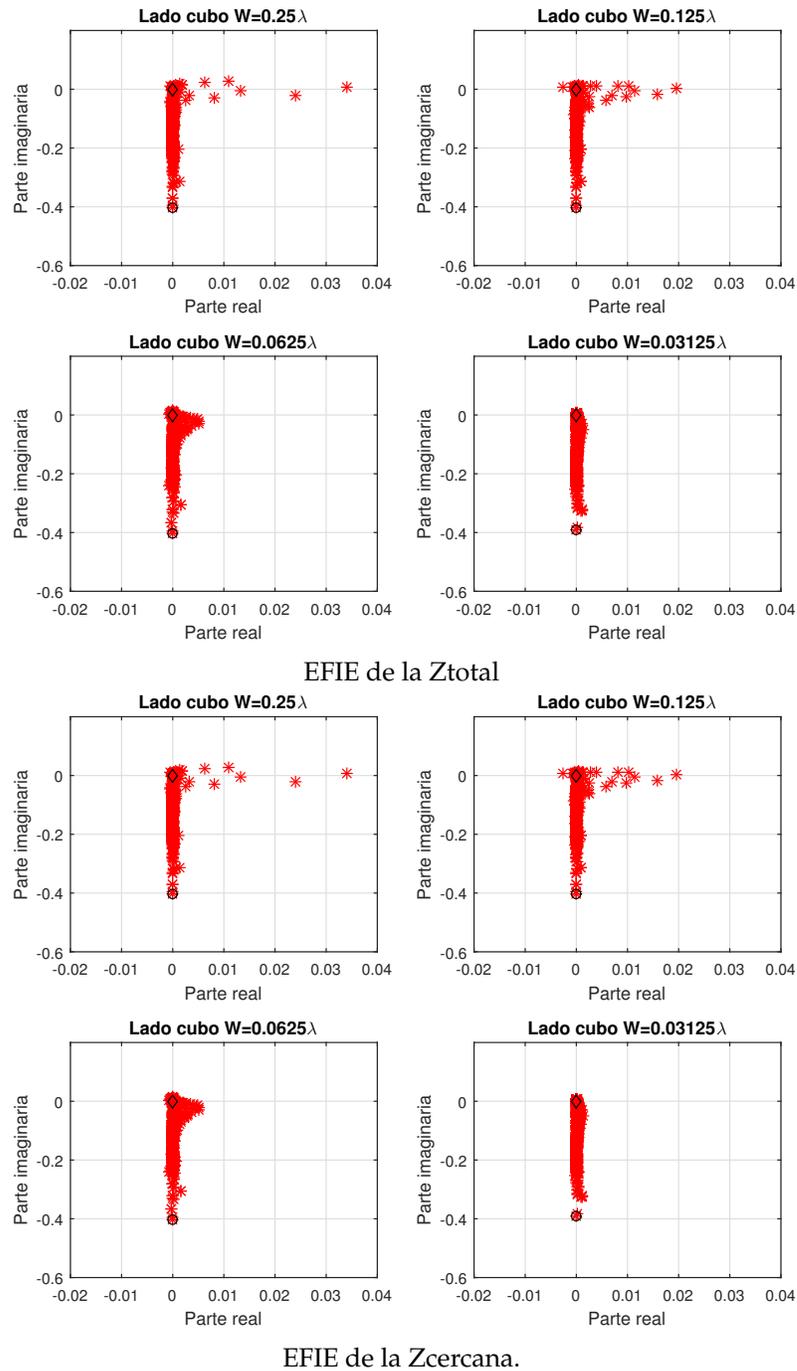


Figura 4.3: Espectro de autovalores de la matrices Ztotal y Zcercana de la EFIE del EMCC Almendra a 1.19GHz. ◇ Mínimo autovalor. ○ Máximo autovalor.

Espectro de autovalores para las matrices Zcercana y Ztotal de la MFIE.

4.1 Resultados

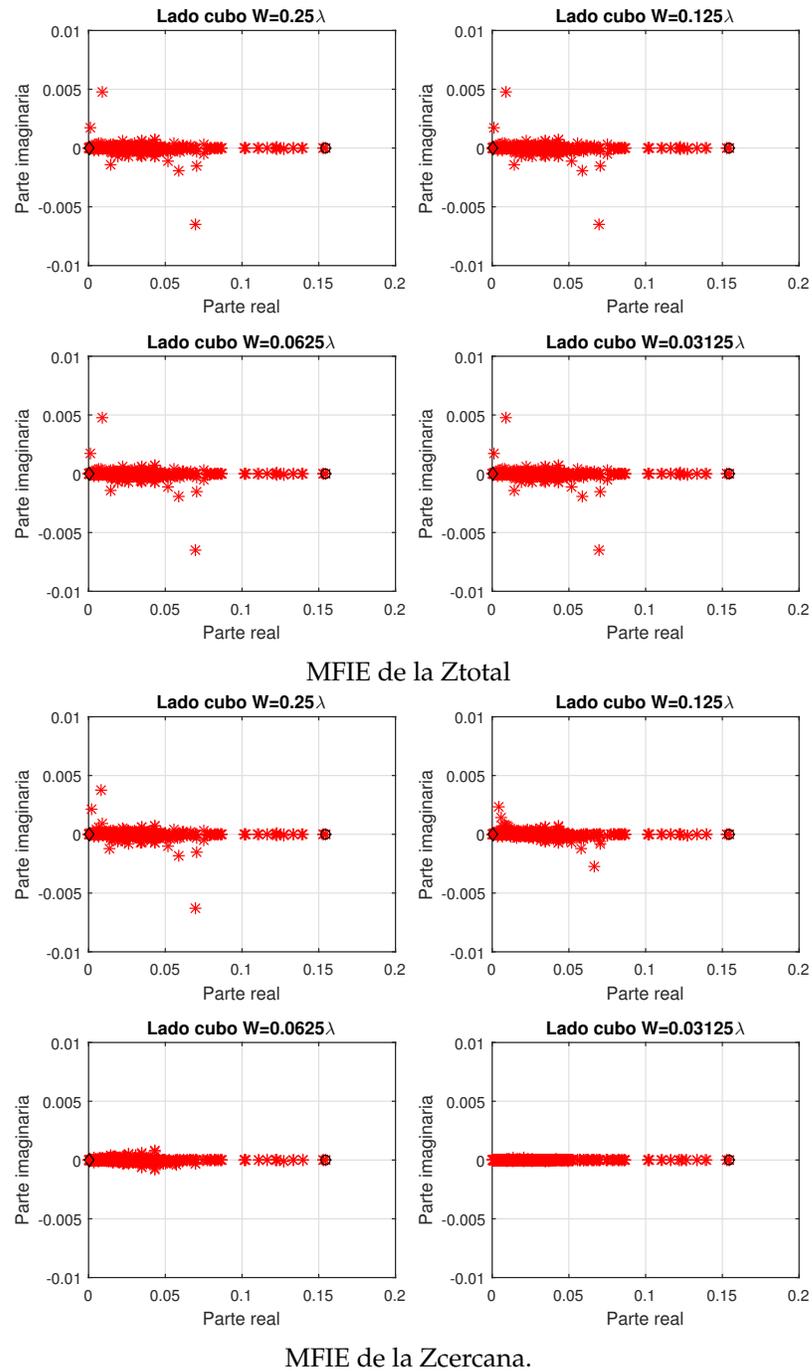


Figura 4.4: Espectro de autovalores de la matrices Z_{total} y $Z_{cercana}$ de la MFIE del EMCC Almendra a 1.19GHz. ◇ Mínimo autovalor. ○ Máximo autovalor.

Espectro de autovalores para las matrices $Z_{cercana}$ y Z_{total} de la CFIE

4.1 Resultados

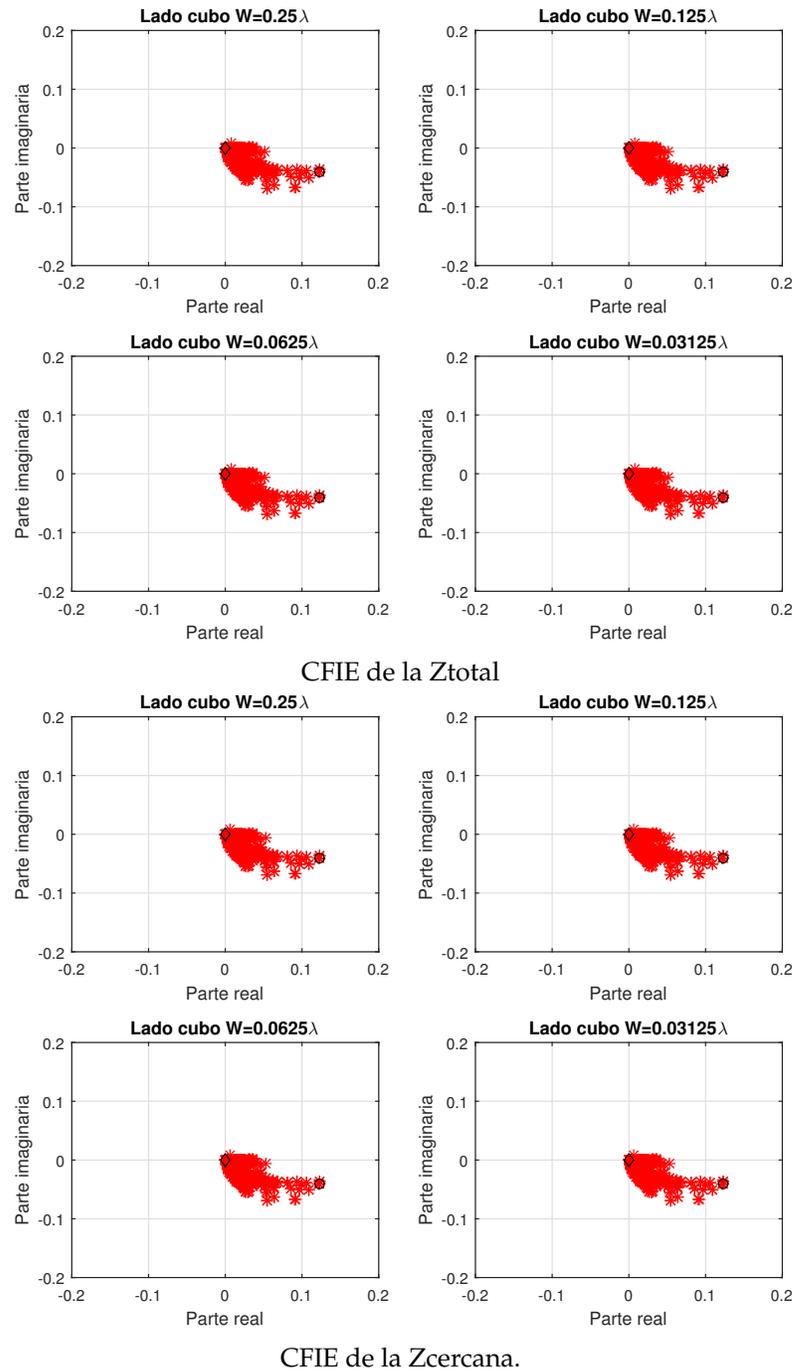


Figura 4.5: Espectro de autovalores de la matrices Z_{total} y $Z_{cercana}$ de la CFIE del EMCC Almendra a 1.19GHz para un coeficiente de ponderación $\alpha=0.2$ donde se alcanza el menor número de condición. \diamond Mínimo autovalor. \circ Máximo autovalor.

A continuación en la Tabla 4.4 se detallan los valores de los autovalores máximos

4.1 Resultados

y mínimos que toman las matrices Z_{total} y $Z_{cercana}$ de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz

Ecuación Integral	Z_{total}		$Z_{cercana}$	
	Autovalor máximo(\circ)	Autovalor mínimo(\diamond)	Autovalor máximo(\circ)	Autovalor mínimo(\diamond)
EFIE	-0.4012i	-3.210e-06i	-0.4012i	-3.210e-06i
MFIE	0.1546	1.7327e-04+7.0e-07i	0.1546	1.7324e-04+6.5e-07i
CFIE($\alpha = 0,2$)	0.1222-0.0406i	2.9996-1.3823e-04i	0.1222-0.0406i	2.9996-1.3823e-04i

Tabla 4.4: Valores de los autovalores máximos y mínimos para las Ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE para la Z_{total} y $Z_{cercana}$ del EMCC Almendra a 1.19GHz y Lado cubo $W=0,25\lambda$.

4.1.2. Análisis de resultados del experimento N°1

Los resultados mostrados en la Figura.4.2, Figura.4.3, Figura.4.4 y Figura.4.5 demuestran lo siguiente:

- La variación del número de condición en función del coeficiente de ponderación α de la CFIE en función del lado cubo W de las matrices Z_{total} y $Z_{cercana}$ tienen el mismo comportamiento: se encuentra un valor de α donde existe un mínimo del número de condición que tiene el mismo valor en ambas matrices. Se visualiza que la variación del número de condición es idéntica para ambas matrices.
- Para valores del lado cubo W mayores a $0,125\lambda$ en la EMCC Cono Esfera el número de condición no es función del lado W .
- Para un lado cubo W mayor a $0,0625\lambda$ en la EMCC Almendra de la Nasa el número de condición no se ve afectado por éste parámetro ya que ambas gráficas, tanto de la Z_{total} y la $Z_{cercana}$ resultan idénticas.
- Se visualiza que en los espectros de autovalores de las matrices Z_{total} y $Z_{cercana}$ de la EFIE tienen un comportamiento semejante y donde éste espectro se recoge al eje imaginario a medida que el lado cubo se hace cada vez más pequeño. Esto último significa que los autovalores de la EFIE tienden a ser números imaginarios. Se evidencia que los autovalores máximo y mínimo de ambas matrices son prácticamente los mismos. Ver Tabla 4.4.
- En cuanto a los espectros de autovalores de las matrices Z_{total} y $Z_{cercana}$ de la MFIE tienden a ser idénticas. Los autovalores tienden a ser números reales a medida que el lado cubo W se hace cada vez más pequeño. Se evidencia en la gráficas que el espectro de la matriz Z_{total} para un lado cubo $W = 0,03125\lambda$ tiene algunos autovalores que son complejos a diferencia del espectro de la $Z_{cercana}$ que sus autovalores son reales.

- El espectro de la CFIE de ambas matrices es prácticamente el mismo, donde se evidencia que el autovalor máximo y el mínimo poseen una parte real y una parte imaginaria y que el autovalor mínimo de la CFIE es de mayor magnitud que el de la EFIE y MFIE y toma una posición más alejada del origen del sistema de coordenadas cuando se compara con los autovalores mínimos de la MFIE y EFIE. Ver Tabla 4.4.
- Del experimento N°1 se evidencia que el número de condición determinado usando el espectro de autovalores de la matriz Z_{cercana} y Z_{lejana} queda fundamentalmente dependiente de los elementos Z_{nn} de la diagonal principal y de valores muy próximos a éstos, ya que a medida que el lado W disminuye son estos los elementos predominantes en la matriz Z_{cercana} teniendo valores absolutos mayores a los Z_{mn} , $m \neq n$. En la Figura.4.1 se muestra la distribución de elementos de la Z_{cercana} de la EMCC almendra de la Nasa a 1.19GHz.

4.1.3. Experimento N°2. Determinación del espectro de autovalores y número de condición de la matriz Z_{cercana} en función del parámetro de ponderación de la CFIE, en un rango de frecuencias.

Los resultados del experimento N°1, demuestran que el espectro de autovalores y el número de condición de la matrices Z_{total} y Z_{cercana} son semejantes al variar el coeficiente de ponderación α de la CFIE para un mismo valor de lado cubo W , por ésta razón los experimentos N°2 y N°3 siguientes se realizarán sobre la caracterización de la matriz Z_{cercana} de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE para dispersores cerrados.

A continuación se describen los resultados obtenidos al aplicar el programa Z_{total} para determinar el espectro de autovalores y el número de condición en función de la frecuencia para las matrices Z_{cercana} de los dispersores: Esfera, cilindro, la EMCC almendra de la Nasa, y la EMCC Doble Ojiva.

4.1.3.1. superficie abierta: esfera

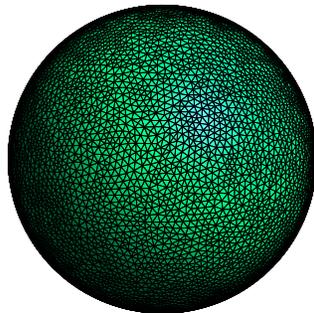


Figura 4.6: Esfera

4.1 Resultados

La esfera elegida tiene un radio de 1m. En la Tabla 4.5 sus características son:

Dispersor	h(m)	N_{Δ}	num_e
sphere600.stl	4.845E-002	12620	12288

Tabla 4.5: Características de dispersor :Esfera

Las frecuencias seleccionadas para el experimento se presentan en la Tabla 4.6:

	F1	F2	F3	F4
f(MHz)	600	450	300	150
h (λ)	0.096	0.073	0.048	0.024
diámetro(λ)	4	3	2	1
n_{λ}	10.02	13.75	20.63	41.25
$(n_{\lambda})_{\min}$	7.3	9.73	14.60	29.20

Tabla 4.6: Frecuencias y densidad de discretización para el dispersor sphere600.stl

A continuación en la Figura.4.7 se muestra la variación del número de condición de la matriz Zcercana en función del coeficiente de ponderación α de la CFIE en las frecuencias encontradas en la Tabla 4.6. En la Tabla 4.7 se muestra los valores del parámetro de ponderación α para los cuales se obtiene el menor número de condición (NC_{\min})

Frecuencia	F1	F2	F3	F4
$(n_{\lambda})_{\min}$	7.3	9.73	14.60	29.20
α para NC_{\min}	0.2	0.2	0.1	0.1
NC_{\min}	3.882	4.265	4.193	4.989
Tiempo de computo de cada autovalor	4h, 32m	4h,18m	4h,16m	4h,18m

Tabla 4.7: Valores del parámetro de ponderación α para los cuales se obtiene el menor número de condición (NC_{\min}) de la Matriz Zcercana de la Esfera.

4.1 Resultados

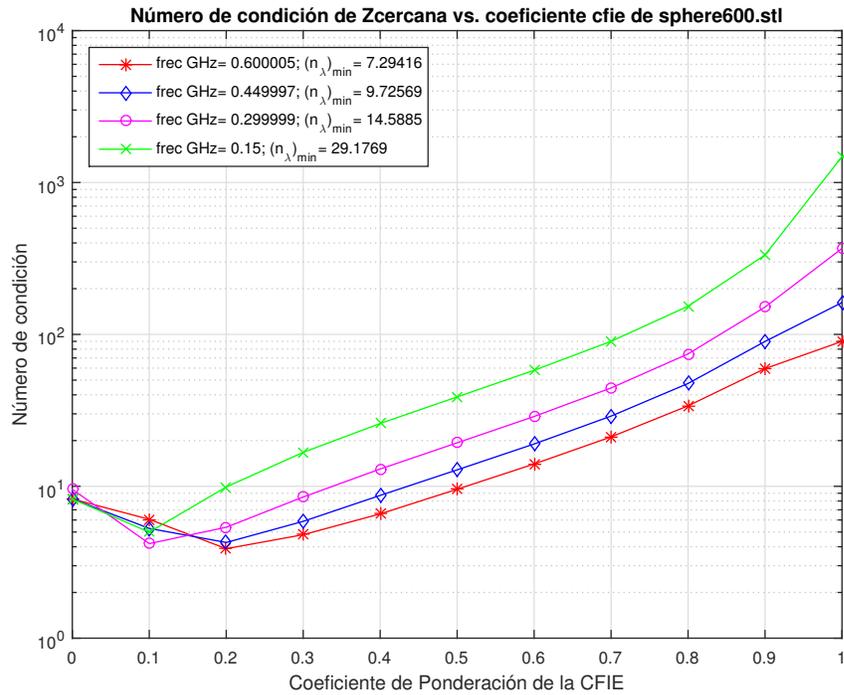
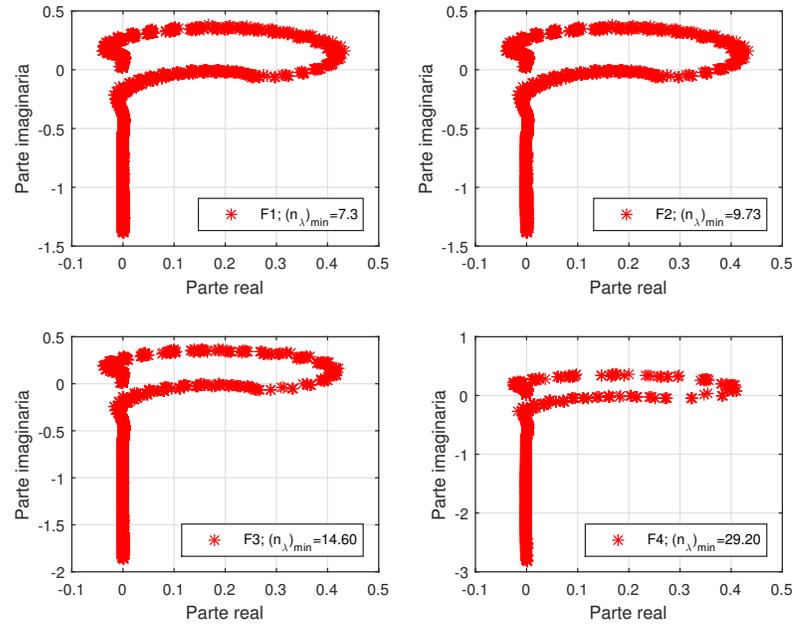


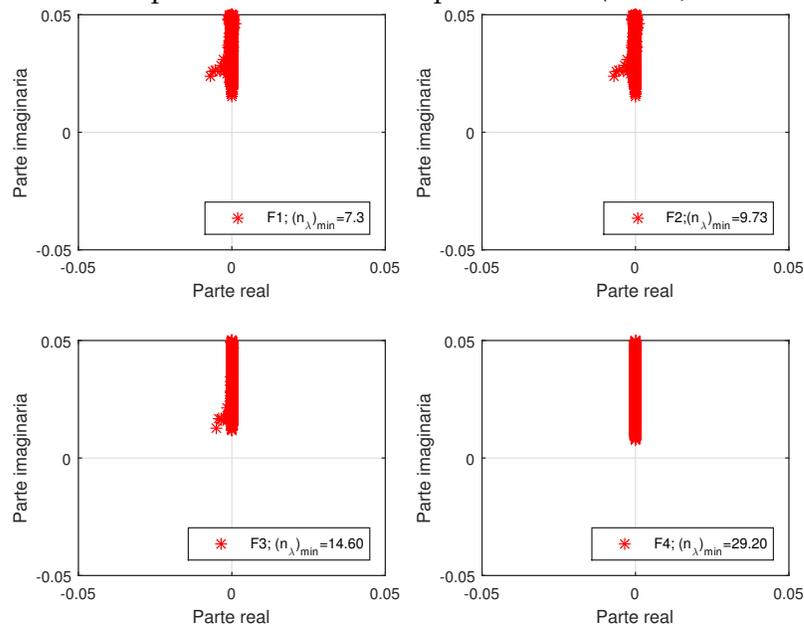
Figura 4.7: Número de condición Vs. Coeficiente de ponderación de la CFIE para matriz Zcercana de La ESFERA

A continuación en la Figura.4.8, Figura.4.9 y Figura.4.10 se muestra el espectro de autovalores para la EFIE, MFIE y la CFIE de la ESFERA para las distintas frecuencias de estudio.

4.1 Resultados



Espectro de autovalores para la EFIE ($\alpha = 1$)



Espectro de autovalores para la EFIE al rededor del origen

Figura 4.8: Espectro de autovalores de la matriz Zcercana EFIE de la Esfera en el experimento N^o1.

4.1 Resultados

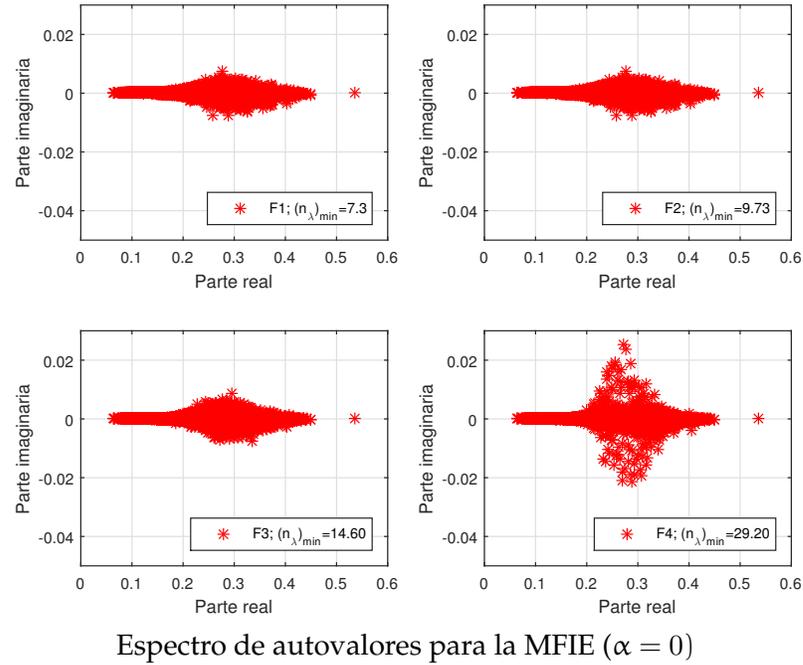


Figura 4.9: Espectro de autovalores de la matriz Z_{cercana} MFIE de la Esfera en el experimento N^o1.

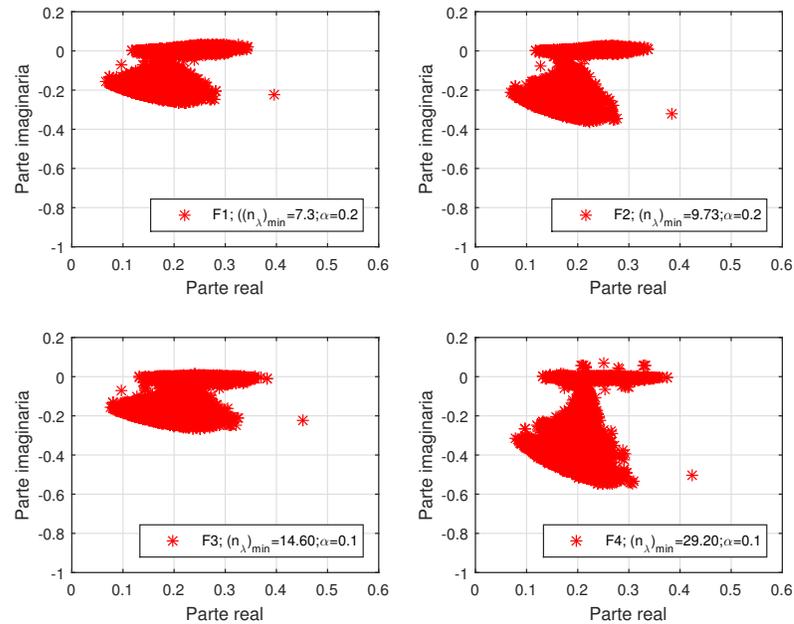


Figura 4.10: Espectro de autovalores de la matriz Z_{cercana} CFIE de la Esfera para el mínimo valor del número de condición. Ver Tabla 4.7

4.1 Resultados

A continuación en la Tabla 4.8 se muestran los autovalores máximos (λ_{max}) y mínimos (λ_{min}) y el número de condición (NC) de la matriz Zcercana de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE en función de la frecuencia para el dispersor ESFERA.

Ec. Integral	Frec.(MHz)	F1= 600	F2=450	F3=300	F4=150
		$(n\lambda)_{min}$	7.3	9.73	14.60
EFIE	λ_{max}	0.0014 - 1.3851i	0.0009 - 1.8650i	0.0004 - 2.8173i	0.0001 - 5.6584i
	λ_{min}	-0.0001 + 0.0154i	-0.0000 + 0.0115i	-0.0000 + 0.0077i	0.0000 + 0.0038i
	NC	89.9587	162.0473	368.03702	1.4812e+03
MFIE	λ_{max}	0.5364 - 0.0000i	0.5364 - 0.0000i	0.5363 - 0.0000i	0.5363 - 0.0000i
	λ_{min}	0.0650 + 0.0000i	0.0650 + 0.0000i	0.0650 + 0.0000i	0.0650 + 0.0000i
	NC	8.2542	8.2540	8.2538	8.2536
CFIE	λ_{max}	0.3946 - 0.2249i	0.3840 - 0.3179i	0.4507 - 0.2254i	0.4231 - 0.5007i
	λ_{min}	0.1170 + 0.0019i	0.1169 + 0.0014i	0.0969 - 0.0710i	0.1314 - 0.0010i
	NC	3.8826, $\alpha = 0,2$	4.2658, $\alpha = 0,2$	4.1933, $\alpha = 0,1$	4.9894, $\alpha = 0,1$

Tabla 4.8: Autovalores máximos y mínimos de la matriz Zcercana de la EFIE, MFIE y CFIE de la EMCC de la Esfera en función de la frecuencia.

A continuación se dará los resultados para los dispersores: cilindro, almendra de la nasa y Doble ojiva.

4.1.3.2. Cilindro

El cilindro elegido para éste experimento posee una altura de 1m y radio 1m, tal como se muestra en la Figura. 4.11

Se eligieron las mismas frecuencias de estudio de la esfera, mallando al dispersor a la frecuencia de 600Mhz.

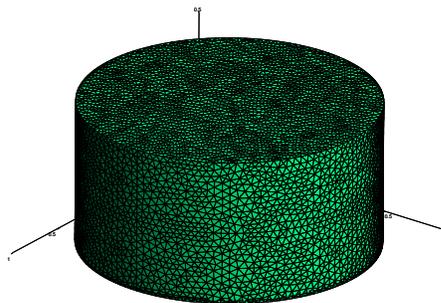


Figura 4.11: CILINDRO

4.1 Resultados

Dispersor	$h(m)$	$\ell_{max}(m)$	N_{Δ}	num_e
cylinder600.stl	4.7620E-02	6.8596E-002	13136	19704

Tabla 4.9: Características de dispersor :CILINDRO

	F1	F2	F3	F4
F(MHz)	600	450	300	150
η_{λ}	10.49	13.989	20.98	41.96
$(n_{\lambda})_{min}$	7.28	9.731	14.58	29.16
α para NC_{min}	0.2	0.1	0.1	0.1
NC_{min}	3.786	3.6489	3.570	5.838

Tabla 4.10: Frecuencias y densidad de discretización para el dispersor CILINDRO

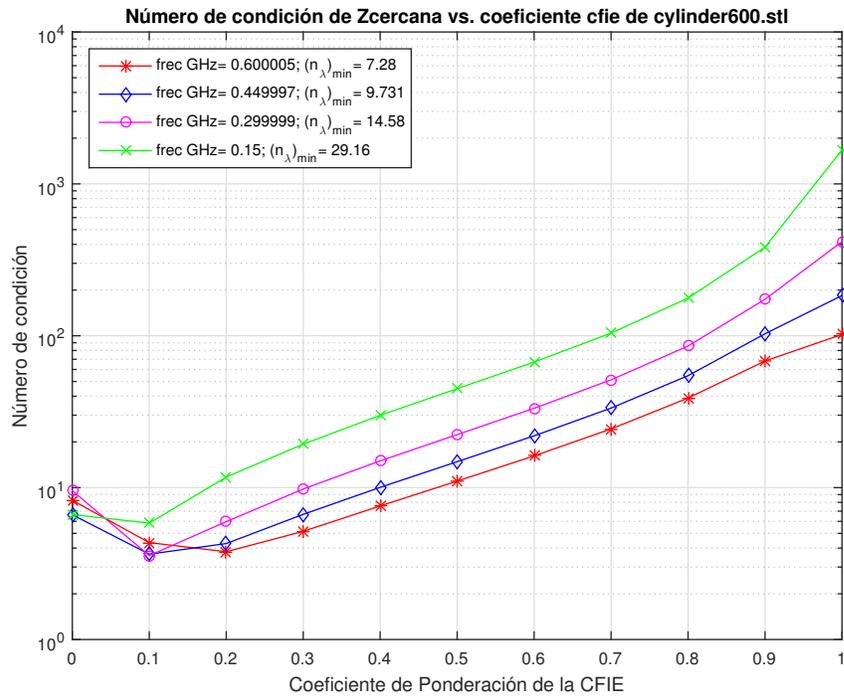
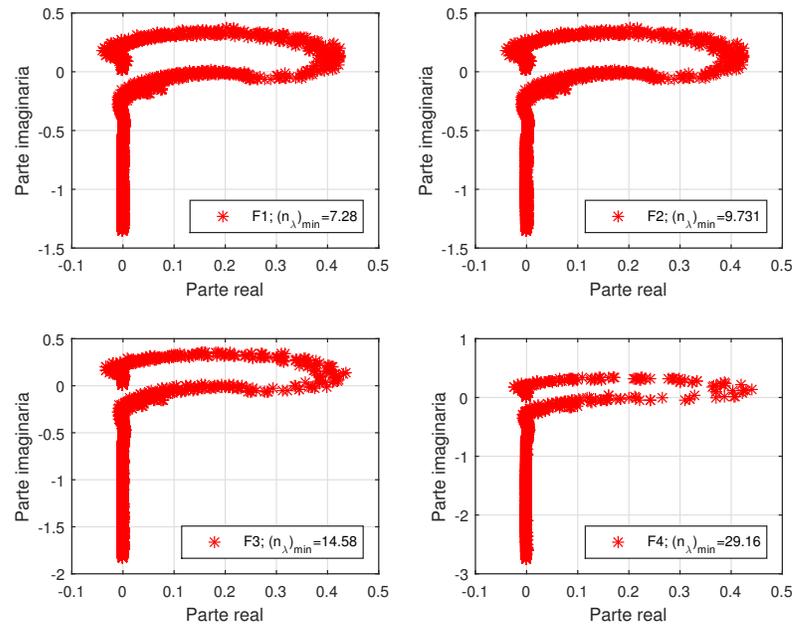
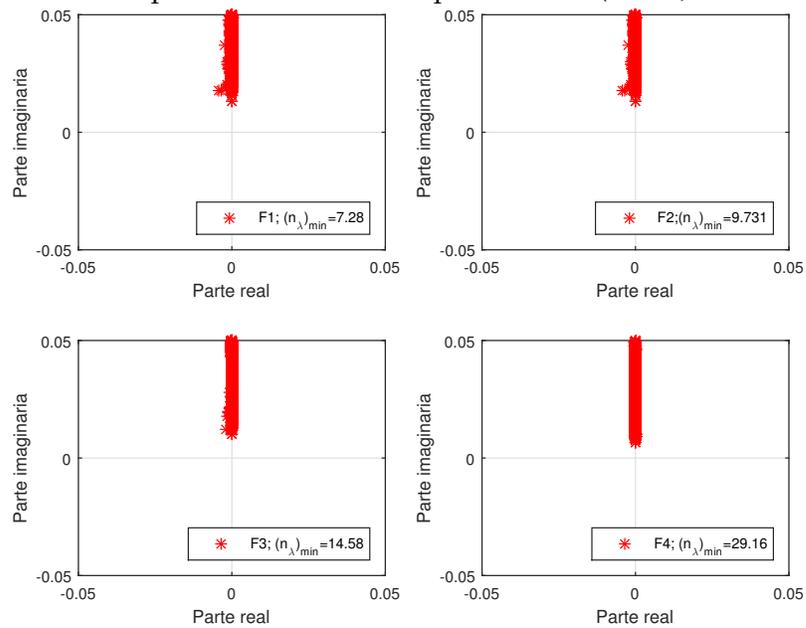


Figura 4.12: Número de condición vs. Coeficiente de ponderación de la matriz Zcercana de la CFIE para el CILINDRO.

4.1 Resultados



Espectro de autovalores para la EFIE ($\alpha = 1$)



Espectro de autovalores para la EFIE al rededor del origen

Figura 4.13: Espectro de autovalores de la matriz Zcercana EFIE del CILINDRO en el experimento N°2.

4.1 Resultados

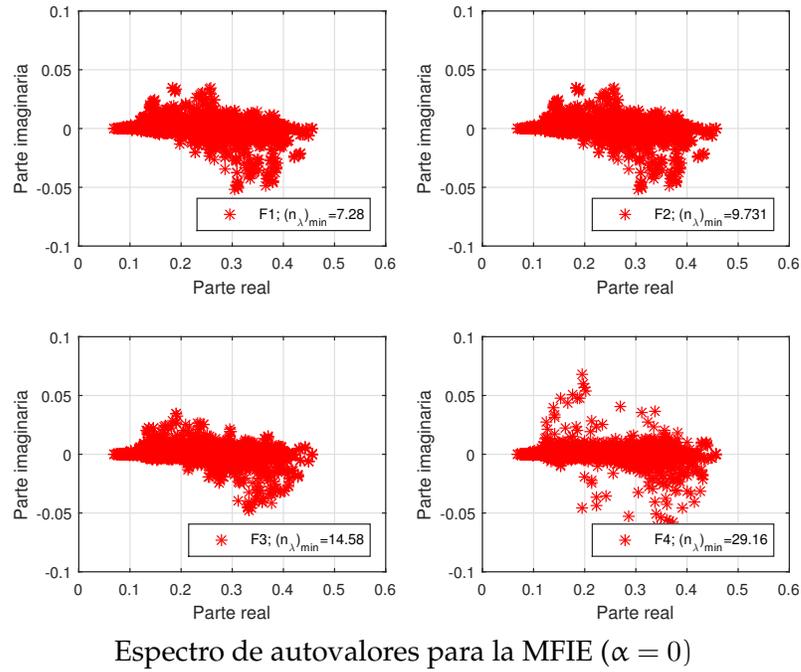


Figura 4.14: Espectro de autovalores la matriz Zcercana MFIE del CILINDRO en el experimento N^o2.

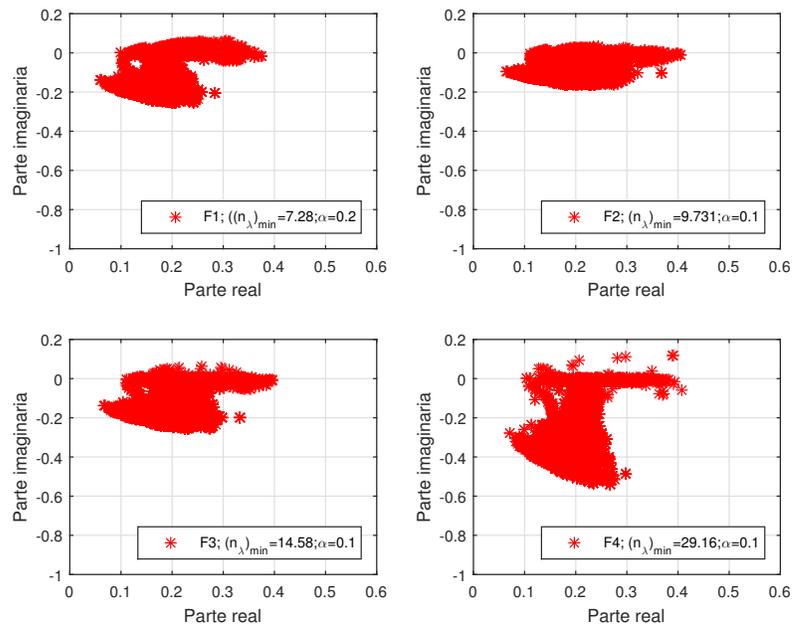


Figura 4.15: Espectro de autovalores de la matriz Zcercana CFIE del CILINDRO para el mínimo valor del número de condición encontrados en la Tabla 4.10.

4.1 Resultados

A continuación en la Tabla 4.11 se muestran los autovalores máximos (λ_{max}) y mínimos (λ_{min}) y el número de condición de la matriz Zcercana de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE en función de la frecuencia para el dispersor CILINDRO.

Ec. Integral	Frec.(MHz)	F1= 600	F2=450	F3=300	F4=150
		$(n_{\lambda})_{min}$	7.28	9.73	14.58
EFIE	λ_{max}	0.0002 - 1.3561i	0.0001 - 1.8228i	0.0000 - 2.7499i	0.0000 - 5.5185i
	λ_{min}	-0.0000 + 0.0133i	-0.0000 + 0.0099i	0.0000 + 0.0066i	0.0000 + 0.0033i
	NC	102.0301	184.0783	416.5975	1.6743e+03
MFIE	λ_{max}	0.4560 - 0.0000i	0.4560 - 0.0001i	0.4560 - 0.0000i	0.4507 - 0.0796i
	λ_{min}	0.0688 - 0.0000i	0.0688 - 0.0000i	0.0688 + 0.0000i	0.0688 + 0.0000i
	NC	6.6307	6.6312	6.6309	6.6555
CFIE	λ_{max}	0.3946 - 0.2249i	0.3840 - 0.3179i	0.4507 - 0.2254i	0.4231 - 0.5007i
	λ_{min}	0.1170 + 0.0019i	0.1169 + 0.0014i	0.0969 - 0.0710i	0.1314 - 0.0010i
	NC	3.8826, $\alpha = 0,2$	4.2658, $\alpha = 0,2$	4.1933, $\alpha = 0,1$	4.9894, $\alpha = 0,1$

Tabla 4.11: Autovalores máximos y mínimos de la matriz Zcercana de la EFIE, MFIE y CFIE de la EMCC del CILINDRO en función de la frecuencia.

4.1.3.3. EMCC Almendra de la Nasa

La EMCC Almendra de la Nasa tiene como dimensiones de 0.0326m de altura y 0.252m de largo y 0.0976m de ancho tal como se muestra en la Figura. 4.16

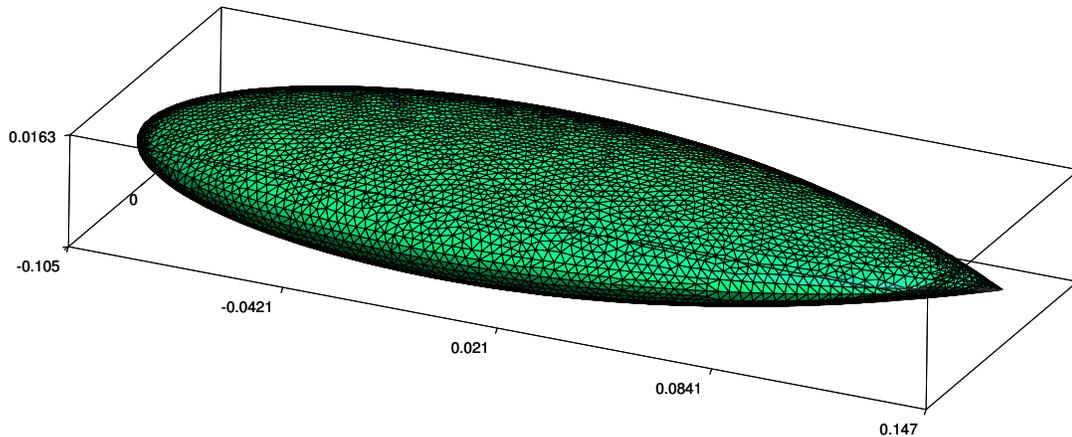


Figura 4.16: ALMENDRA DE LA NASA

4.1 Resultados

Las características del dispersor son indicadas en la Tabla 4.12

Dispersor	h(m)	N_{Δ}	num_e
EMCC_almond_9.92Ghz.stl	2.869E-03	11464	17196

Tabla 4.12: Características de dispersor :Almendra de la Nasa

	F1	F2	F3	F4
F(GHz)	9.92	7.0	1.57	1.18
n_{λ}	10.53	14.92	66.53	88.52
$(n_{\lambda})_{\min}$	6.48	9.18	48.96	54.50
α para NC_{\min}	0.2	0.2	0.1	0.1
NC_{\min}	32.627	36.109	66.600	85.898

Tabla 4.13: Valores del coeficiente de ponderación donde se alcanza el menor número de condición para la matriz Zcercana de la ALMENDRA DE LA NASA

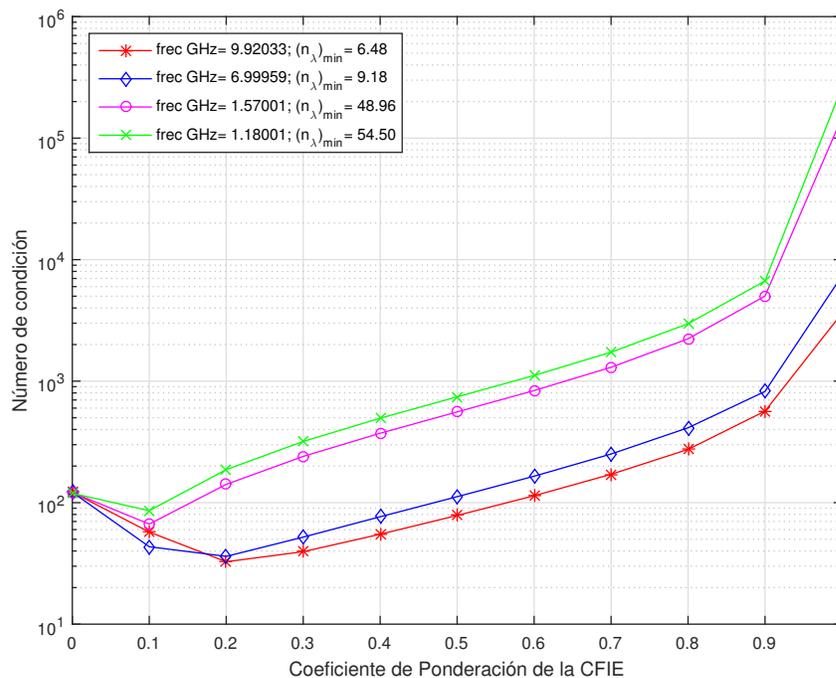
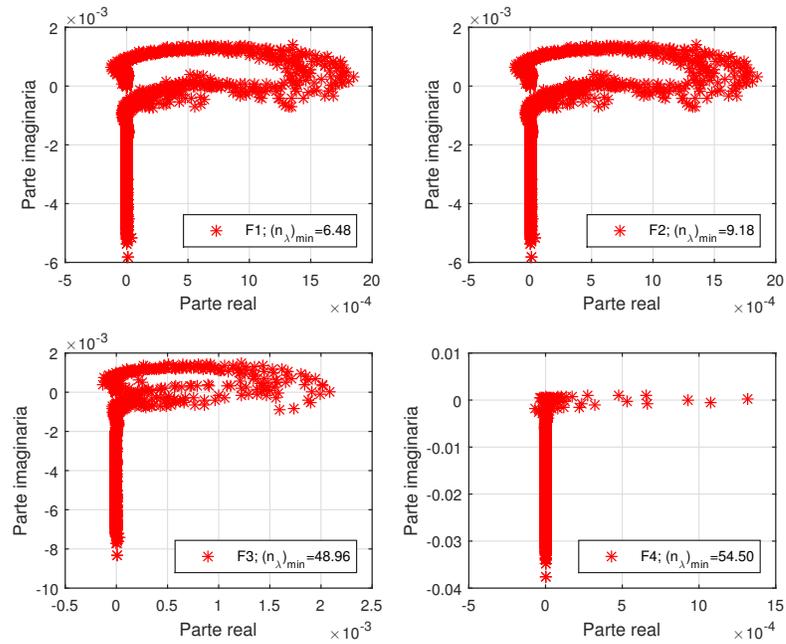


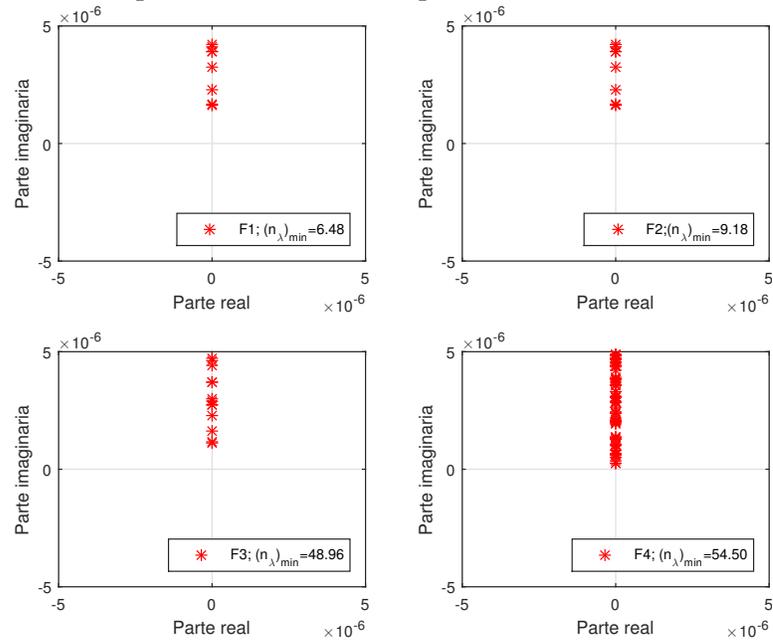
Figura 4.17: Número de condición vs. Coeficiente de ponderación de la matriz Zcercana de la CFIE para la ALMENDRA DE LA NASA

A continuación los espectros de autovalores de la almendra de la Nasa.

4.1 Resultados



Espectro de autovalores para la EFIE ($\alpha = 1$)



Espectro de autovalores para la EFIE al rededor del origen

Figura 4.18: Espectro de autovalores la matriz Zcercana EFIE de la Almendra de la Nasa en el experimento N°2.

4.1 Resultados

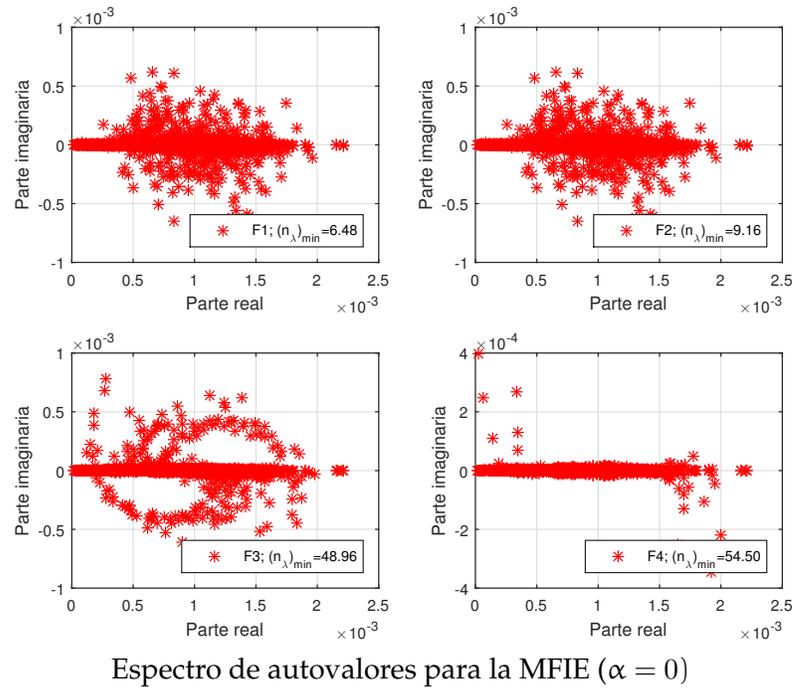


Figura 4.19: Espectro de autovalores la matriz Zcercana MFIE de la Almendra de la Nasa en el experimento N^o2.

4.1 Resultados

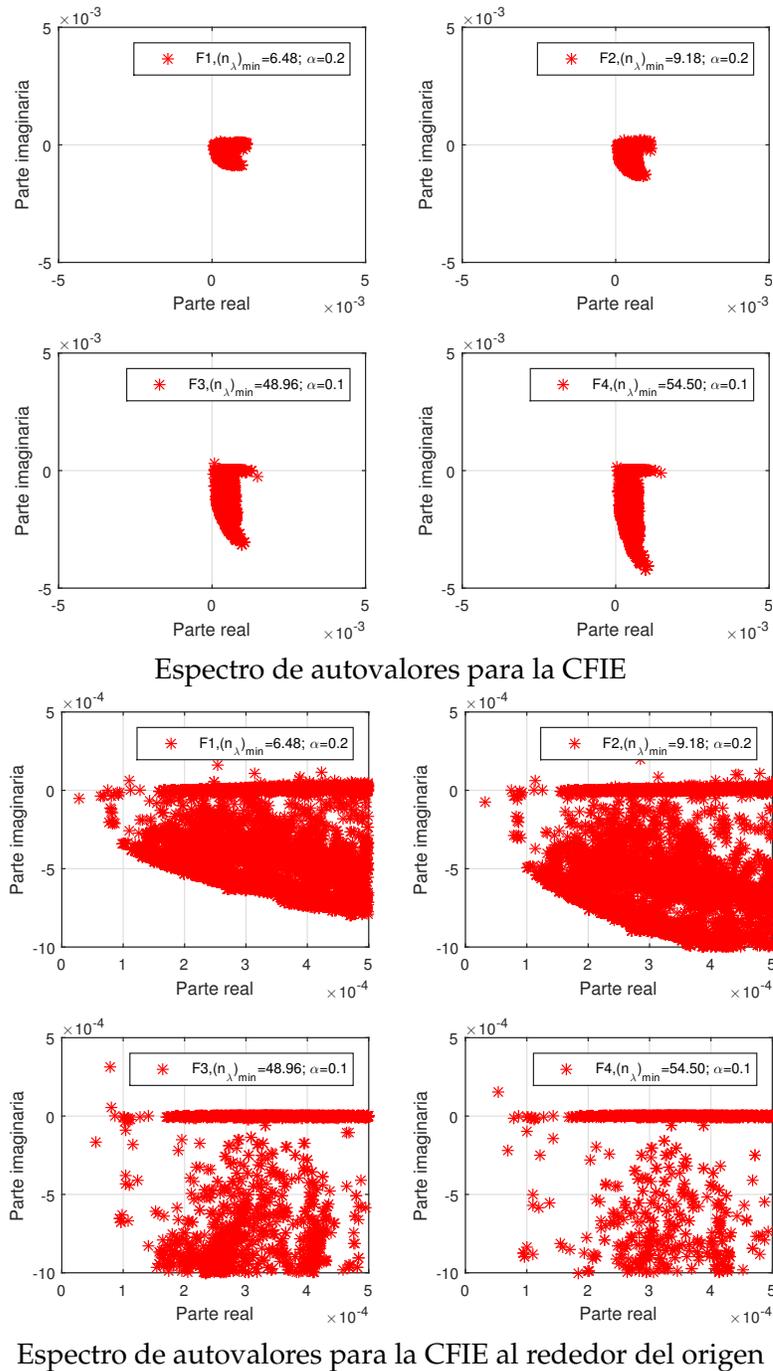


Figura 4.20: Espectro de autovalores la matriz Zcercana CFIE de la Almendra de la Nasa en el experimento N°2 para mínimo número de condición.

A continuación en la Tabla 4.14 se muestran los autovalores máximos (λ_{\max}) y mínimos (λ_{\min}) y el número de condición de la matriz Zcercana de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE

4.1 Resultados

en función de la frecuencia para el dispersor EMCC Almendra de la Nasa.

Ec. Integral	Frec.(GHz)	F1= 9.92	F2=7.0	F3=1.57	F4=1.18
		$(n\lambda)_{\min}$	6.48	9.18	48.96
EFIE	λ_{\max}	- 0.0058i	- 0.0083i	- 0.0376i	- 0.0501i
	λ_{\min}	1.6100e-06i	1.1300e-06i	2.5000e-07i	1.9000e-07i
	NC	3.6135e+03	7.3815e+03	1.5045e+05	2.6346e+05
MFIE	λ_{\max}	0.0022 - 0.0000i	0.0022 - 0.0000i	0.0022 - 0.0000i	0.0022 - 0.0000i
	λ_{\min}	1.8130e-05 + 7.4e-07i	1.8150e-05 + 4.7e-07i	1.8500e-05 + 7.0e-08i	1.8510e-05 + 4.0e-08i
	NC	121.9380	121.8517	119.3716	119.2985
CFIE	λ_{\max}	0.0016 - 0.0009i	0.0015 - 0.0015i	0.0016 - 0.0037i	0.0016 - 0.0049i
	λ_{\min}	5.48e-05 - 1.594e-05i	5.745e-05 - 1.141e-05i	5.999e-05 - 3.18e-06i	6.0290e-05 - 2.45e-06i
	NC	32.6279, $\alpha = 0,2$	36.1098, $\alpha = 0,2$	66.6007, $\alpha = 0,1$	85.8984, $\alpha = 0,1$

Tabla 4.14: Autovalores máximos y mínimos de la matriz Z_{cercana} de la EFIE, MFIE y CFIE de la EMCC Almendra de la Nasa en función de la frecuencia.

4.1.3.4. EMCC Doble-Ojiva

La Ojiva tiene las siguientes dimensiones 0.058m de diámetro y 0.195m de largo, tal como se muestra en la Figura.4.21

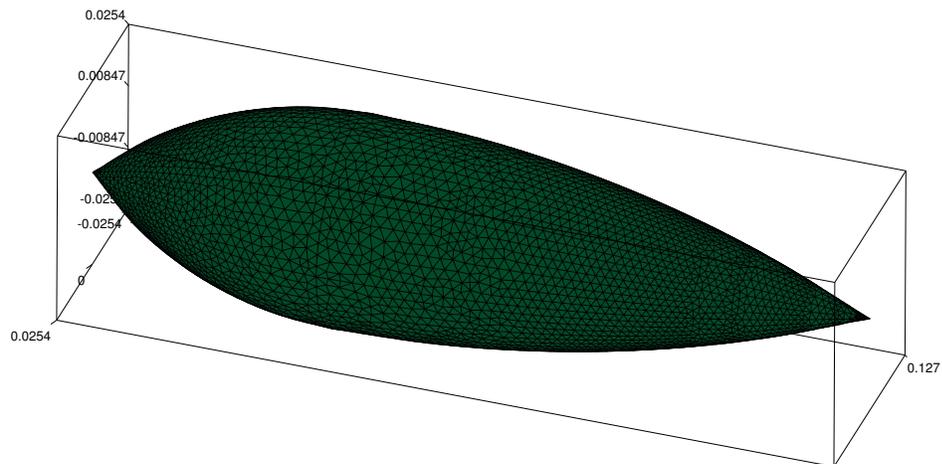


Figura 4.21: EMCC_Doble_OJIVA

4.1 Resultados

Dispersor	h(m)	N_{Δ}	num_e
EMCC_double-ogive	2.2502E-003	9488	14232

Tabla 4.15: Características de dispersor :Doble_Ojiva

	F1	F2	F3	F4
F(GHz)	9.92	7.0	1.57	1.18
n_{λ}	13.43	19.03	84.85	112.90
$(n_{\lambda})_{\min}$	7.62	10.80	48.16	64.08
α para NC_{\min}	0.2	0.2	0.1	0.1
NC_{\min}	21.68	21.14	38.36	53.78

Tabla 4.16: Valores del coeficiente de ponderación donde se alcanza el menor número de condición para la matriz Zcercana de la EMCC DOBLE OJIVA

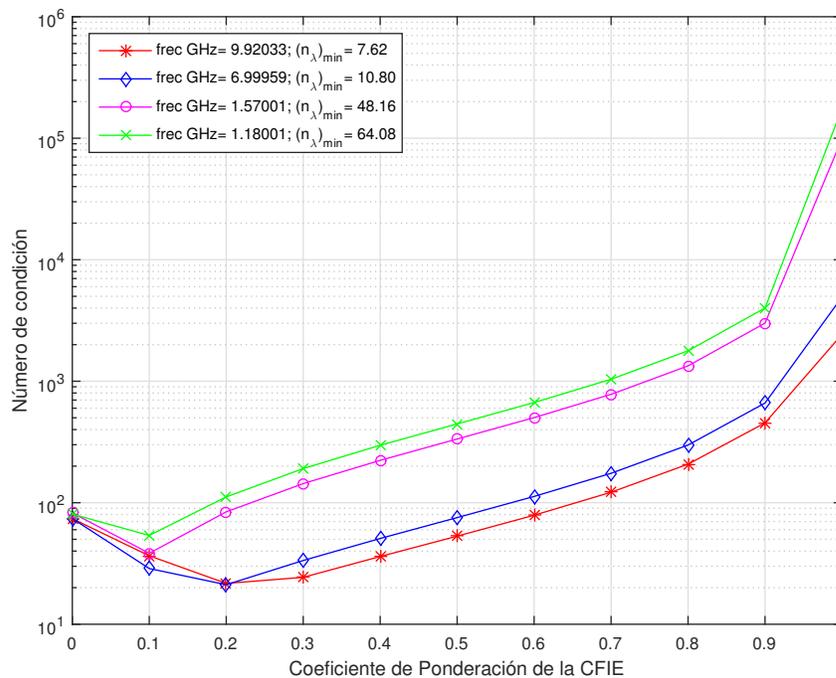
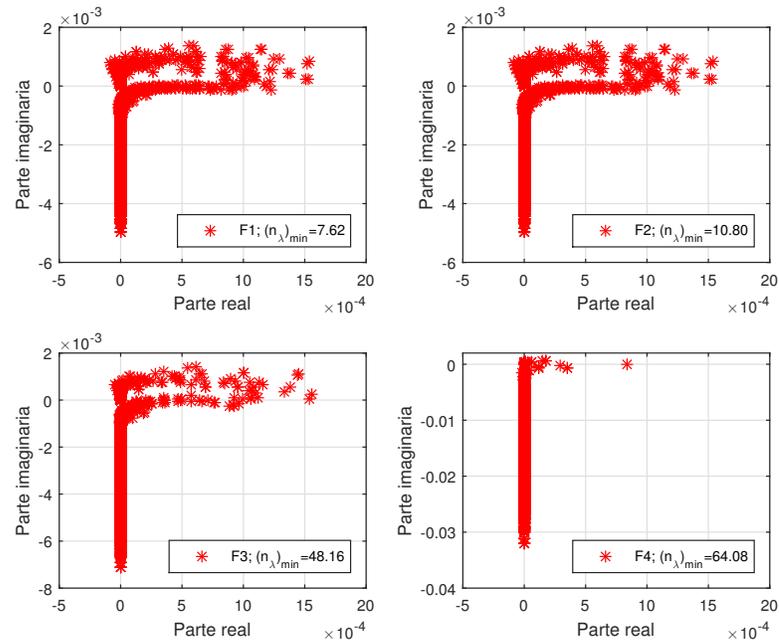
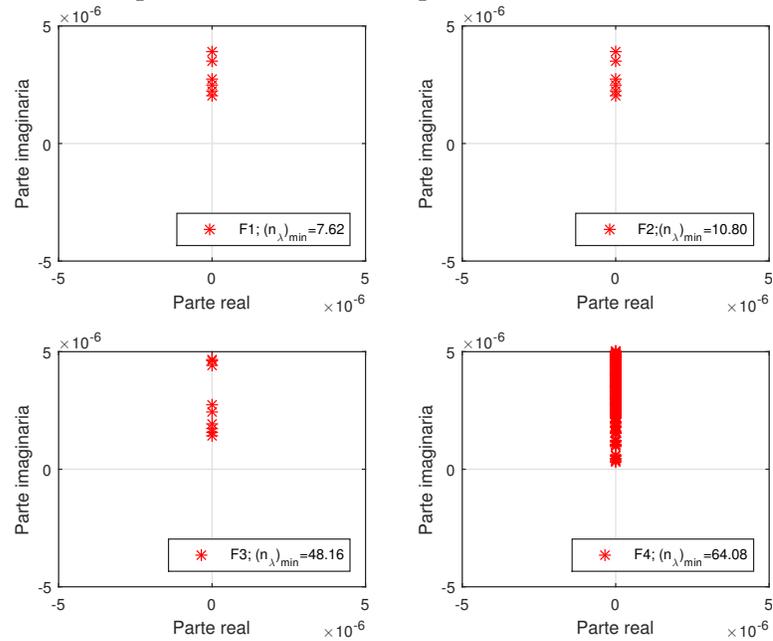


Figura 4.22: Número de condición vs. Coeficiente de ponderación de la matriz Zcercana de la CFIE para la EMCC DOBLE OJIVA.

4.1 Resultados



Espectro de autovalores para la EFIE ($\alpha = 1$)



Espectro de autovalores para la EFIE al rededor del origen

Figura 4.23: Espectro de autovalores de la matriz Zcercana EFIE de la Doble Ojiva en el experimento N°2.

4.1 Resultados

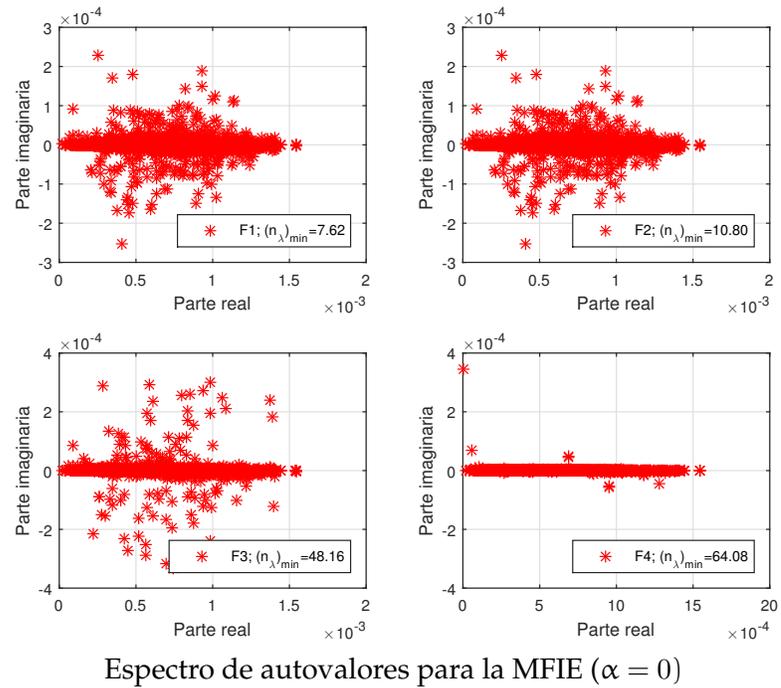
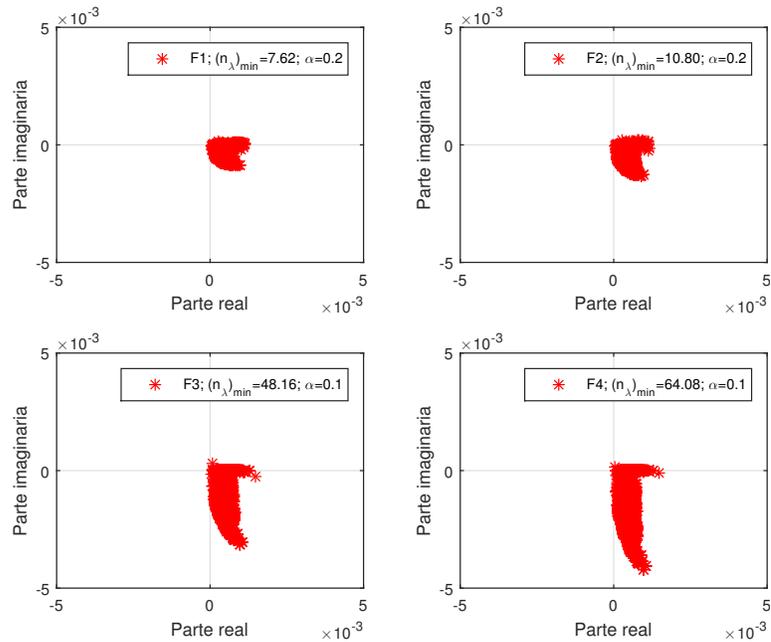
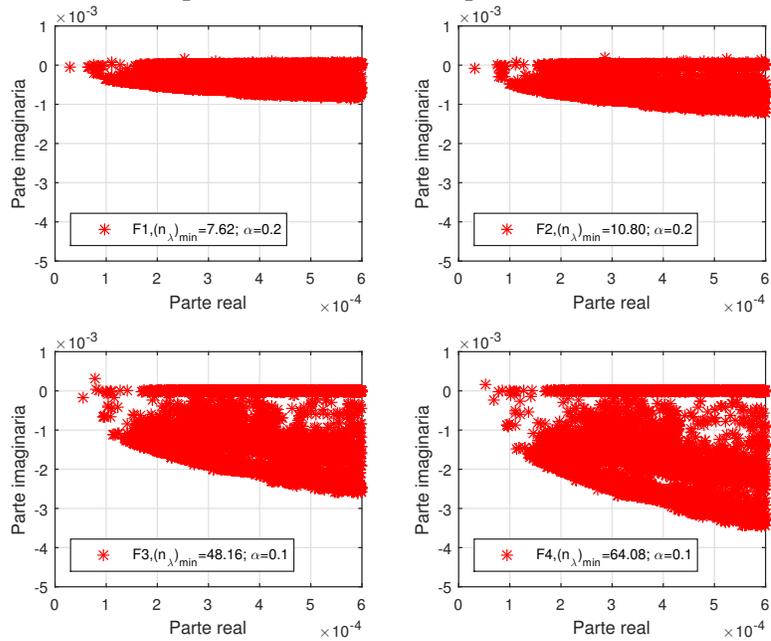


Figura 4.24: Espectro de autovalores de la matriz Zcercana MFIE de la EMCC Doble Ojiva en el experimento N°2

4.1 Resultados



Espectro de autovalores para la CFIE



Espectro de autovalores para la CFIE al rededor del origen

Figura 4.25: Espectro de autovalores la matriz Zcercana de la CFIE de la de la EMCC doble Ojiva para el mínimo valor del número de condición obtenido. Ver laTabla 4.16.

A continuación en la Tabla 4.17 se muestran los autovalores máximos (λ_{\max}) y mínimos (λ_{\min}) y el número de condición de la matriz Zcercana de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE

4.1 Resultados

en función de la frecuencia para el dispersor EMCC Doble Ojiva.

Ec. Integral	Frec.(GHz)	F1= 9.92	F2=7.0	F3=1.57	F4=1.18
		$(n_\lambda)_{\min}$	7.62	10.80	48.16
EFIE	λ_{\max}	-0.005i	-0.0071i	-0.0319i	-0.0425i
	λ_{\min}	2.04e-06i	1.44e-06i	3.2e-07i	2.4e-07i
	NC	2430	4935	99762	1.75e5
MFIE	λ_{\max}	0.0015	0.0015	0.0017- i3e-4	0.0017- i2e-4
	λ_{\min}	2.086e-5 + 1.73e-6i	2.078e-5 + 1.21e-6i	2.1010e-5 + 2.5e-7i	2.097e-5 + 1.8e-7i
	NC	73.96	74.16	82.43	80.61
CFIE	λ_{\max}	9.7005e-4 - 8.5410e-4i	0.001 - 0.0013i	0.001 - 0.0031i	0.001 - 0.0042i
	λ_{\min}	2.097e-5 - 5.246e-5i	7.581e-5 + 3.3e-7i	8.592e-5 - 1e-08i	7.848e-5 - 1.765e-5i
	NC	21.68, $\alpha = 0,2$	21.14, $\alpha = 0,2$	38.36, $\alpha = 0,1$	53.78, $\alpha = 0,1$

Tabla 4.17: Autovalores máximos y mínimos de la matriz Zcercana de la EFIE, MFIE y CFIE de la EMCC de Doble Oliva en función de la frecuencia.

4.1.4. Análisis de resultados del experimento N°2

De acuerdo a los resultados obtenidos en el experimento N°2, se evidencia:

- En aquellas frecuencias donde la densidad de discretización mínima $(n_\lambda)_{\min}$ del dispersor tiene valores cercanos o menores de 10, $(n_\lambda)_{\min} \lesssim 10$, el valor del coeficiente de ponderación α de la CFIE que hace que el número de condición sea mínimo se desplaza a valores ≥ 0.2 . Esto puede visualizarse en la Figura. 4.7, Figura. 4.17 y Figura. 4.22.
- Para los dispersores estudiados a las frecuencias con densidad de discretización $(n_\lambda)_{\min} > 10$, el valor del coeficiente de ponderación α donde se alcanza el menor número de condición es de 0.1. Únicamente la matriz Zcercana del cilindro toma un valor de mínimo número de condición para $\alpha = 0.1$ usando un $(n_\lambda)_{\min} = 9,78$.
- Los autovalores de la EFIE de los dispersores estudiados, tienden a concentrarse en el origen del sistema a medida que la frecuencia disminuye, lo que es equivalente a un aumento de la densidad de discretización, esto puede visualizarse en la Figura. 4.8, Figura. 4.13, Figura. 4.18 y Figura. 4.23 y los autovalores de la matriz tienen una componente positiva distribuida sobre el eje imaginario que tiende a acercarse a cero a medida que la n_λ aumenta.
- Los autovalores de la MFIE para las geometrías Esfera y Cilindro en su mayoría se encuentran sobre el eje real y alejados del origen del sistema de coordenadas, al contrario de las geometrías Almendra y Doble Ojiva donde se encuentra un esparcimiento de los autovalores con valores complejos y con la tendencia a

4.1 Resultados

concentrarse sobre el eje real a medida que $(n_\lambda)_{\min} > 10$. Es de notar que el número de condición de la MFIE para la esfera y el cilindro es menor que el de la Almendra de la Nasa y la doble ojiva.

- Los autovalores de la CFIE, mostrados en la Figura. 4.10, Figura. 4.15, Figura. 4.20 y Figura. 4.25, que son calculados con un coeficiente de ponderación α entre 0.2 y 0.1, evidencian que tienen valores que no toman el origen del sistema y cuyos valores mostrados en las Tabla 4.8, Tabla 4.11, Tabla 4.14 y Tabla 4.17 evidencian que se encuentran mas alejados del origen del sistema de coordenadas en comparación con los autovalores mínimos de la EFIE y MFIE. Esto produce que la matriz Z_{cercana} esté mejor condicionada.
- La matriz de la MFIE tiende a ser mejor condicionada que la matriz de la EFIE ya que posee un número de condición mucho menor que la EFIE. Se evidencia en el experimento N°2 que en aquellas frecuencias donde $n_\lambda > 10$ el número de condición de la EFIE incrementa en proporción a éste parámetro.

De acuerdo a los resultados arrojados en el experimento N°2, se evidencia:

- Para el estudio de la variación del número de condición en función del coeficiente de ponderación de la matriz Z_{cercana} de la CFIE a distintas frecuencias, para los dispersores esfera, cilindro, almendra de la nasa y doble-ovejiva, se evidencia que a medida que la frecuencia aumenta, manteniendo el mismo mallado del dispersor, resultan densidades de discretización $(n_\lambda)_{\min} \lesssim 10$ donde el valor del coeficiente de ponderación α que permite obtener un menor número de condición de la matriz del sistema CFIE tiende a tener un valor mayor o igual 0.2 y para aquellas frecuencias donde $(n_\lambda)_{\min} > 10$ el coeficiente de ponderación α tiende a ser menor a 0.2 para obtener un valor mínimo del número de condición. Estos resultados se resumen en la Tabla 4.18 y se visualizan en la Figura. 4.26 en función de la densidad de discretización $(n_\lambda)_{\min}$.

4.1 Resultados

Dispersor	Frec.(GHz)	$(n_\lambda)_{\min}$	α para NC_{\min}	NC_{\min}
ESFERA	0.6	7.3	0.2	3.882
	0.45	9.73	0.2	4.265
	0.3	14.60	0.1	4.193
	0.15	29.20	0.1	4.989
CILINDRO	0.6	7.28	0.2	3.786
	0.45	9.731	0.1	3.648
	0.3	14.58	0.1	3.570
	0.15	29.16	0.1	5.838
EMCC Almendra de la Nasa	9.92	6.48	0.2	32.627
	7.0	9.18	0.2	36.109
	1.57	48.96	0.1	66.600
	1.18	54.50	0.1	85.898
EMCC Doble Ojiva	9.92	7.62	0.2	21.68
	7.0	10.80	0.2	21.14
	1.57	48.16	0.1	38.36
	1.18	64.08	0.1	53.78

Tabla 4.18: Resumen de resultados donde se expresa el valor del coeficiente de ponderación α de la CFIE para el mínimo número de condición de la matriz Z_{cercana} de los dispersores evaluados en el experimento N°2

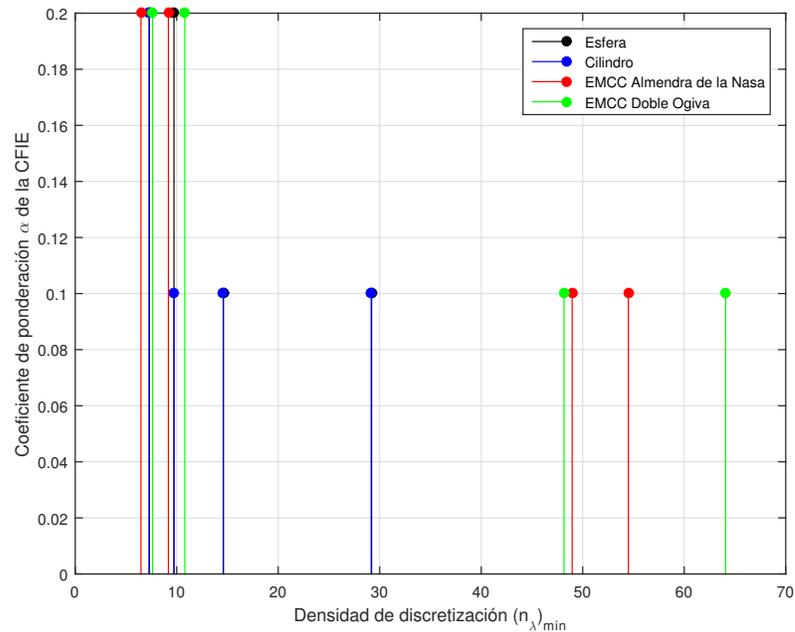


Figura 4.26: Valores del coeficiente de ponderación α de la CFIE donde se obtiene el menor número de condición de la matriz Z_{cercana} en función de la densidad de discretización de los dispersores : Esfera, Cilindro, EMCC Almendra de la Nasa y de la EMCC Doble Ojiva.

4.1.5. Validación de resultados obtenidos en el experimento N°2

Para validar los resultados del cálculo de los autovalores de la matriz $Z_{cercana}$ obtenida en el experimento N°2 mediante el código Z_{total} , se realizó el cálculo de la RCS de los objetivos mencionados arriba, como lo son: Esfera, Cilindro, EMCC_almond y la EMCC doble ojiva para valores del coeficiente de ponderación α de la CFIE desde 0.0 hasta 0.4 mediante la realización de un código que calcula la RCS monoestática y biestática de objetos tridimensionales mediante la resolución del sistema de ecuaciones $(Z_{cercana} + Z_{lejána}) \cdot I = V$, utilizando el método del gradiente conjugado al cuadrado (CGS) aplicado a la matriz Z_{total} y dichos resultados se compararon con los publicados en [39] y con los obtenidos al usar el Software CST Microwave Studio a las mismas frecuencias de operación y con densidades de mallado semejantes.

4.1.5.1. Esfera

Para la esfera, se calculo la RCS biestática a la frecuencia de 600MHz. A continuación en la Tabla 4.19 se muestran las condiciones de mallado y parámetros utilizados en los programas con los cuales se realizaron en las simulaciones.

Parámetros	FMM	CST
n_{Δ}	12620	12620
ℓ_{max}	6.8494E-002	6.8494E-002
h	4.8456E-002	4.8456E-002

Tabla 4.19: Parámetros comparativos en el cálculo de la RCS Biestática de la esfera a 600Mhz

4.1 Resultados

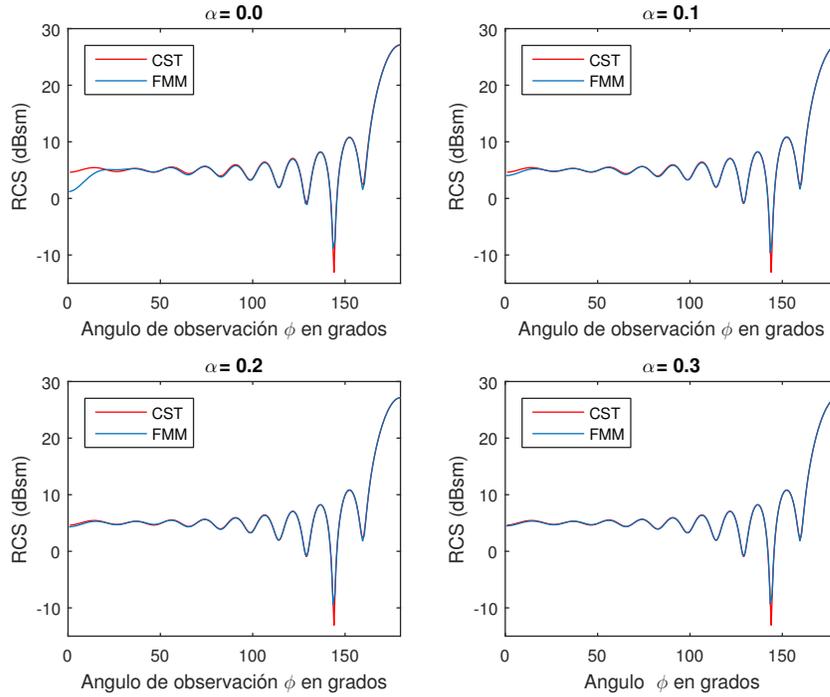


Figura 4.27: RCS Biestática Polarización Horizontal de la Esfera a 600MHz, $(n_\lambda)_{\min} = 7.3$

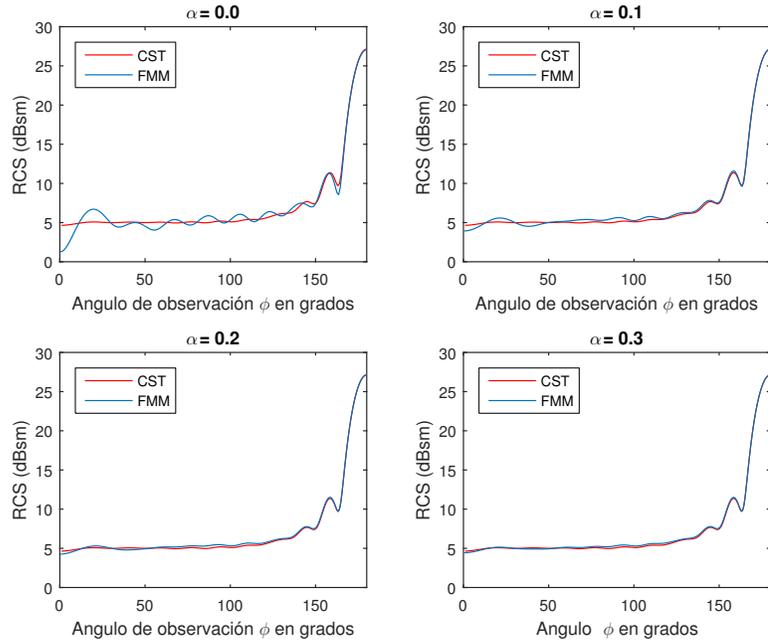


Figura 4.28: RCS Biestática Polarización Vertical de la Esfera a 600 MHz, $(n_\lambda)_{\min} = 7.3$

4.1 Resultados

A continuación también se presenta la RCS biestática a la frecuencia de 300MHz

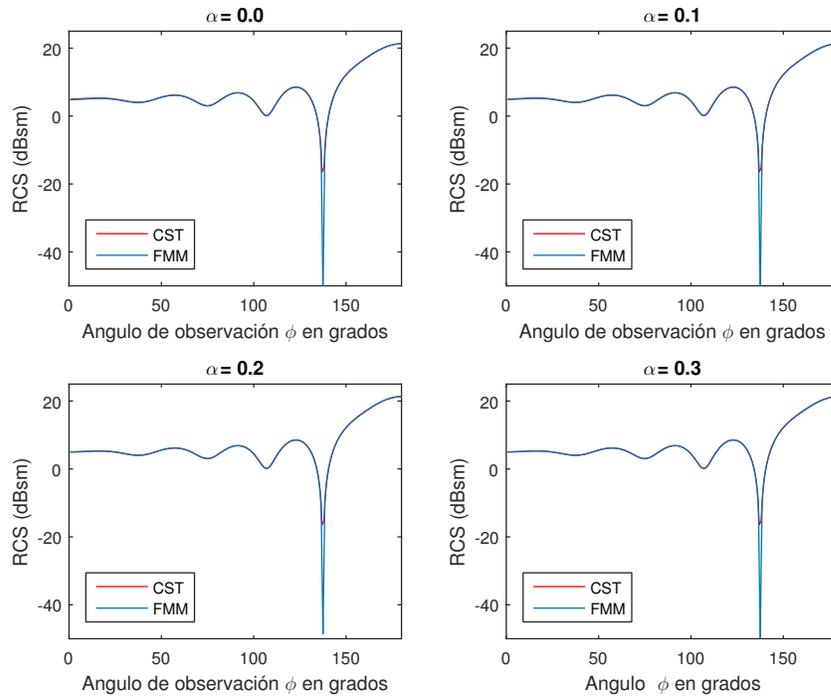


Figura 4.29: RCS Biestática Polarización Horizontal de la Esfera a 300 MHz,
 $(n_\lambda)_{\min} = 9.73$

4.1 Resultados

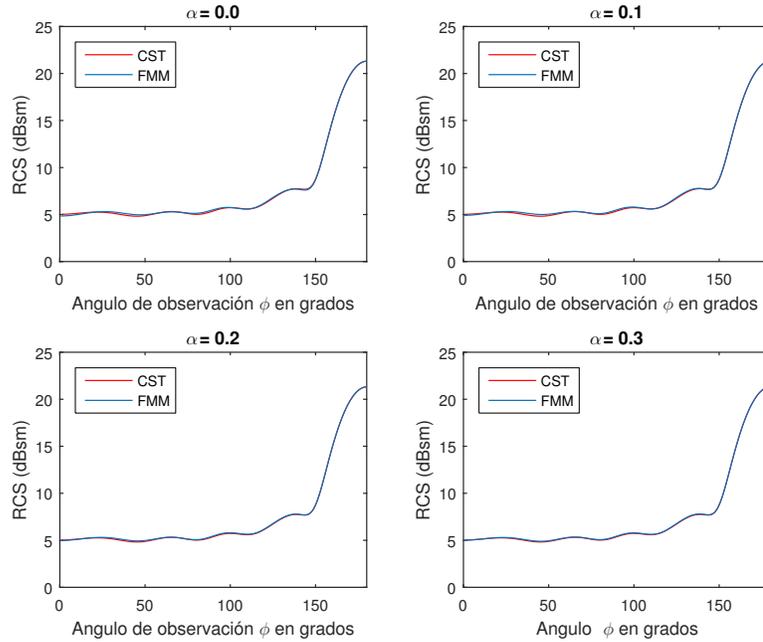


Figura 4.30: RCS Biestática Polarización Vertical de la Esfera a 300 MHz, $(n_\lambda)_{\min} = 9.73$

4.1.5.2. Cilindro

A continuación en la Tabla 4.20 se muestran las condiciones de mallado con las cuales fueron obtenidos los resultados del cálculo de la RCS biestática a la frecuencia de 600MHz.

Parámetros	FMM	CST
n_Δ	13136	13140
l_{\min}	0.028912	0.030477
l_{\max}	0.068596	0.069677
h	0.0476206	0.050077

Tabla 4.20: Parámetros comparativos para el cálculo de la RCS Biestática del CILINDRO a 600MHz

4.1 Resultados

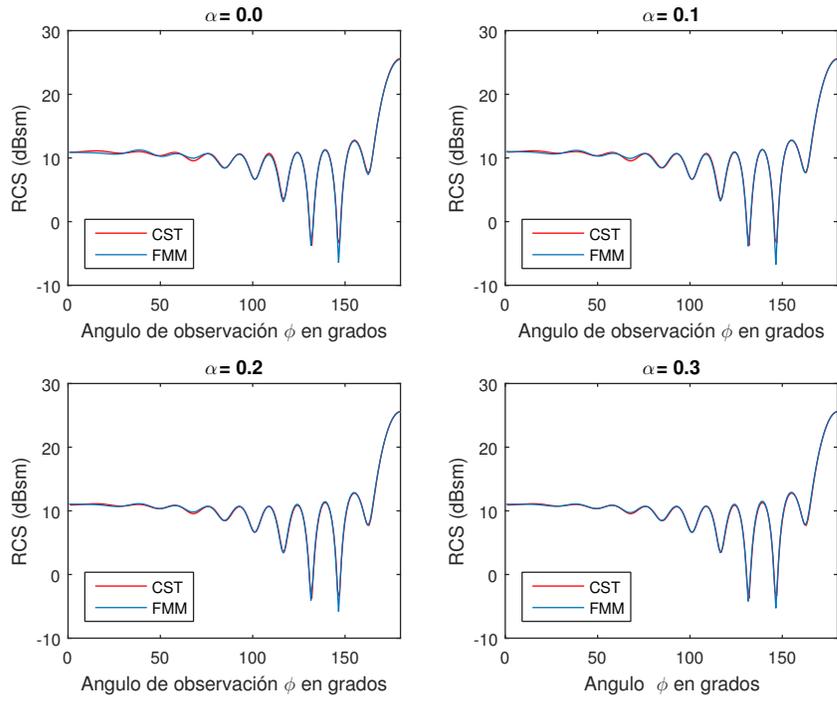


Figura 4.31: RCS Biestática Polarización Horizontal del Cilindro a 600MHz, $(n_\lambda)_{\min} = 7.28$

4.1 Resultados

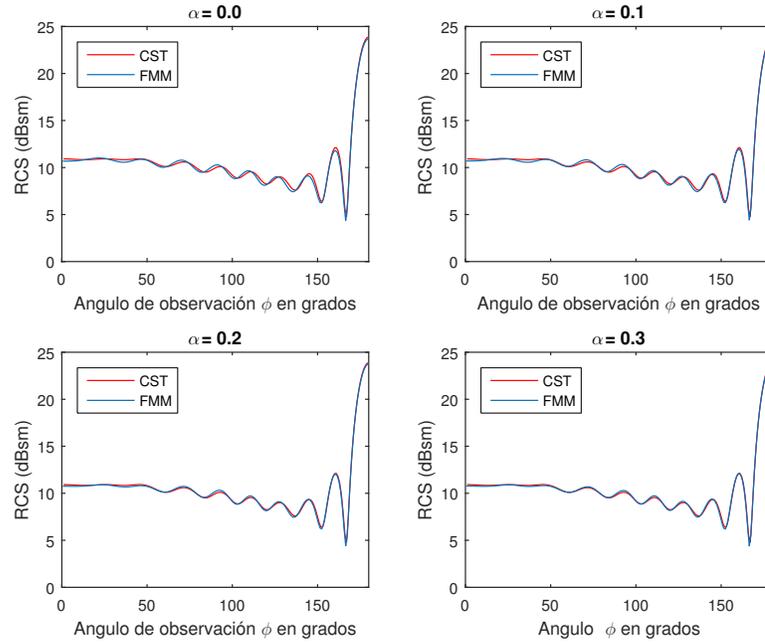


Figura 4.32: RCS Biestática Polarización Vertical del Cilindro a 600MHz, $(n_\lambda)_{\min} = 7.28$

4.1.5.3. EMCC Almendra de la Nasa

A continuación en la Tabla 4.21 se muestran las condiciones de mallado con las cuales que fueron obtenidos los resultados del cálculo de la RCS monoestática tanto para FMM y CST realizadas a 9.92GHz, 7GHz y 1.57GHz. Es de notar que los resultados del cálculo de la RCS a la frecuencia 7GHz, son comparados con los datos reportados en [39].

Parámetros	FMM	CST
n_Δ	11464	11432
h	0.002869	0.00222
l_{\max}	0.004662	0.004401
l_{\min}	0.002869	0.00222

Tabla 4.21: Parámetros comparativos para el cálculo de la RCS monoestática de la EMCC Almendra de Nasa

4.1 Resultados

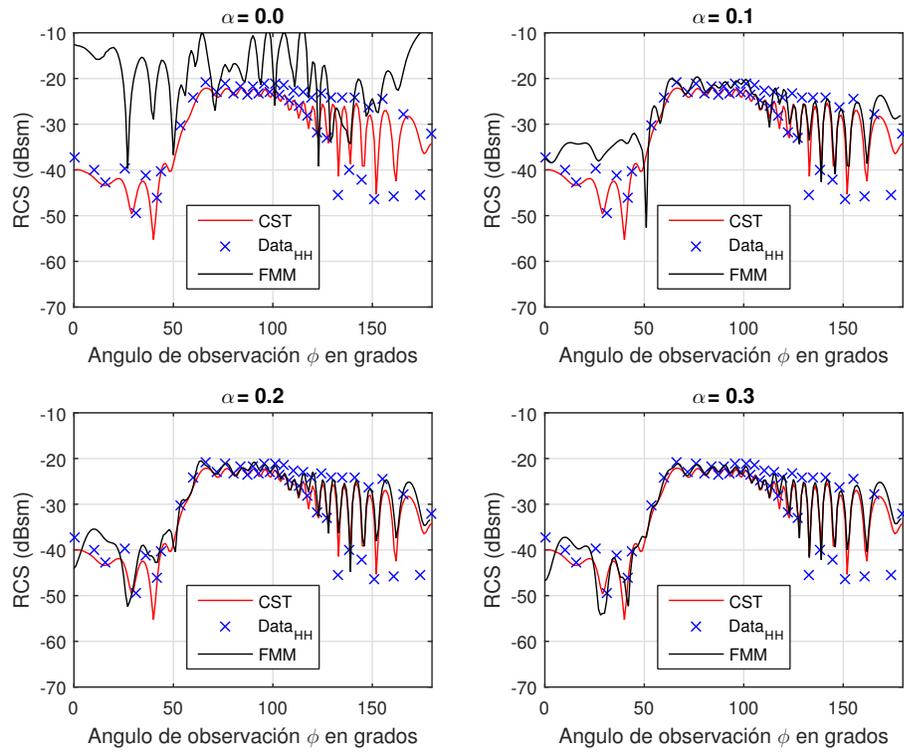


Figura 4.33: RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Almendra de la Nasa a 9.92GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 6,48$.

4.1 Resultados

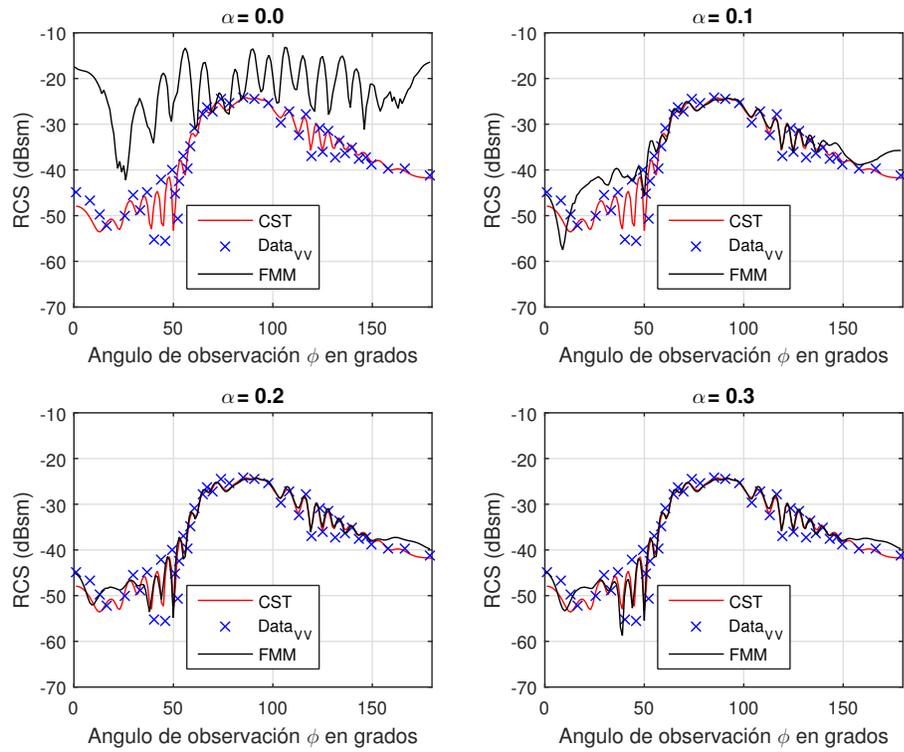


Figura 4.34: RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC Almendra de la Nasa a 9.92GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 6,48$.

4.1 Resultados

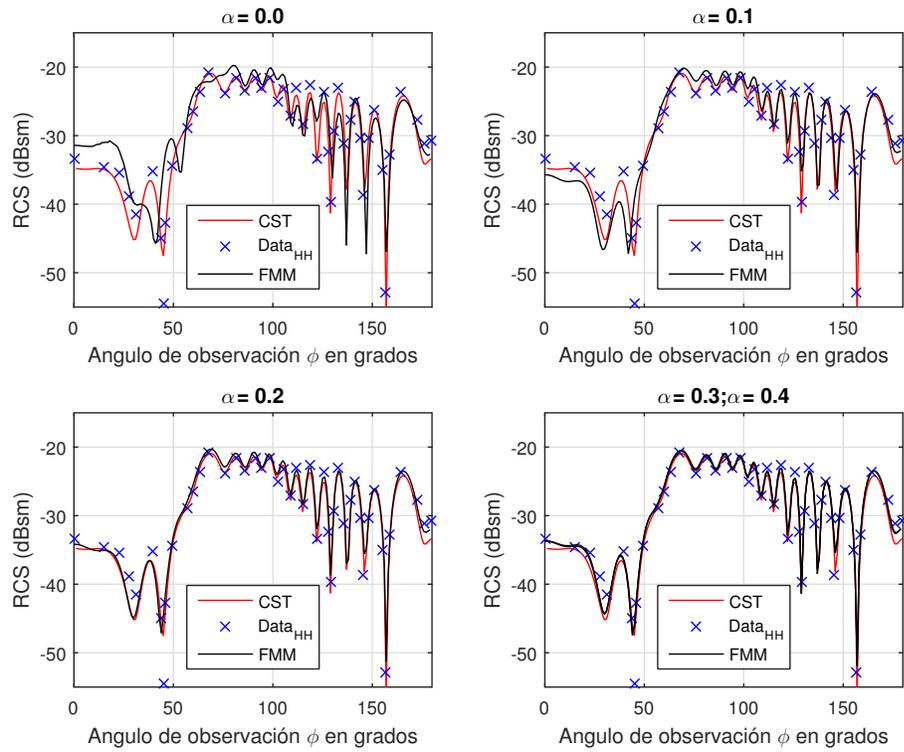


Figura 4.35: RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Almendra de la Nasa a 7GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 9,18$.

4.1 Resultados

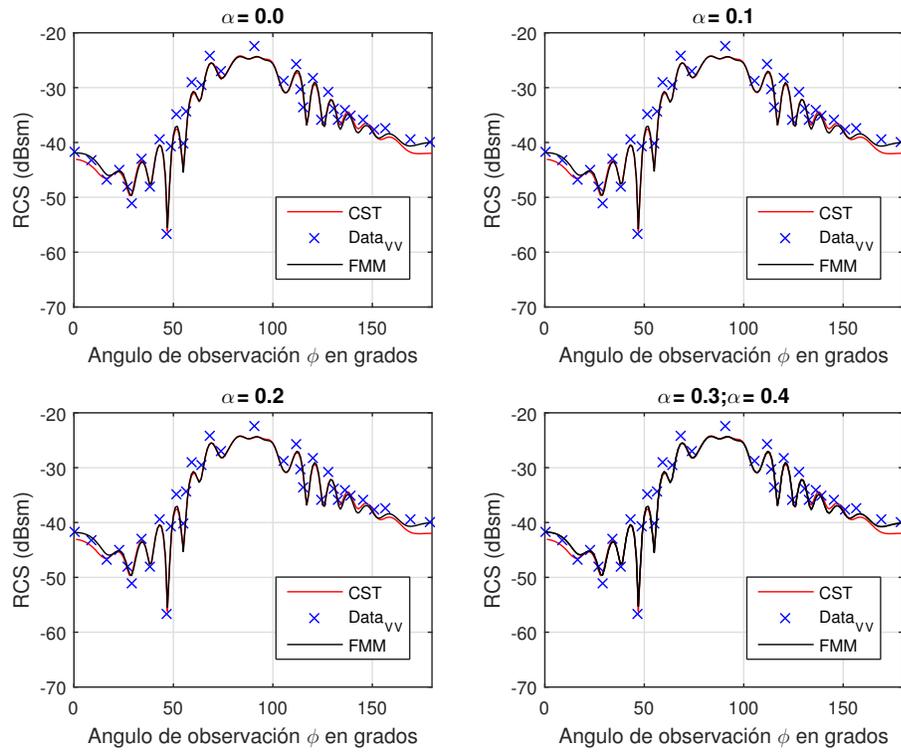


Figura 4.36: RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC Almendra de la Nasa a 7GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 9,18$.

4.1 Resultados

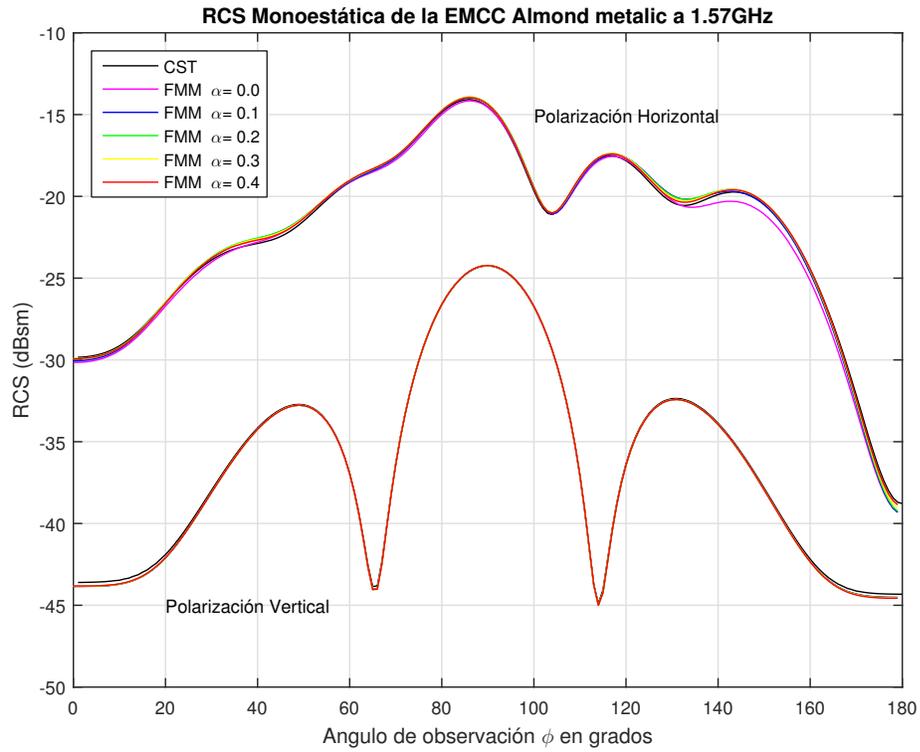


Figura 4.37: RCS Monoestática de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.57GHz.
 $(n_{\lambda})_{\min} = 48,96$.

4.1.5.4. EMCC Doble ojiva

A continuación en la Tabla 4.22 se muestra las condiciones de mallado con las cuales que fueron obtenidos los resultados del cálculo de la RCS a 7GHz, 1.57GHz y 1.18GHz. Es de notar que los resultados del calculo de la RCS a la frecuencia 1.57 GHz, son comparados con los datos reportados en [39].

Parámetros	FMM	CST
n_{Δ}	9448	9446
l_{\min}	3.98975E-04	1.7E-05
l_{\max}	3.96472E-03	3.440E-03
lado cubo W	0.2	0.2

Tabla 4.22: Parámetros comparativos del cálculo de la RCS monoestática a 1.57GHz de la EMCC Doble Ojiva

4.1 Resultados

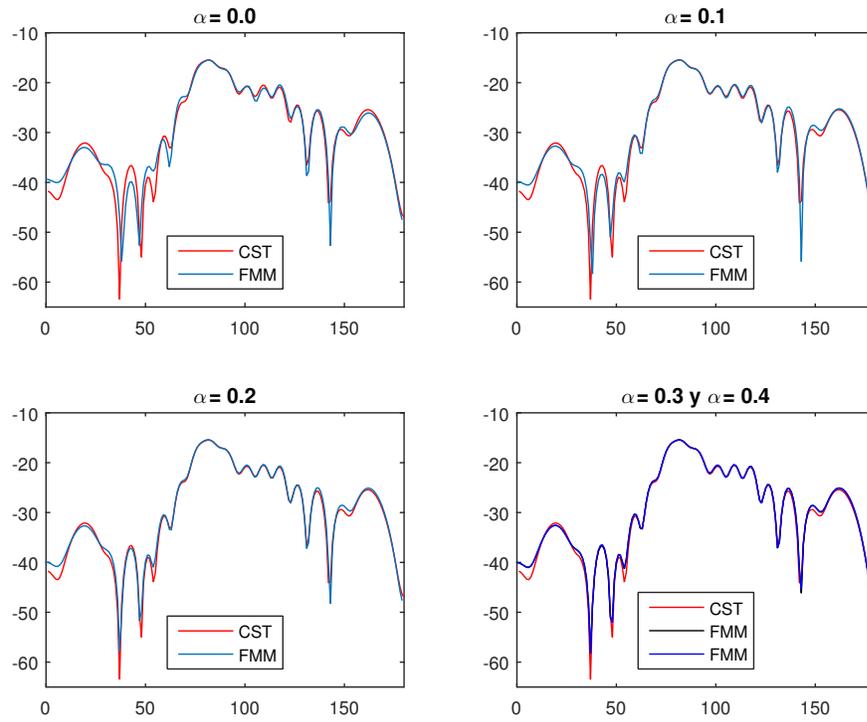


Figura 4.38: RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Doble Oliva a 9.92GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 7,62$.

4.1 Resultados

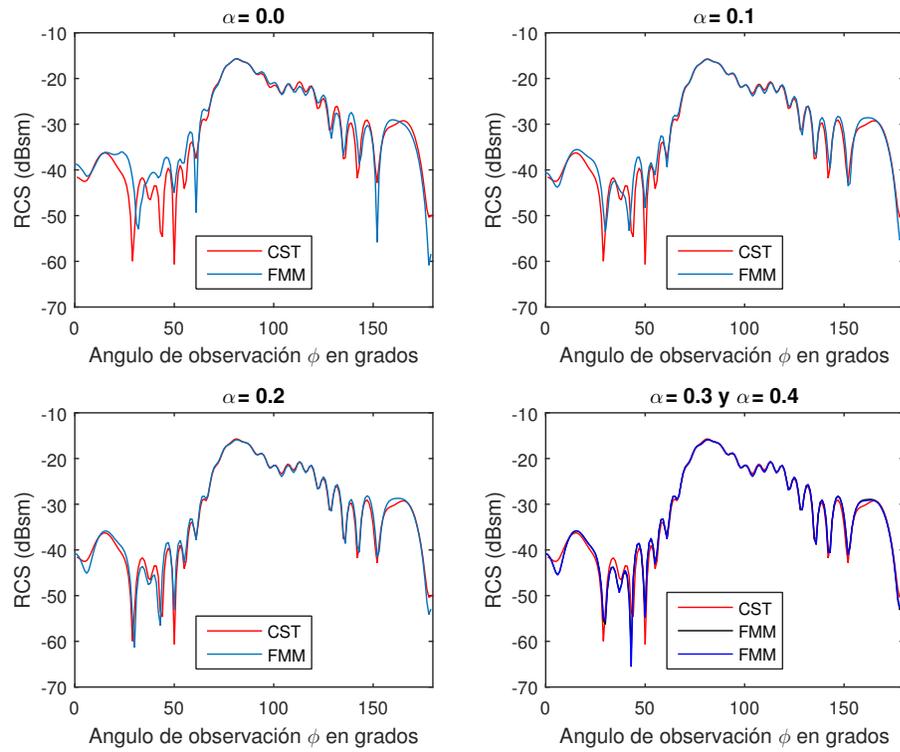


Figura 4.39: RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC doble-ojiva a 9.92GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 7,62$.

4.1 Resultados

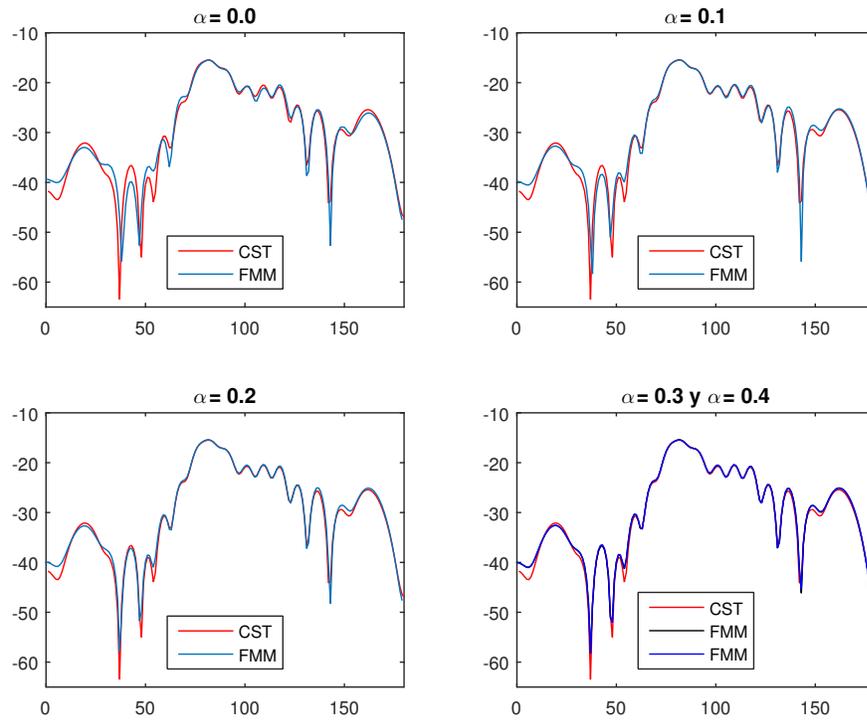


Figura 4.40: RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Doble Oliva a 7GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 9,18$.

4.1 Resultados

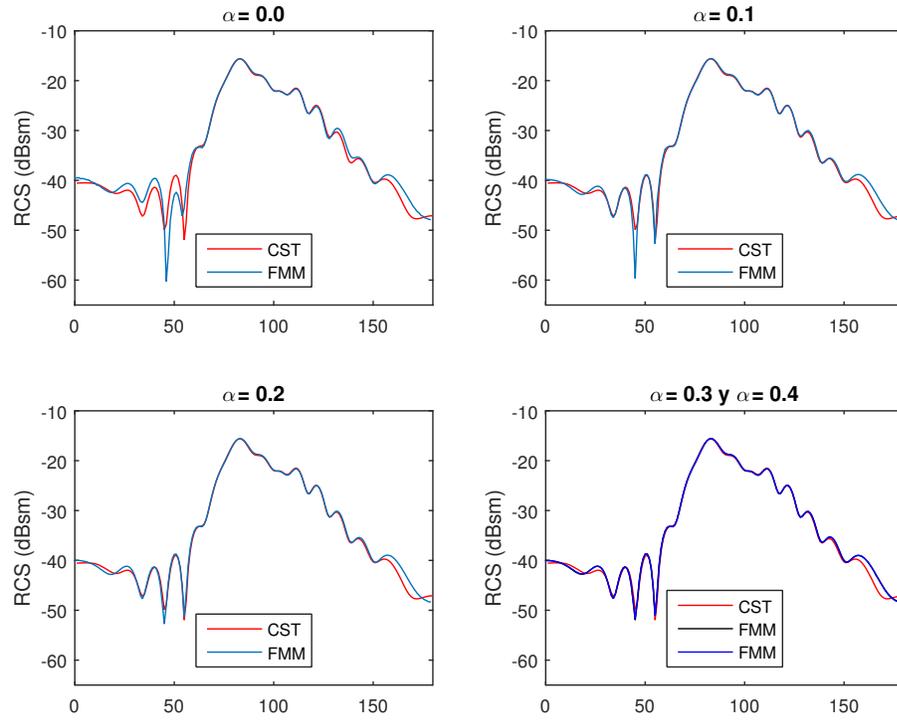


Figura 4.41: RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC doble-ojiva a 7GHz.
 $n_{\lambda(\min)} = 9,18$.

4.1 Resultados

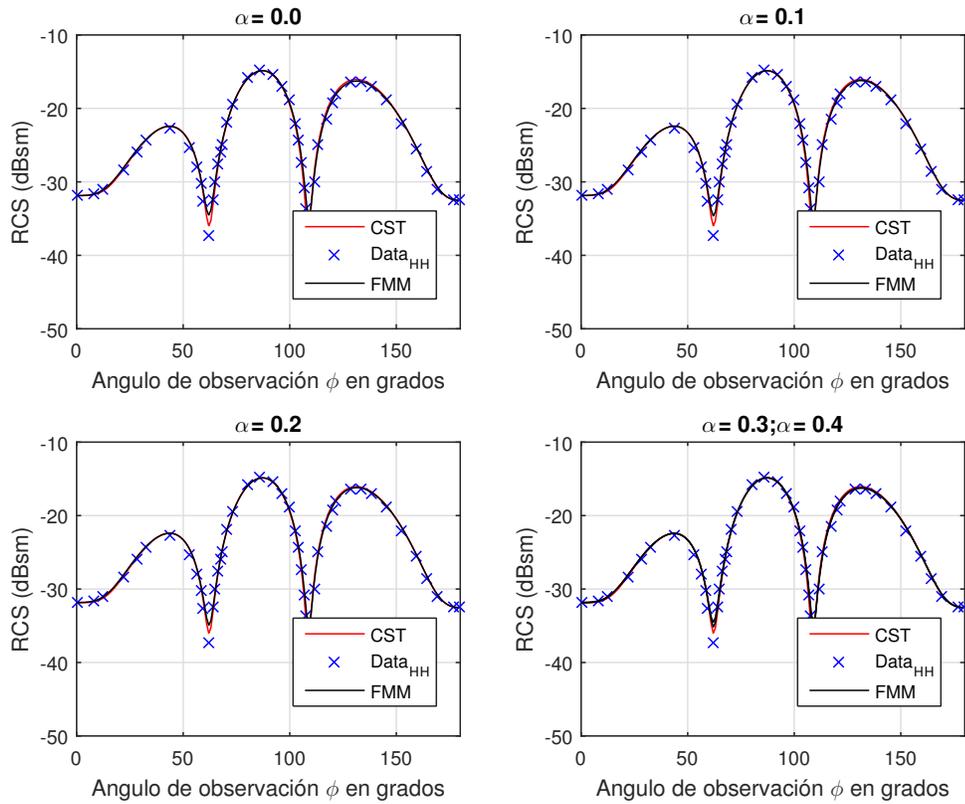


Figura 4.42: RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Doble Ojiva a 1.57GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 48,16$

4.1 Resultados

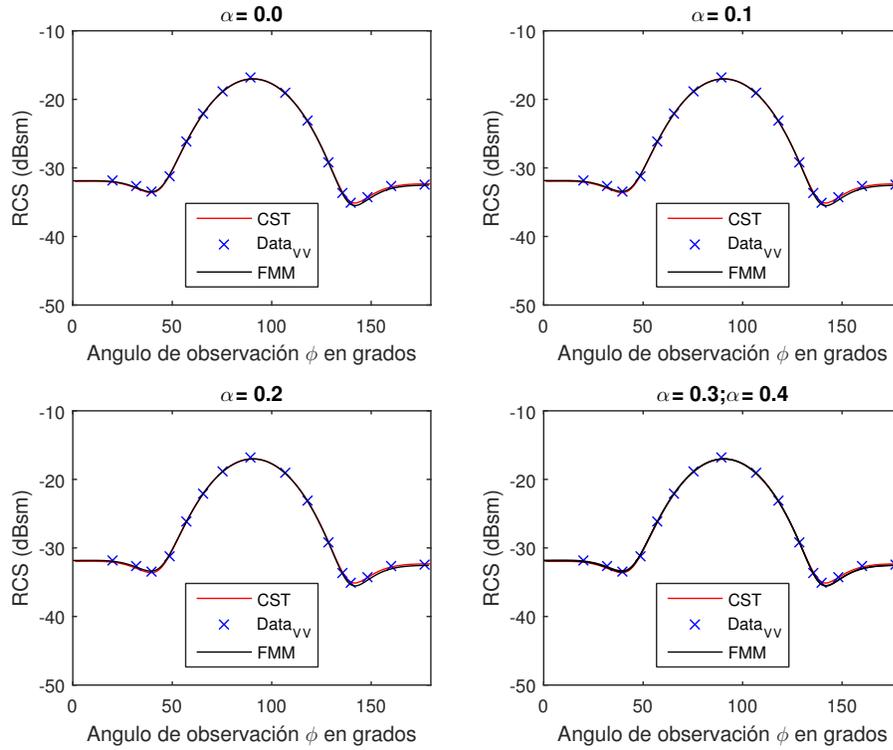


Figura 4.43: RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC Doble Ojiva a 1.57GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 48,16$

Los resultados de estos cálculos de RCS evidencian lo siguiente:

Para aquellas $(n_\lambda)_{\min} \lesssim 10$ el mejor coeficiente ponderación α de la CFIE que se acerca más a los resultados obtenidos con el software CST Studio, y los reportados en [39], toman el valor de $\alpha \geq 0,2$. Esto ocurre para todos los dispersores analizados.

Para aquellas $(n_\lambda)_{\min} > 10$ el mejor coeficiente ponderación α de la CFIE que se acerca más a los resultados obtenidos con el software CST Studio, y los reportados en [39], toman el valor de $0 < \alpha \leq 0,1$. Esto ocurre para todos los dispersores analizados.

4.1.6. Experimento N°3. Determinación del espectro de autovalores y número de condición de la matriz Zcercana en función del parámetro de ponderación de la CFIE, para variación de la densidad de discretización del dispersor.

A continuación se realizará el experimento de calcular el espectro de autovalores y número de condición para diferentes tipos de dispersores en función de la variación del coeficiente de ponderación α desde 0.0 hasta 1.0 en pasos de 0.1 para la EMCC Almendra y la EMCC Doble ojiva.

También se calcula el espectro de autovalores y número de condición del EMCC Cono-Esfera en función de la variación del coeficiente de ponderación α desde 0.0

4.1 Resultados

hasta 0.5.

4.1.6.1. EMCC Almendra de la Nasa.

En la Tabla 4.23 se muestra las distintas densidades de discretización del mallado de la almendra de la nasa utilizando la longitud promedio (h), y la longitud máxima de los lados del triángulos del mallado (ℓ_{max}), así como el criterio del longitud del lado cubo W utilizado en el método FMM. En el experimento se ha realizado la frecuencia de 1.19GHz.

Dispersor	n_λ	$(n_\lambda)_{min}$	n_Δ	Lado Cubo W
EMCC_almond_nl45	76.52	45.86	8724	$0,2\lambda$
EMCC_almond_nl30	63.92	30.699	6122	$0,2\lambda$
EMCC_almond_nl20	41.00	20.2931	2544	$0,2\lambda$
EMCC_almond_nl10	18.58	10.20	574	$0,2\lambda$

Tabla 4.23: Características de los dispersores Almendra de la Nasa a la frecuencia de 1.19GHz

Se ha utilizado el programa Ztotal para determinar el espectro de autovalores y el número de condición en función del parámetro de ponderación α tomando valores en el rango de 0.0 a 1.0 en pasos de 0.1. A continuación se muestran los resultados obtenidos. En la Figura.4.44 podemos observar como varía el número de condición para la frecuencia 1.19GHz para los dispersores mencionados en la Tabla 4.23

4.1 Resultados

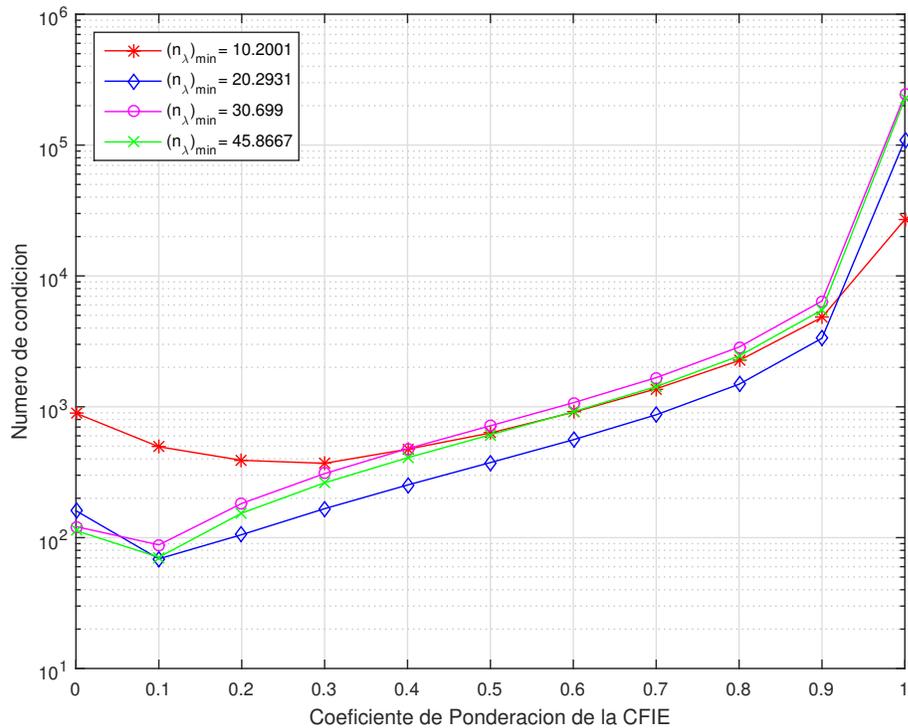


Figura 4.44: Variación del número de condición de Zcercana de la EMCC Almendra a la frecuencia de 1.19GHz en el experimento N°2

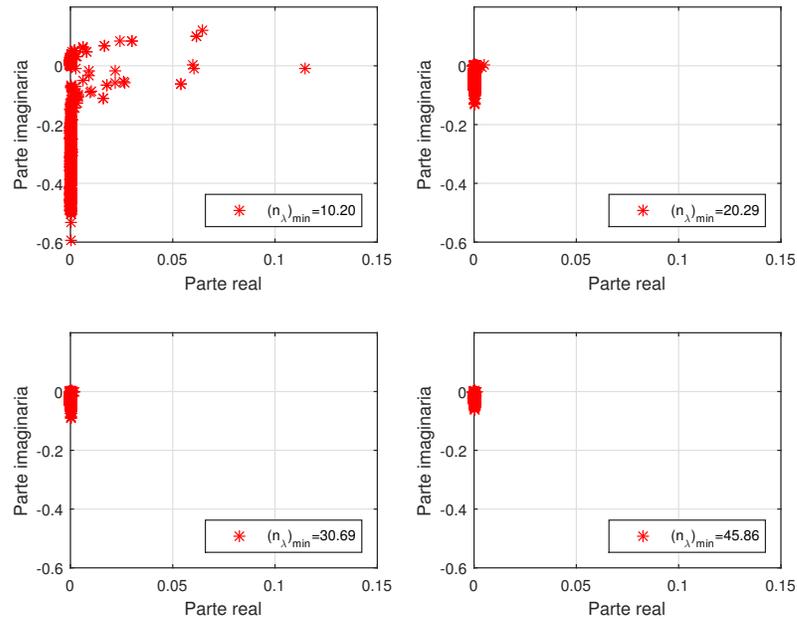
De la Figura.4.44 se desprenden los siguientes resultados:

n_λ	$(n_\lambda)_{\min}$	α para min número de condición	número de condición para CFIE
76.52	45.86	0.1	70.83
63.92	30.699	0.1	88.100
41.00	20.2931	0.1	68.881
18.58	10.20	0.3	369.88

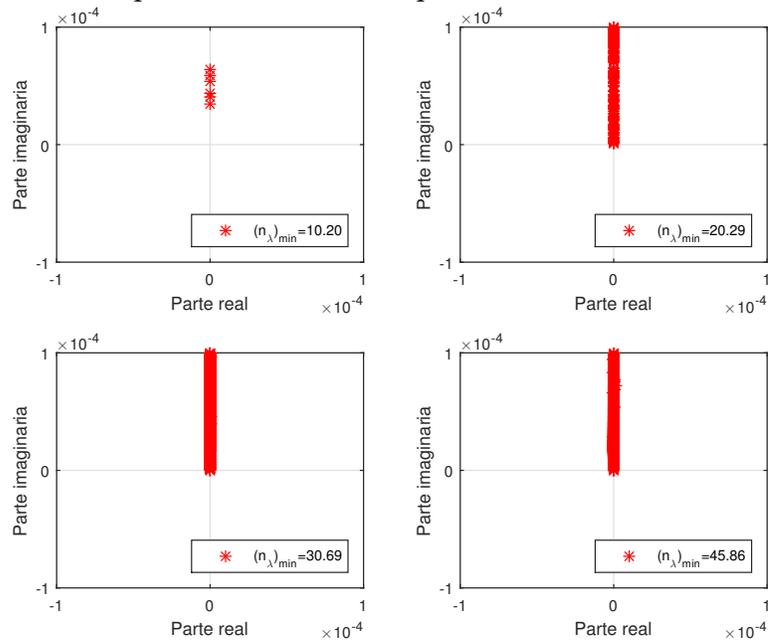
Tabla 4.24: Valores del coeficiente de ponderación para mínimo numero de condición para la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz

A continuación los espectros de autovalores de la matriz Zcercana de la EMCC Almendra de la Nasa en función de la densidad de discretización.

4.1 Resultados



Espectro de autovalores para la EFIE ($\alpha = 1$)



Espectro de autovalores para la EFIE al rededor del origen

Figura 4.45: Espectro de autovalores la matriz Zcercana EFIE de la Almendra de la Nasa en el experimento N°3 a la frecuencia de 1.19GHz

4.1 Resultados

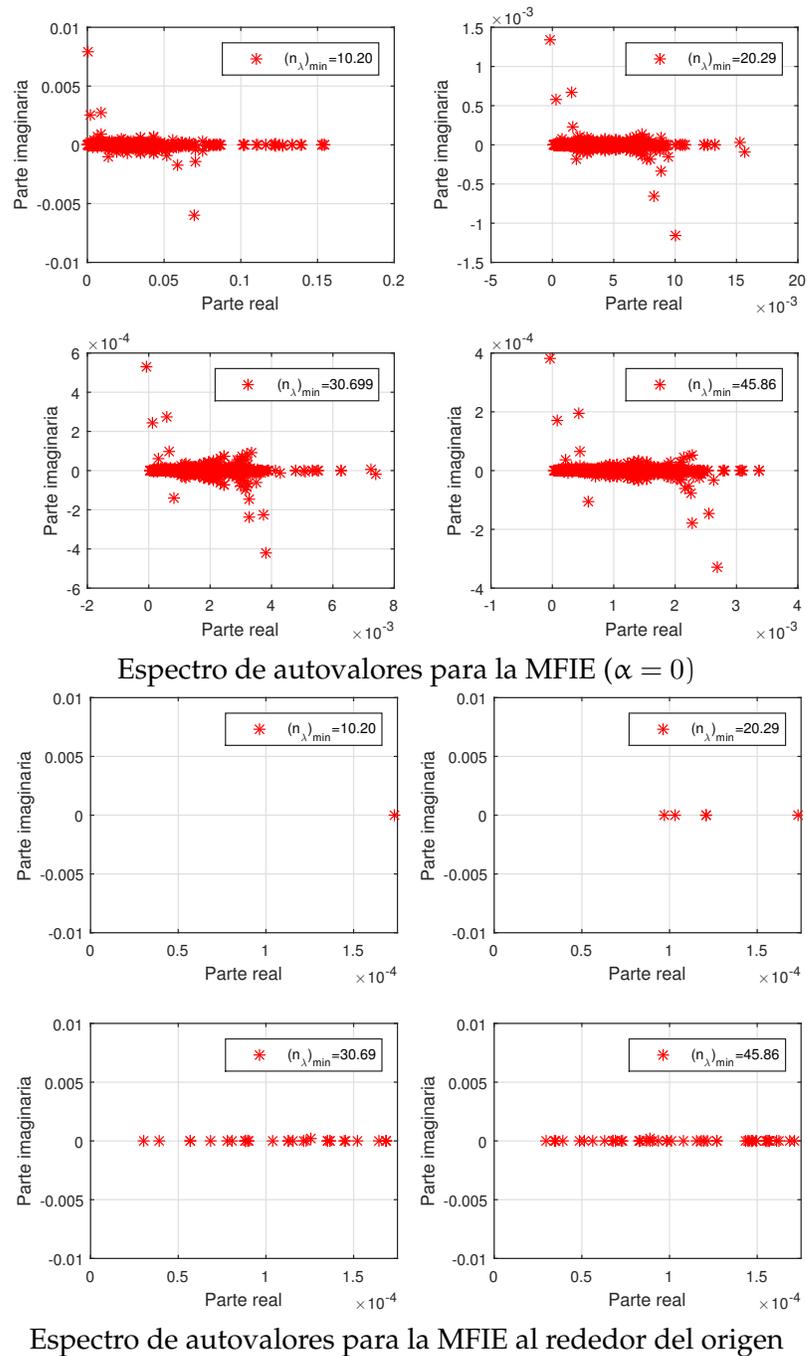
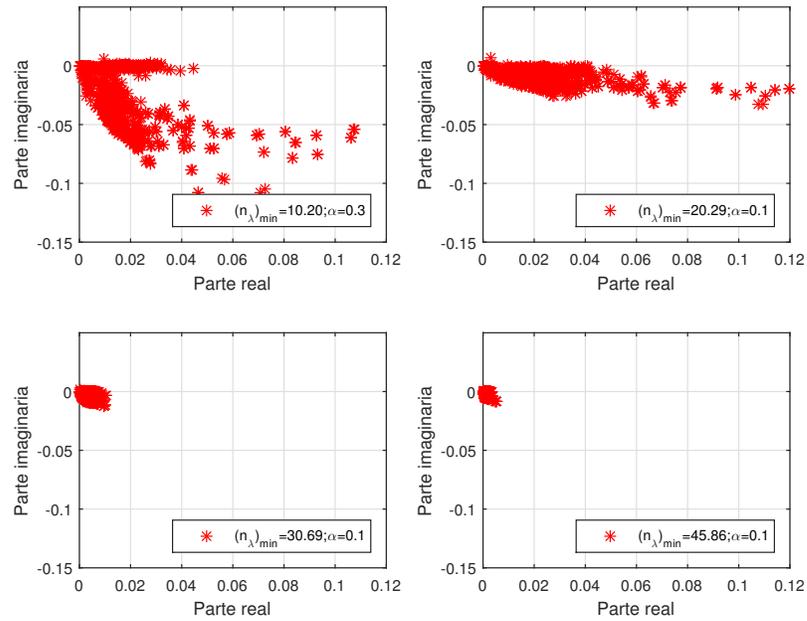
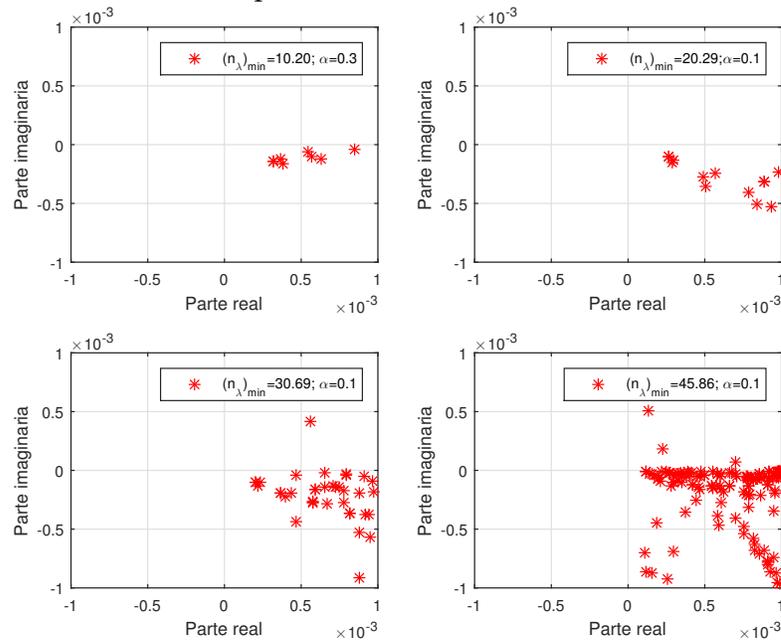


Figura 4.46: Espectro de autovalores la matriz $Z_{cercana}$ MFIE de la Almendra de la Nasa en el experimento N°3 a la frecuencia de 1.19GHz

4.1 Resultados



Espectro de autovalores para la CFIE en el menor numero de condición



Espectro de autovalores para la CFIE al rededor del origen

Figura 4.47: Espectro de autovalores la matriz Zcercana CFIE de la Almendra de la Nasa en el experimento N°3 a la frecuencia de 1.19GHz para valores de α donde se obtiene el menor NC.

4.1.6.2. EMCC Doble-Ojiva.

En la Tabla 4.25 se muestra las distintas densidades de discretización utilizadas para la EMCC Doble Oliva y el lado cubo W utilizado en el método FMM. En el experimento se ha seleccionado la frecuencia de 1.18GHz.

Dispersor	n_λ	$(n_\lambda)_{\min}$	n_Δ	Lado cubo W
EMCC_double-ogive_9.92GHz	112.9	64.08	9488	$0,25\lambda$
EMCC_double-ogive_7GHz	78.51	44.55	4622	$0,25\lambda$
EMCC_double-ogive_1.57GHz	20.77	10.63	352	$0,25\lambda$
EMCC_double-ogive_1.18GHz	14.92	8.75	176	$0,25\lambda$

Tabla 4.25: Características de la EMCC Doble Oliva a la frecuencia de 1.18Ghz

A continuación se muestra el espectro de autovalores y el número de condición en función del parámetro de ponderación α tomando valores en el rango de 0.0 a 1.0 en pasos de 0.1. A continuación se muestran los resultados obtenidos. En la Figura.4.48 podemos observar como varía el numero de condición para la frecuencia 1.18GHz para los dispersores mencionados en la Tabla 4.25

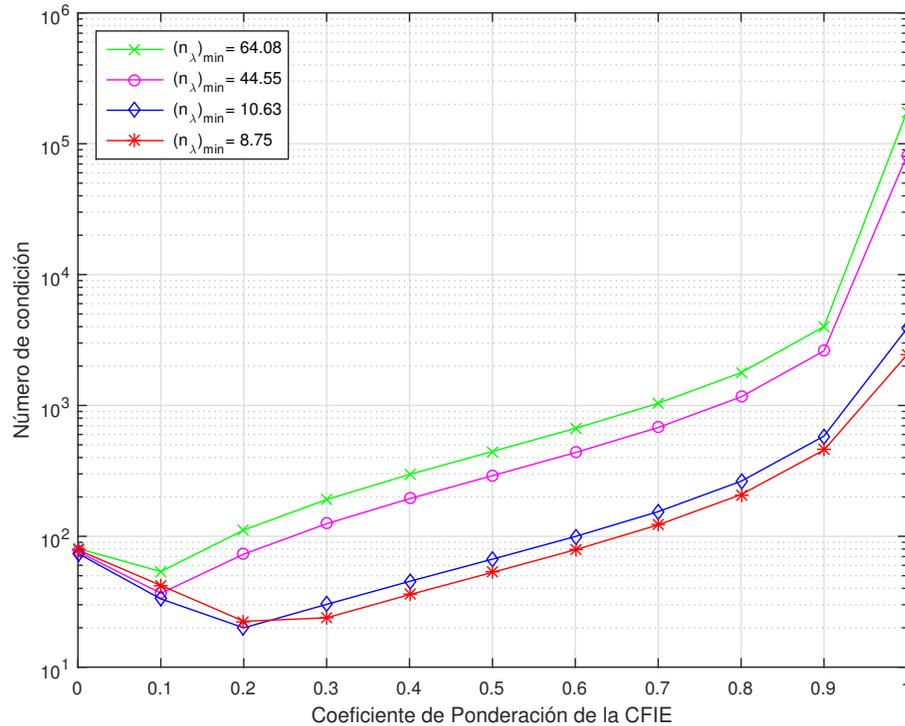


Figura 4.48: Variación del número de condición de Zercana de la EMCC Double-Ojiva a la frecuencia de 1.18Ghz

4.1 Resultados

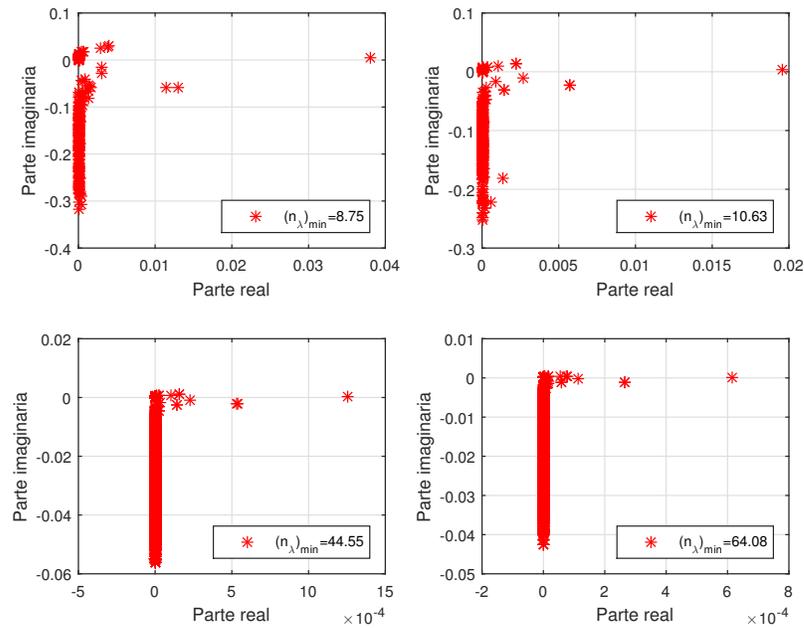
A continuación de la Figura.4.48 se desprenden los siguientes resultados mostrados en la Tabla4.26:

n_λ	$(n_\lambda)_{\min}$	α para min número de condición	número de condición para CFIE
112.90	64.08	0.1	53.79
78.51	44.55	0.1	36.67
20.78	10.63	0.2	19.98
14.92	8.75	0.2	22.41

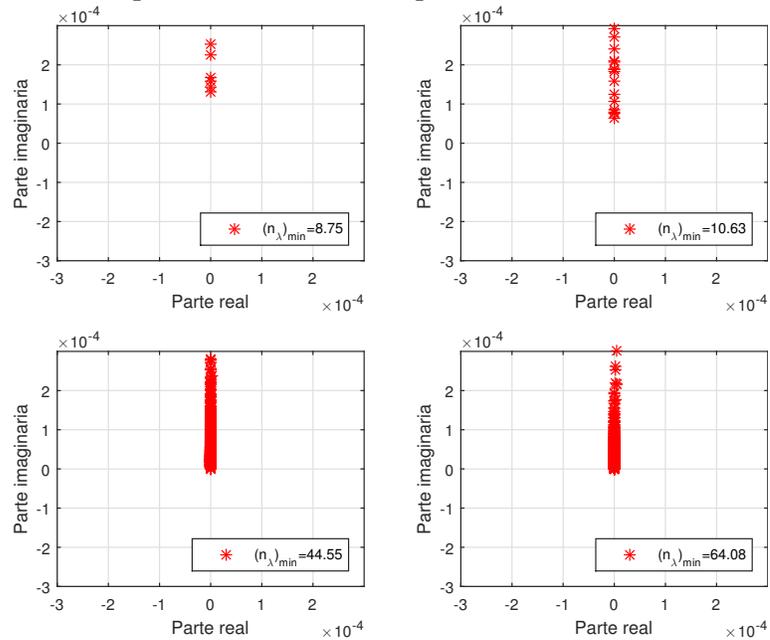
Tabla 4.26: Valores del coeficiente de ponderación para mínimo número de condición a 1.18GHz para la EMCC Doble Oliva.

A continuación los espectros de autovalores de la doble ojiva

4.1 Resultados



Espectro de autovalores para la EFIE ($\alpha = 1$)



Espectro de autovalores para la EFIE al rededor del origen

Figura 4.49: Espectro de autovalores la matriz Zcercana EFIE de la EMCC Doble Ojiva en el experimento N°3 a la frecuencia de 1.18GHz

4.1 Resultados

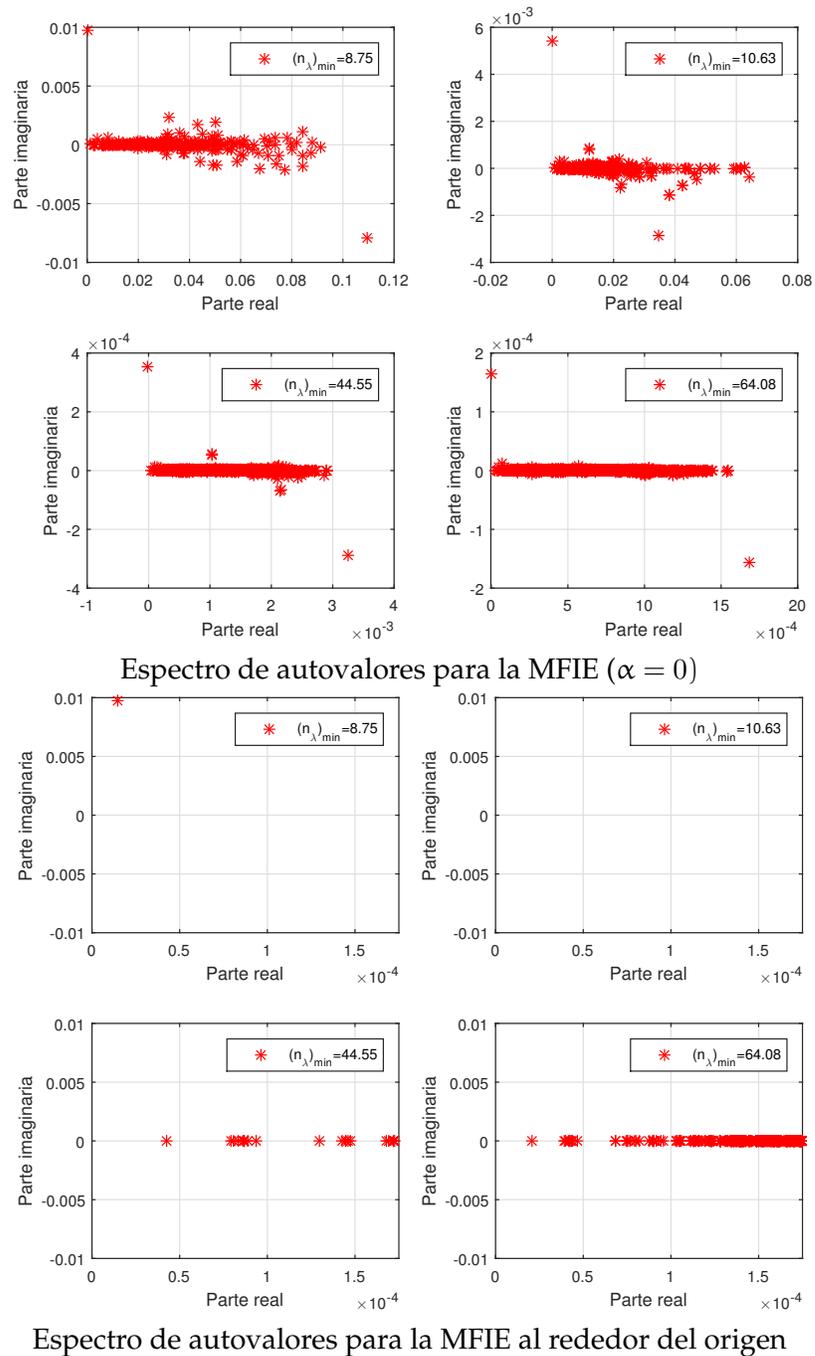
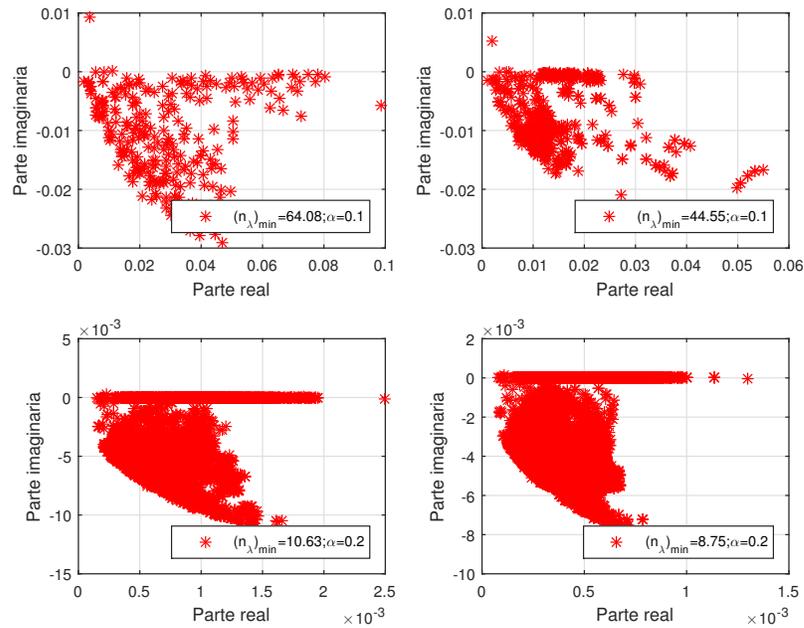
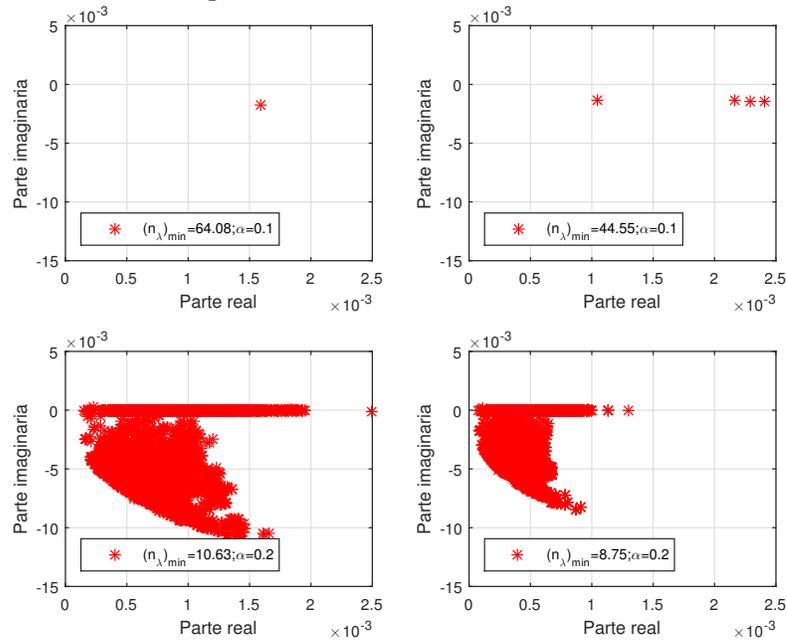


Figura 4.50: Espectro de autovalores la matriz Zcercana MFIE de la EMCC Doble Ojiva en el experimento N°3 a la frecuencia de 1.18GHz

4.1 Resultados



Espectro de autovalores para la CFIE en el menor numero de condición($\alpha = 0$)



Espectro de autovalores para la CFIE al rededor del origen

Figura 4.51: Espectro de autovalores la matriz Zcercana CFIE de la EMCC Doble Ojiva en el experimento N°3 a la frecuencia de 1.18GHz

4.1.6.3. EMCC Cono-Esfera.

A continuación se muestra en la Figura.4.52 el EMCC Cono-Esfera al cual se realizará el estudio de la determinación del número de condición y espectro de autovalores. Dimensiones del EMCC Cono-Esfera: radio=0.0748m y longitud del cono=0.605m

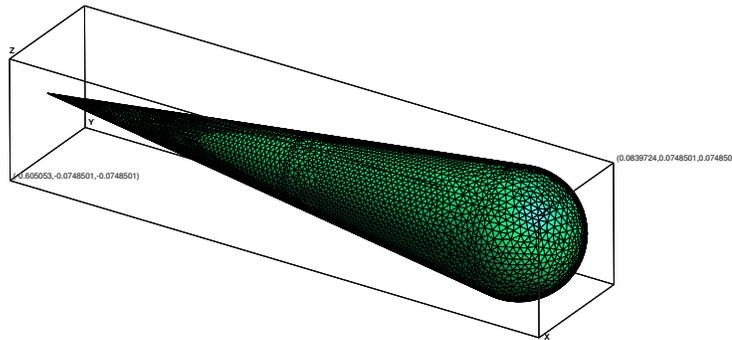


Figura 4.52: EMCC Cono-Esfera. .[39]

En la Tabla4.27 se muestra las distintas densidades de mallado de la EMCC Cono-Esfera, y el lado cubo W utilizado. En el experimento se ha seleccionado la frecuencia de estudio de 869MHz.

Dispersor	n_λ	$(n_\lambda)_{min}$	n_Δ	Lado Cubo
EMCC_cone_sphere_nl_40	49.79	29.24	8700	0,25 λ
EMCC_cone_sphere_nl_30	37.01	22.75	4734	0,25 λ
EMCC_cone_sphere_nl_20	26.17	16.16	2402	0,25 λ
EMCC_cone_sphere_nl_10	14.10	9.936	704	0,25 λ

Tabla 4.27: Densidades de discretización del Cono-Esfera a la frecuencia de 869Ghz

Se ha utilizado el programa Ztotal para determinar el espectro de autovalores y el número de condición en función del parámetro de ponderación α tomando un rango de valores variables desde 0.0 a 0.5 con el fin verificar como es la variación del numero de condición en valores intermedios de los α elegidos en los experimentos anteriores a éste. A continuación en la Tabla4.28 se muestran los pasos de variación y rango elegido del coeficiente de ponderación α utilizados para determinar el número de condición de la matriz Zcercana del EMCC Cono-Esfera.

4.1 Resultados

n_λ	$(n_\lambda)_{\min}$	Variación de α en pasos cada 0.01 en el rango	Variación de α en pasos cada 0.1 en el rango
49.79	29.24	$0,05 \leq \alpha \leq 0,15$	$0,2 \leq \alpha \leq 0,5$
37.01	22.75	$0,05 \leq \alpha \leq 0,15$	$0,2 \leq \alpha \leq 0,5$
26.17	16.16	$0,15 \leq \alpha \leq 0,25$	$0,0 \leq \alpha \leq 0,1$ y $0,3 \leq \alpha \leq 0,5$
14.10	9.936	$0,15 \leq \alpha \leq 0,25$	$0,0 \leq \alpha \leq 0,1$ y $0,3 \leq \alpha \leq 0,5$

Tabla 4.28: Rango y pasos de variación del coeficiente α en el experimento N°3 del EMCC Cono- Esfera.

En la Figura.4.2 podemos observar como varía el numero de condición para la frecuencia 869MHz para las distintas densidades de discretización mínimas indicadas en la Tabla4.27.

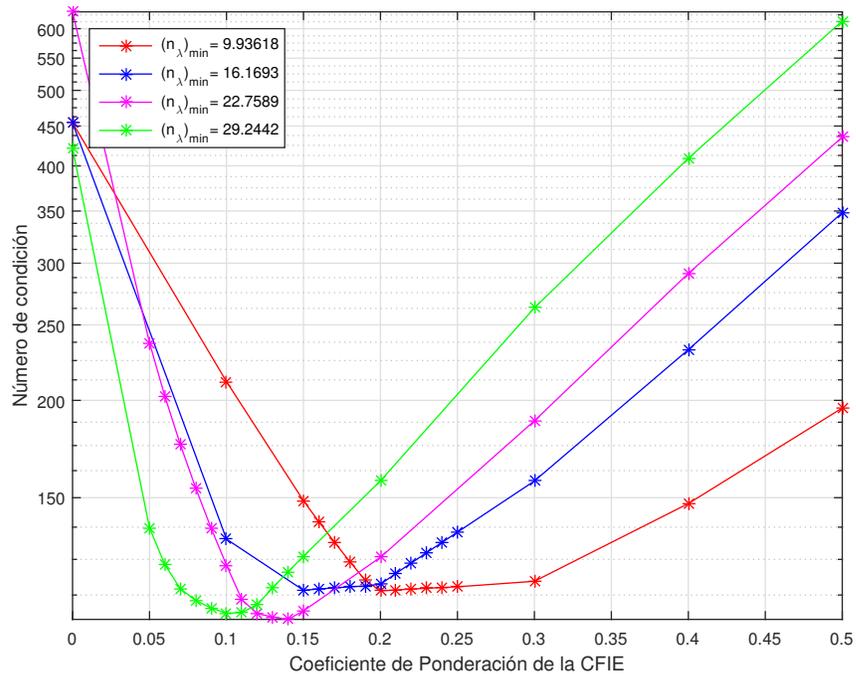


Figura 4.53: Variación del número de condición de Zcercana de la EMCC Cono_esfera a la frecuencia de 869MHz.

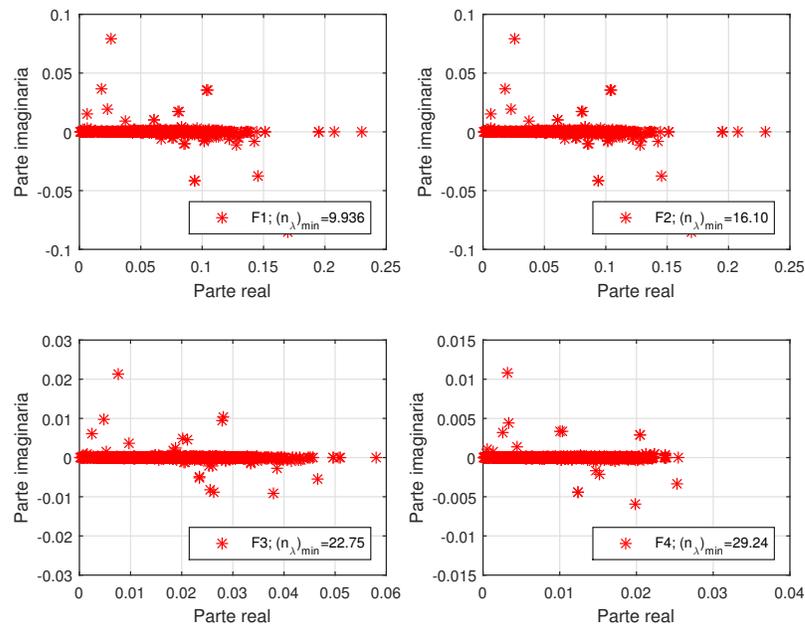
De la Figura.4.53 se desprende los siguientes resultados:

4.1 Resultados

n_λ	$(n_\lambda)_{\min}$	α para mínimo número de condición	Número de condición mínimo
49.79	29.24	0.1	106.6158
37.01	22.75	0.14	104.68
26.17	16.16	0.15	114.10
14.10	9.936	0.2	113.86

Tabla 4.29: Valores del coeficiente de ponderación para mínimo numero de condición a 869MHz

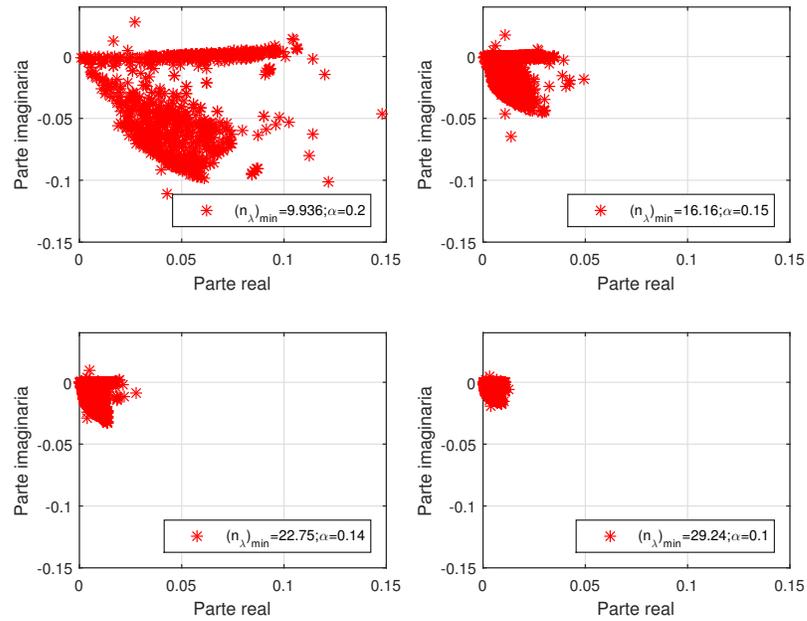
A continuación se muestran el espectro de autovalores del EMCC Cono-Esfera a 869MHz.



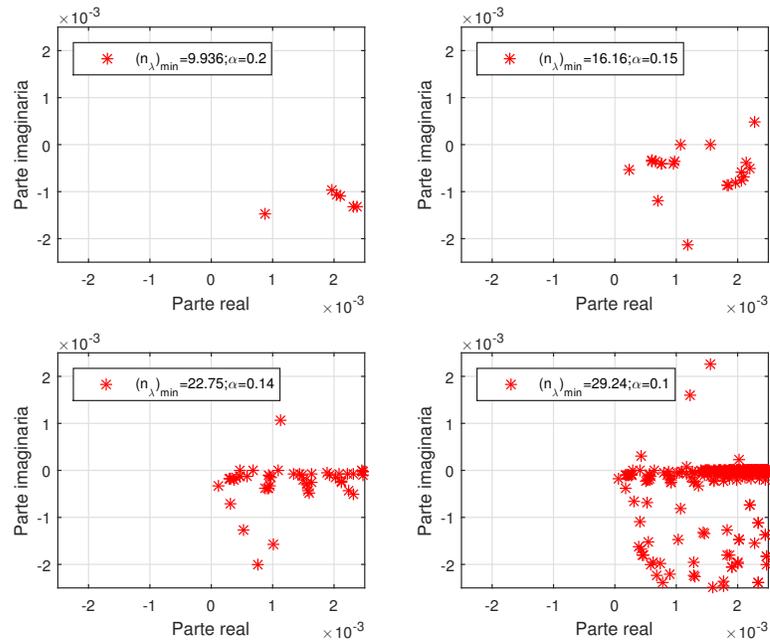
Espectro de autovalores para la MFIE ($\alpha = 0$)

Figura 4.54: Espectro de autovalores la matriz Zcercana MFIE del Cono-Esfera en el experimento N°3.

4.1 Resultados



Espectro de autovalores de la CFIE en el menor numero de condición



Espectro de autovalores para la CFIE al rededor del origen

Figura 4.55: Espectro de autovalores la matriz Zcercana CFIE de la EMCC Esfera Cono en el experimento N°3 a la frecuencia de 869MHz

4.1.7. Análisis de Resultados del experimento N°3.

Los resultados arrojados en éste experimentos donde se varia la densidad de discretización variando el número de parches del mallado del dispersor a una única frecuencia muestran lo siguiente:

- Para la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz se verifica que para $(n_\lambda)_{\min} > 20,29$ el valor del coeficiente de ponderación de la CFIE que hace que el número de condición sea mínimo es de $\alpha = 0,1$.
- Para el EMCC doble Oliva a 1.18GHz se verifica que para valores de $(n_\lambda)_{\min} > 10,63$ el valor del coeficiente de ponderación de la CFIE que hace que el número de condición sea mínimo se encuentra para valores de $\alpha < 0,2$
- Para el EMCC cono esfera a 869MHz se verifica que para valores de $(n_\lambda)_{\min} > 9,936$ el valor del coeficiente de ponderación de la CFIE que hace que el número de condición sea mínimo, toma valores entre 0.15 y 0.1, verificándose nuevamente que a medida que la densidad de discretización aumenta, el menor número de condición disminuye, y con $(n_\lambda)_{\min} > 29,24$ con α igual a 0.1 ya el número de condición es mínimo. En la Figura.4.56 se resumen los valores que toma el coeficiente de ponderación α de la CFIE en función de la densidad de discretización de las matriz Zcercana de los dispersores estudiados en el experimento N°3.
- Los espectros de autovalores de la EFIE, MFIE y CFIE arrojan que a medida que la densidad de discretización aumenta éstos espectros de apiñan o concentran más hacia el origen del sistema de coordenadas, esto quiere decir que los valores de los autovalores se hacen cada vez más pequeños.
- Se verifica que para el espectro de autovalores de la EFIE se encuentra mayoritariamente sobre el eje imaginario, el espectro del al MFIE se encuentra mayoritariamente sobre el eje real, y el espectro de la CFIE ésta constituido por valores complejos con parte real a e imaginaria.
- En la Tabla4.30 y en la Figura.4.56 se muestra la variación de coeficiente de ponderación α de la CFIE en función de la densidad de discretización mínima $(n_\lambda)_{\min}$, donde se evidencia que los valores del coeficiente de ponderación tienden a tomar valores menores a 0.2 a medida que la densidad discretización mínima empieza a tomar valores mayores de 10.

4.1 Resultados

Dispersor	Frec.(GHz)	$(n_\lambda)_{\min}$	α para NC_{\min}	NC_{\min}
EMCC Almendra de la Nasa	1.19	10.20	0.3	369.88
		20.29	0.1	68.88
		30.699	0.1	88.100
		45.86	0.1	70.83
EMCC Doble Ojiva	1.18	8.75	0.2	22.41
		10.63	0.2	19.98
		44.55	0.1	36.67
		64.08	0.1	53.79
EMCC Cono- Esfera	0.869	9.93	0.2	113.86
		16.16	0.15	114.10
		22.75	0.14	104.68
		29.24	0.1	106.6158

Tabla 4.30: Resumen de resultados donde se expresa el valor del coeficiente de ponderación α de la CFIE para el mínimo número de condición de la matriz Z_{cercana} de los dispersores evaluados en el experimento N°3

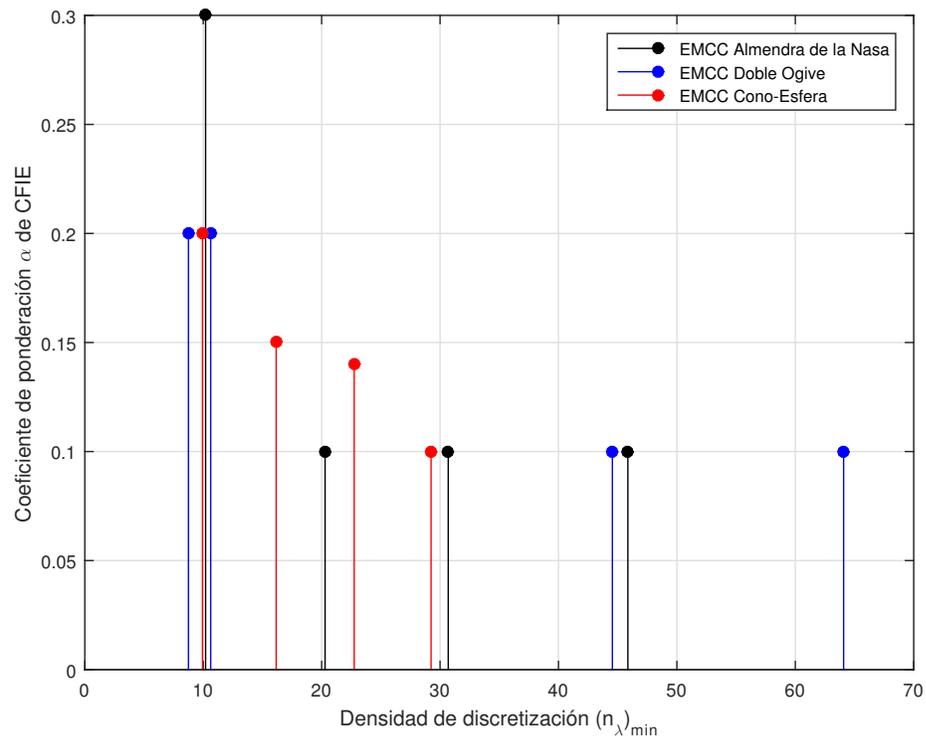


Figura 4.56: Variación del coeficiente de ponderación α de la CFIE en función de la densidad de discretización $(n_\lambda)_{\min}$ para las matrices Z_{cercana} de los dispersores analizados en el experimento N°3.

4.1.8. Validación de Resultados del Experimento N°3.

4.1.8.1. Validación de Resultados para la EMCC Almendra de la nasa. Experimento N°3.

Para validar los resultados en el Experimento N°3 se ha realizado el calculo de la RCS monoestática utilizando el método FMM aplicado a la matriz Z_{total} al dispersor EMCC Almendra de la Nasa a la frecuencia de 1.19MHz y se ha comparado este cálculo utilizando la data reportada en [39] y la que se obtiene utilizando el Software CST.

A continuación en la Figura.4.57, Figura.4.58, Figura.4.59 se muestran la RCS de la EMCC Almendra de la nasa a 1.19GHz en función de la densidad de discretización mínima $(n_\lambda)_{min}$ en polarización horizontal.

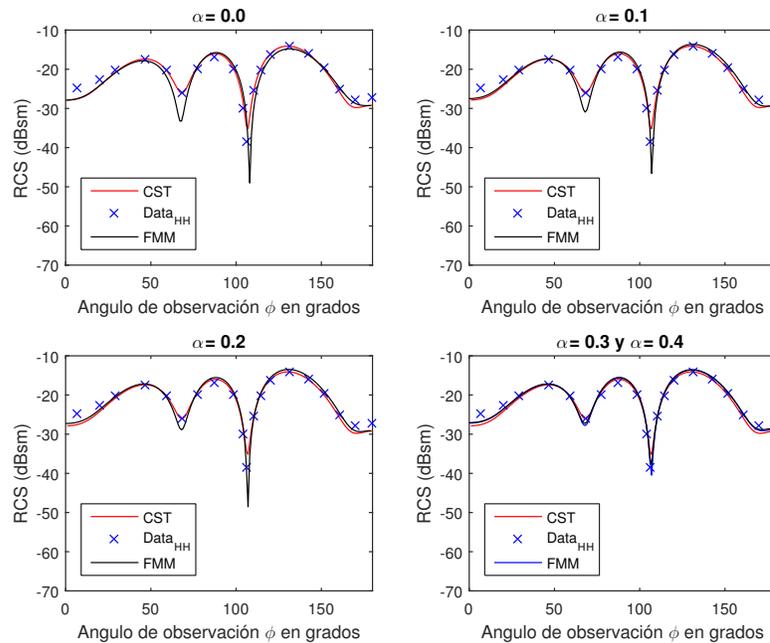


Figura 4.57: RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz. $(n_\lambda)_{min} = 10,20$.

4.1 Resultados

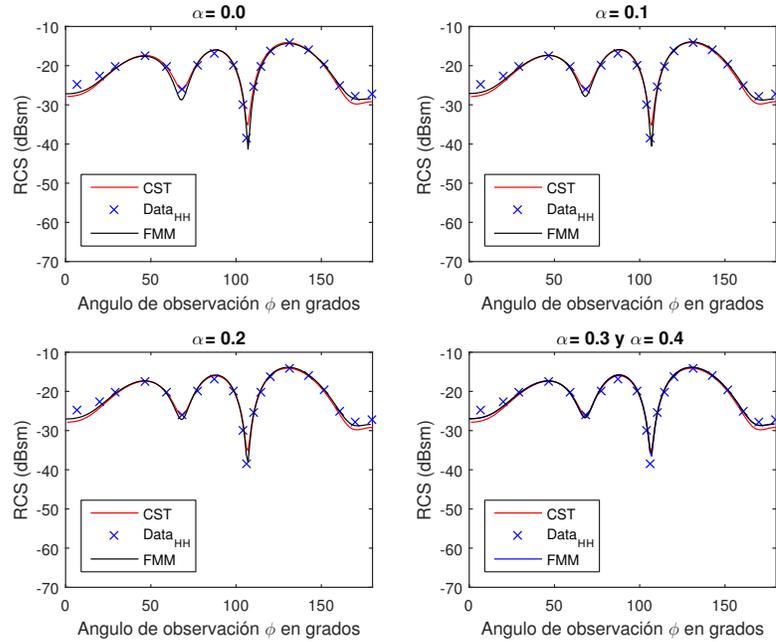


Figura 4.58: RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 20,29$.

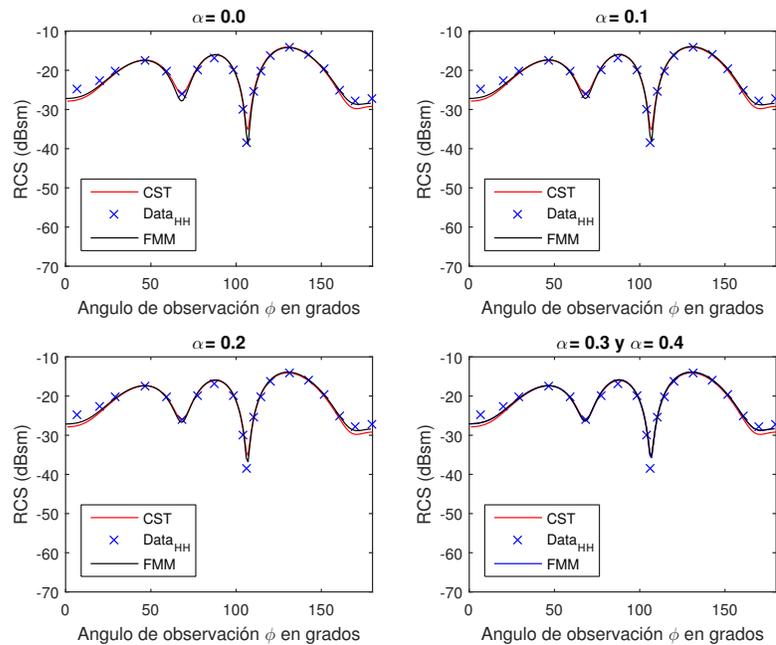


Figura 4.59: RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 30,69$.

4.1 Resultados

A continuación se muestra la RCS de la almendra de la nasa a 1.19GHz en función de la densidad de discretización mínima $(n_\lambda)_{\min}$, en polarización Vertical

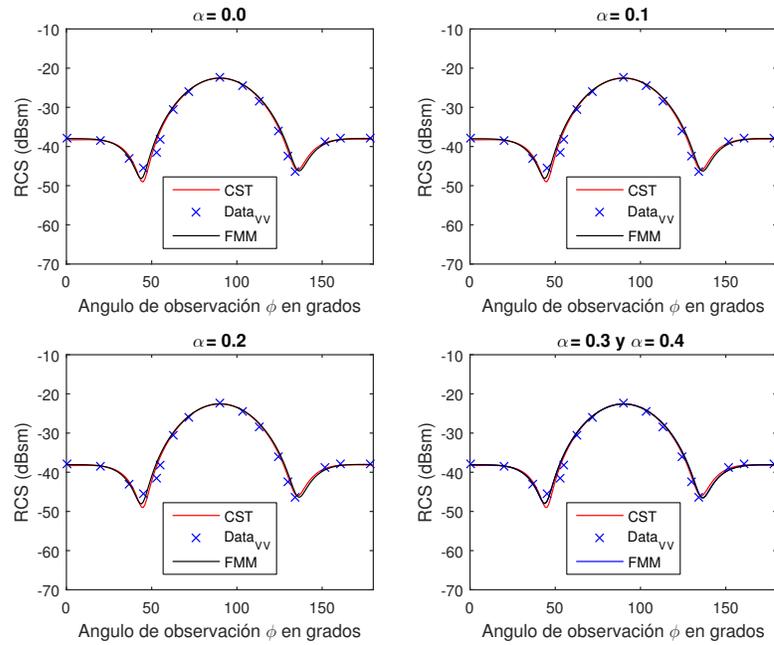


Figura 4.60: RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 10,20$.

4.1 Resultados

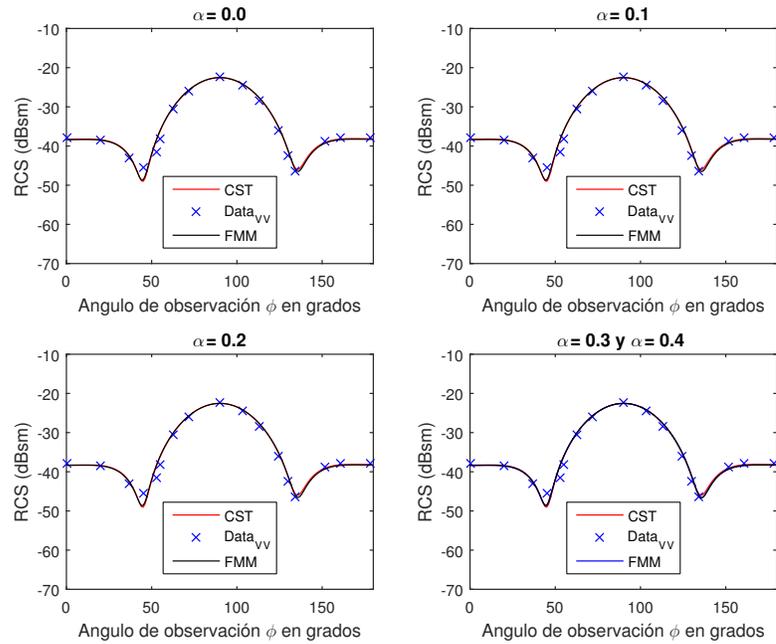


Figura 4.61: RCS Monoestática Polarización Vertical de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 20,29$.

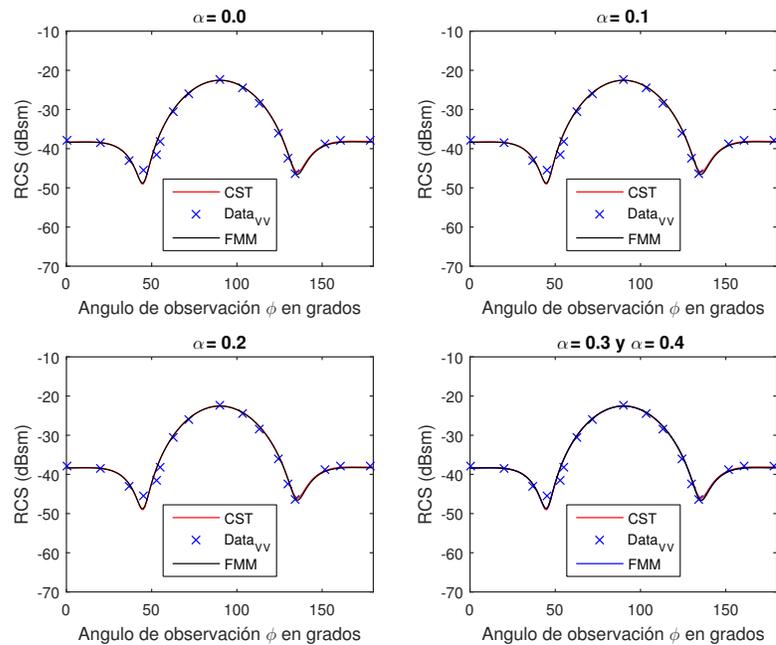


Figura 4.62: RCS Monoestática Polarización Horizontal de la EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz. $(n_\lambda)_{\min} = 30,69$.

4.1 Resultados

De los resultados mostrados del calculo de RCS de la EMCC Almendra de la Nasa en polarización horizontal muestran que:

- Para $(n_\lambda)_{\min}=10.20$ la RCS calculada mediante FMM se aproxima con mayor exactitud a la data reportada cuando el valor de $\alpha = 0,3$. Ver Figura.4.57
- Para $(n_\lambda)_{\min}=20.29$ la RCS calculada mediante FMM se aproxima con mayor exactitud a la data reportada cuando el valor de $\alpha = 0,2$. Ver Figura.4.58
- Para $(n_\lambda)_{\min}=30.69$ la RCS calculada mediante FMM se aproxima con mayor exactitud a la data reportada cuando el valor de $0 \leq \alpha \leq 0,1$. Ver Figura.4.59

De los resultados mostrados del calculo de RCS para la EMCC Almendra para polarización vertical muestran que:

- Para $(n_\lambda)_{\min}=10.20, 20.29$ y 30.69 la RCS calculada mediante FMM se aproxima con mayor exactitud a la data reportada en [39] cuando el valor de $0,0 \leq \alpha \leq 0,4$. Ver Figura.4.60, Figura.4.61 y Figura.4.62.

4.1.8.2. Validación de Resultados para la EMCC Doble Oliva. Experimento N°3.

para corroborar estos resultados se ha realizado el calculo de la RCS Monoestática a la frecuencia de 1.18MHz y se a comparado utilizando la que se obtiene el Software CST.

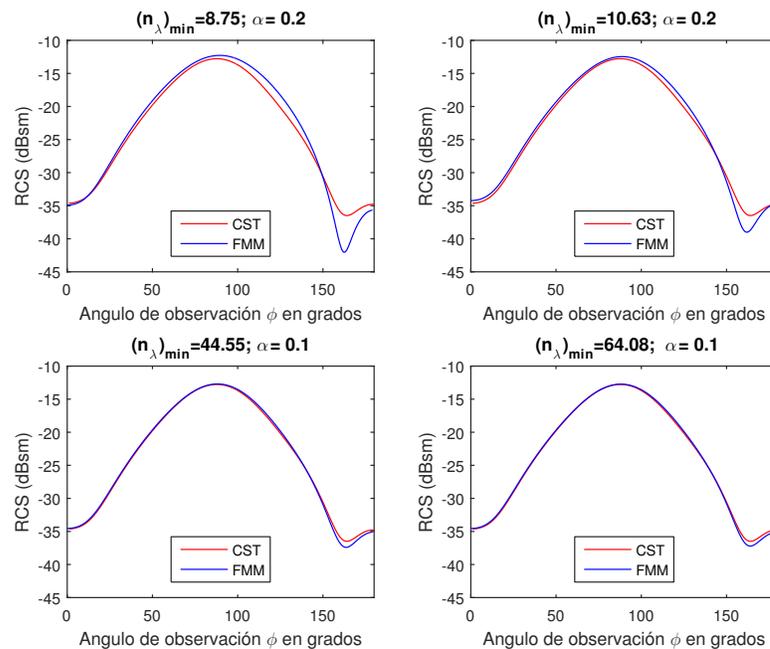


Figura 4.63: Comparación de RCS Polarización Horizontal de la EMCC Doble Ojiva a 1.18GHz en función de la densidad de discretización.

4.1 Resultados

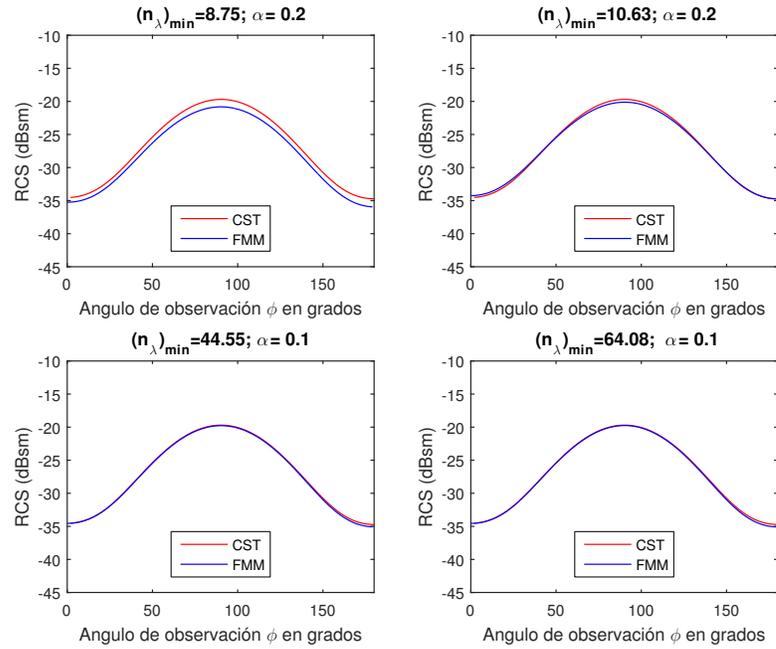


Figura 4.64: Comparación de RCS Polarización Vertical de la EMCC Doble Ojiva a 1.18GHz en función de la densidad de discretización.

4.1.8.3. Validación de Resultados para la EMCC Cono Esfera. Experimento N°3.

Para validar los resultados obtenidos en el experimento N°3 se obtuvo la RCS del cono esfera a 869MHz y se comparó sus resultados con los obtenidos con la data reportada en [39] y con el Software CST. A continuación se presenta los resultados del cálculo de RCS en función de $(n_\lambda)_{\min}$ para valores del coeficiente de ponderación α de la CFIE desde 0.0 hasta 0.4.

4.1 Resultados

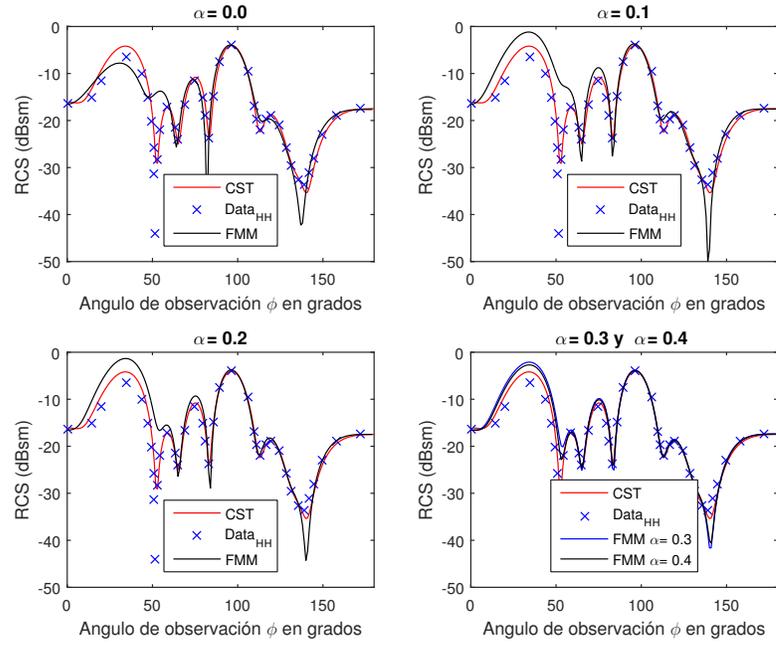


Figura 4.65: RCS monoestática polarización horizontal (HP) de la EMCC Cono-Esfera a 869MHz para $(n_\lambda)_{\min} = 9.936$

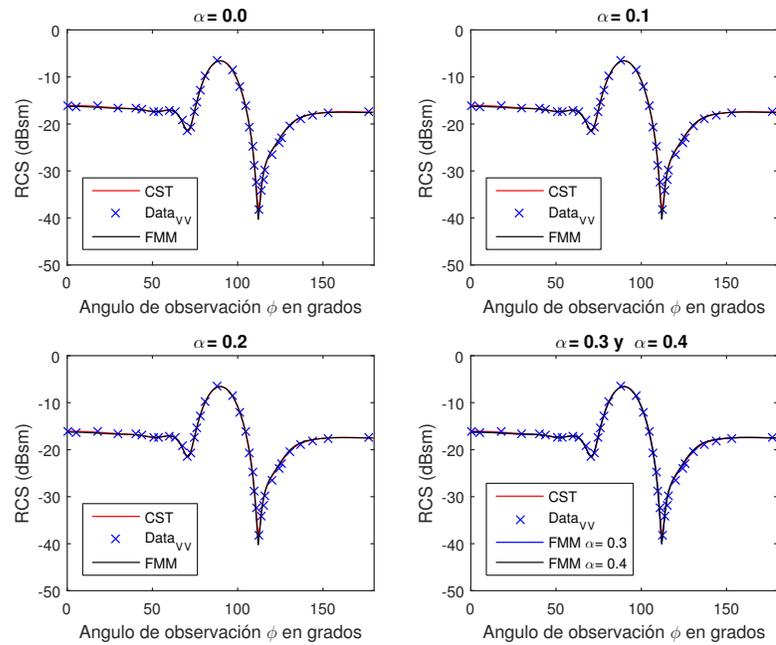


Figura 4.68: RCS monoestática polarización vertical (VP) de la EMCC Cono-Esfera a 869MHz para $(n_\lambda)_{\min} = 16,16$

4.1 Resultados

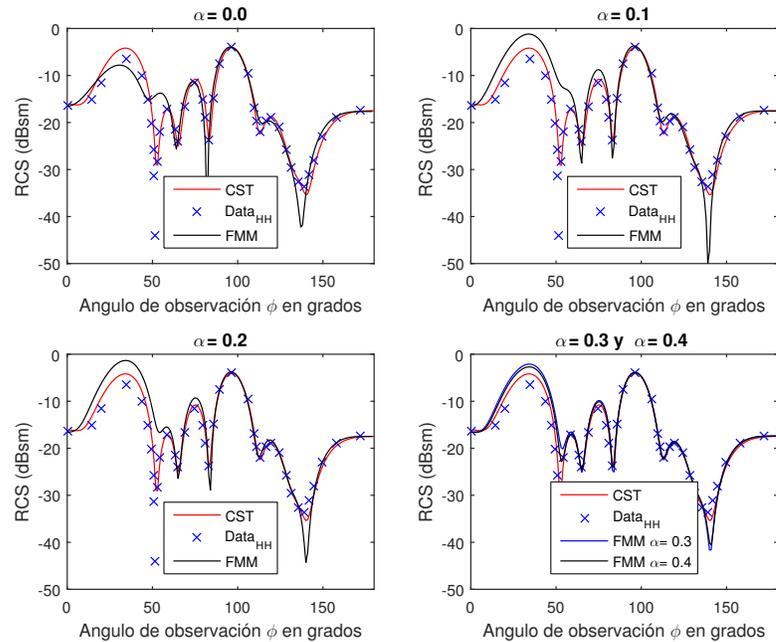


Figura 4.66: RCS monoestática polarización horizontal (HP) de la EMCC Cono-Esfera a 869MHz $(n_\lambda)_{\min} = 16.16$

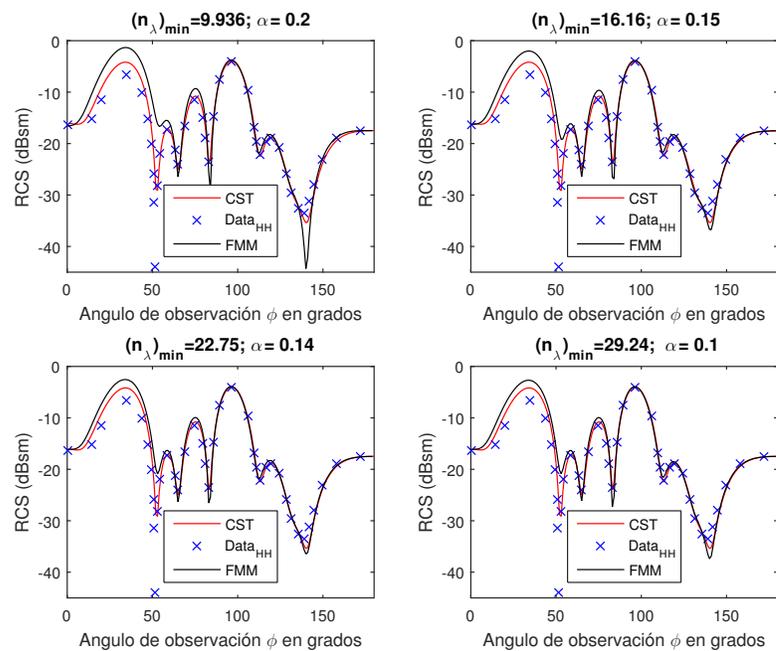


Figura 4.69: RCS monoestática polarización horizontal (HP) de la EMCC Cono-Esfera a 869MHz en los valores de α para mínimo número de condición

4.1 Resultados

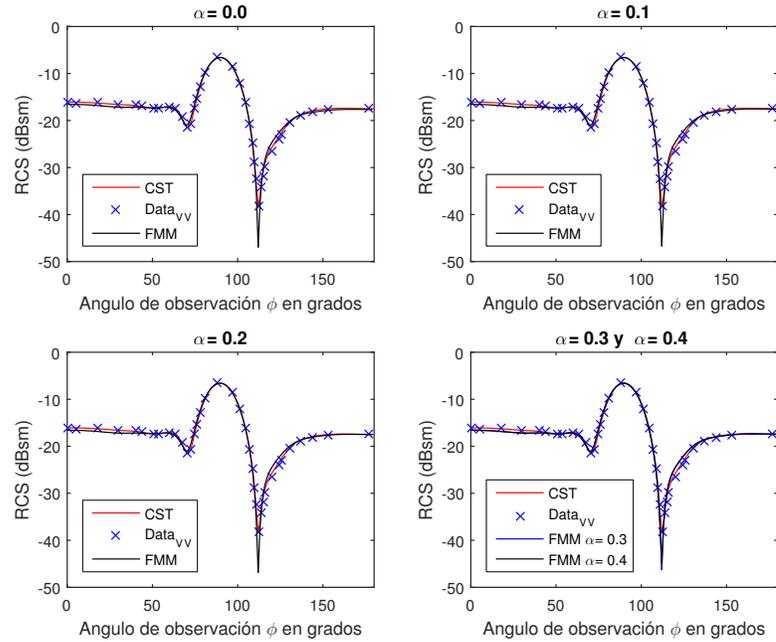


Figura 4.67: RCS monoestática polarización vertical (VP) de la EMCC Cono-Esfera a 869MHz en función de la Densidad de Discretización $(n_\lambda)_{\min} = 16,16$

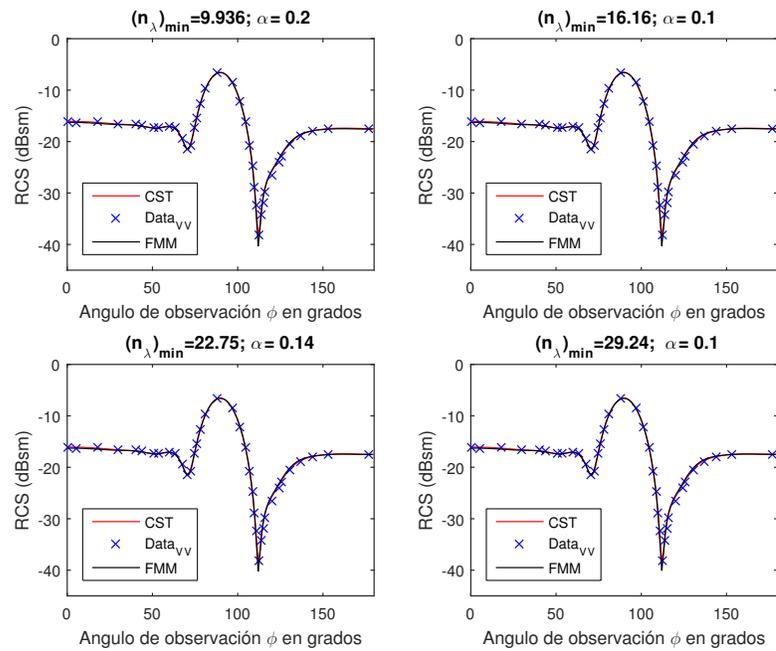


Figura 4.70: RCS monoestática polarización vertical del EMCC Cono-Esfera a 869MHz en los valores de α para mínimo número de condición.

5 Conclusiones y recomendaciones.

5.1. Conclusiones

De la investigación realizada se desprenden las siguientes conclusiones:

- Se comprobó que la utilización de los algoritmos utilizados para determinar la matrices Z_{cercana} y Z_{lejana} de la ecuaciones integrales EFIE, MFIE y CFIE utilizando el método de los momentos y el método de los multipolos rápidos fueron las correctas ya que los resultados obtenidos del cálculo de la RCS de los dispersores utilizados, entre ellos, la EMCC Almendra de la Nasa, la EMCC Doble Ojiva y la EMCC Cono-Esfera coinciden con las RCS reportadas en por Woo [39], como también con los obtenidos con software CST Suite Studio.
- La evaluación de la matriz total de la ecuación CFIE (Z_{total}) mediante la determinación de su espectro de autovalores, revela que posee un número de condición semejante al de la matriz Z_{cercana} para los dispersores estudiados EMCC Almendra de la Nasa a 1.19GHz y el EMCC Cono-Esfera a 869GHz, donde se estimo que la variación del número de condición en función del coeficiente de ponderación de la CFIE es la misma para ambas matrices a medida que el lado cubo W se hace cada vez más pequeño. Se demostró utilizando los autovalores de las matrices Z_{total} y Z_{cercana} de las ecuaciones EFIE, MFIE y CFIE que los espectros son semejantes y están dominados por los elementos $Z_{n,n}$ de la diagonal principal.
- La determinación del espectro de autovalores de la matriz Z_{cercana} y Z_{total} de la CFIE para valores del coeficiente de ponderación en el rango $0 < \alpha < 1$ en pasos discretos de variación de 0.1, demostró que existe un valor de éste parámetro donde el número de condición de la matrices evaluadas alcanza un valor mínimo. El espectro de autovalores encontrado para el coeficiente de ponderación α que hace mínimo el número de condición, posee un autovalor de menor magnitud (autovalor mínimo) que es de mayor magnitud que los autovalores mínimos de las matrices de la EFIE y MFIE.
- Se demostró en los experimentos N°2 y N°3 realizados que el espectro de autovalores y el número de condición de la matriz de la ecuación integral CFIE depende de la frecuencia y del tamaño de los triángulos utilizados para mallar el dispersor. Se demostró que la inclusión del efecto de ambos parámetros (frecuencia y tamaño) en la evaluación de la matriz, puede ser descrita en función del concepto de densidad de discretización, de tal forma, que la variación de la frecuencia en

el espectro de autovalores en función de la densidad de discretización se logra dejando constante la longitud promedio de las orillas de los triángulos y se hace variar la frecuencia, y el efecto que tiene la variación del tamaño de los triángulos a una frecuencia específica se logra variando la longitud promedio o mínima de los bordes de los triángulos y se deja constante la frecuencia de estudio.

- De acuerdo a lo anterior se demostró en los experimentos N°2 y N°3, que a medida que la densidad de discretización mínima del objeto dispersor aumenta de 6.48 a 64.08 el valor del coeficiente de ponderación que hace mínimo el número de condición no toma un valor constante, de tal forma que para densidades de discretización en el rango de 6.48 a 10.80 el valor del coeficiente de ponderación α de la CFIE que hace que el número de condición sea mínimo toma valores entre 0.3 y 0.2 en la mayoría de los casos y que para densidades de discretización mayores de 10.80 el coeficiente de ponderación que hace que el número de condición sea mínimo empieza a tomar valores menores de 0.2 con una tendencia a valer 0.1 para densidades de discretización mayores a 14.60. Por lo tanto, un valor del coeficiente de ponderación α óptimo que permita obtener el menor de número de condición de la matriz del sistema CFIE dependerá de la densidad de discretización del elemento dispersor.

5.2. Recomendaciones.

- Se recomienda que al momento de usar una densidad de discretización para caracterizar propiedades de la matriz de la CFIE, se utilice como base de cálculo de ésta densidad, la longitud mínima de las orillas de los triángulos utilizados para mallar el objeto dispersor, debido a que permite garantizar en un mallado no uniforme se cumpla el criterio de muestreo mínimo en todas las direcciones específicas del espacio. Esto garantizará un menor error tanto en la determinación de las corrientes inducidas sobre el dispersor como los valores que pueda tomar su RCS.
- Se recomienda realizar el estudio de los valores que puede tomar el coeficiente de ponderación α de la CFIE, que hacen mínimo el número de condición, en variaciones del coeficiente de ponderación en pasos menores a 0.1, tanto en los dispersores utilizados en esta investigación como en otros más, en función de la densidad de discretización, para establecer un rango más selectivo de valores que pueda tomar tal coeficiente para los valores mínimos del número de condición.
- Se recomienda la aplicación de esta investigación para determinar la evaluación de la matriz CFIE utilizando método de los momentos y el método de los multipolos rápidos multinivel para dispersores dieléctricos, y así determinar el valor del coeficiente de ponderación que permita obtener el menor número de condición en función de la frecuencia y propiedades geométricas del tipo de mallado para éste tipo de dispersores.

Bibliografía

- [1] I. Stegun M. Abramowitz. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publications, 1972.
- [2] Edward Anderson, Zhaojun Bai, Christian Bischof, L Susan Blackford, James Demmel, Jack Dongarra, Jeremy Du Croz, Anne Greenbaum, Sven Hammarling, Alan McKenney, et al. *LAPACK Users' guide*. SIAM, 1999.
- [3] Weber Arfken. *Harris, Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, sixth edition, 2005.
- [4] Gilbert Blanco and Jorge Parra. *Integración de una interfaz tipo cad de libre distribución en la estimación de la sección recta de radar de objetos tridimensionales usando métodos computacionales*. Universidad de Carabobo, Trabajo Especial de Grado. Octubre 2008.
- [5] Gisela K. Carvajal, David J. Duque, and Alfonso J. Zozaya. *Dispersión electro-magnética de objetos conductores de forma arbitraria: Solucion el dominio de la frecuencia y estimacion de la seccion transversal de radar*. 2008.
- [6] G.K. Carvajal, D.J. Duque, and A.J. Zozaya. *Rcs estimation of 3d metallic targets using the moment method and rao-wilton-glisson basis functions*. *ACES Journal-Applied Computational Electromagnetics Society*, 24(5):487, 2009.
- [7] Weng Cho Chew, Eric Michielssen, J.M. Song, and Jian-Ming Jin. *Fast and efficient algorithms in computational electromagnetics*. Artech House, Inc., 2001.
- [8] Ronald Coifman, Vladimir Rokhlin, and Stephen Wandzura. *The fast multipole method for the wave equation: A pedestrian prescription*. *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, 35(3):7–12, 1993.
- [9] Germund Dahlquist and Ake Bjorck. *Numerical Methods in Scientific Computing: Volume 1*, volume 103. Siam, 2008.
- [10] Qi I Dai, Qin S Liu, Hui Gan, and Weng Cho Chew. *Combined field integral equation based theory of characteristic mode*. *arXiv preprint arXiv:1503.01449*, 2015.
- [11] D. A. Dunavant. *High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle*. *International journal for numerical methods in engineering*, 21(6):1129–1148, 1985.

- [12] David Duque and Gisela Carvajal. *Estimación de la sección recta de RADAR de objetos tridimensionales usando el Método de los Momentos con funciones bases de Rao-Wilton-Glisson*. Universidad de Carabobo, Trabajo Especial de Grado. 2005.
- [13] David J. Duque. *Green's Function Diakoptics: A 2-D/3-D Hybrid Approach to Photonic Crystal Modelling*. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2013.
- [14] Özgür Ergül and Levent Gürel. Improving the accuracy of the magnetic field integral equation with the linear-linear basis functions. *Radio Science*, 41(4), 2006.
- [15] José Estrada and Francisco Garcia. *Incorporación de la factorización de la función de Green propia del método multipolar rápido en el llenado de la matriz del sistema en problemas de dispersión electromagnética, usando el método de los momentos*. Universidad de Carabobo, Trabajo Especial de Grado. 2012.
- [16] Ramesh Garg. *Analytical and computational methods in electromagnetics*. Artech house, 2008.
- [17] Walton C. Gibson. *The method of moments in electromagnetics*. CRC press, second edition, 2015.
- [18] Gene H Golub and John H Welsch. Calculation of gauss quadrature rules. *Mathematics of computation*, 23(106):221–230, 1969.
- [19] Leslie Greengard and Vladimir Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of computational physics*, 73(2):325–348, 1987.
- [20] Levent Gurel and Ozguer Ergul. Contamination of the accuracy of the combined-field integral equation with the discretization error of the magnetic-field integral equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 57(9):2650–2657, 2009.
- [21] R. F. Harrington. *Field computation by moment method*. New York: Macmillan, 1968.
- [22] A. Helaly and H. M. Fahmy. Combined-field integral equation. *Electronics Letters*, 29(19):1678–1679, 1993.
- [23] Richard E. Hodges and Yahya Rahmat-Samii. The evaluation of mfie integrals with the use of vector triangle basis functions. *Microwave and Optical Technology Letters*, 14(1):9–14, 1997.
- [24] Joseph R. Mautz and Roger F. Harrington. H-field, e-field, and combined field solutions for bodies of revolution. Technical report, DTIC Document, 1977.
- [25] E. K. Miller. A computational study of the effect of matrix size and type, condition number, coefficient accuracy and computation precision on matrix-solution accuracy. In *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1995. AP-S. Digest*, volume 2, pages 1020–1023. IEEE, 1995.

- [26] A. F. Peterson. Eigenvalue projection theory for linear operator equations of electromagnetics. Technical report, ILLINOIS UNIV AT URBANA COORDINATED SCIENCE LAB, 1987.
- [27] Jussi Rahola. On the eigenvalues of the volume integral operator of electromagnetic scattering. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(5):1740–1754, 2000.
- [28] Sadasiva M. Rao, Donald R. Wilton, and Allen W. Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 30(3):409–418, 1982.
- [29] Gabriel Santamaria and Luis Nuñez. *Implementación de un Software para la resolución de Problemas de dispersión Electromagnética con Objetos metálicos, aplicando el Método Multipolar Rápido Multinivel*. Universidad de Carabobo, Trabajo Especial de Grado, Junio 2014.
- [30] J.M. Song and Weng Cho Chew. Error analysis for the truncation of multipole expansion of vector green’s functions. In *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1999. IEEE*, volume 1, pages 628–631. IEEE, 1999.
- [31] JM Song, WW Shu, and WC Chew. Numerical resonances in method of moments. In *2007 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, pages 4861–4864. IEEE, 2007.
- [32] Gilbert Strang. *Introduction to linear algebra*, volume 3. Wellesley-Cambridge Press Wellesley, MA, 1993.
- [33] Julius Adams Stratton. *Electromagnetic theory*. John Wiley & Sons, 2007.
- [34] John Volakis. *Integral equation methods for electromagnetics*. The Institution of Engineering and Technology, 2012.
- [35] Karl F. Warnick. *Numerical analysis for electromagnetic integral equations*. Artech House, 2008.
- [36] Karl F. Warnick and Weng Cho Chew. On the spectrum of the electric field integral equation and the convergence of the moment method. *International Journal for numerical methods in engineering*, 51(1):31–56, 2001.
- [37] Donald R. Wilton, A.W. Glisson, D.H. Schaubert, O.M. Al-Bundak, and Chalmers M. Butler. Potentials integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 32(3):276–281, 1984.
- [38] Donald R. Wilton and J. E. Wheeler III. Comparison of convergence rates of the conjugate gradient method applied to various integral equation formulations. *Progress In Electromagnetics Research*, 5:131–158, 1991.

- [39] AC Woo. Benchmark radar targets for the validation of computational electromagnetics programs. *IEEE Antenna and Propagation Magazine*, 35(1):86, 1993.
- [40] Yong Jin Zhou, Xiao Yang Zhou, and Tie Jun Cui. A study on the choice of combination coefficient for combined field integral equation. In *Microwave, Antenna, Propagation and EMC Technologies for Wireless Communications, 2009 3rd IEEE International Symposium on*, pages 873–875. IEEE, 2009.
- [41] A.J. Zozaya and Del Pino P. A simple numerical experiment of green's function expansion in the fast multipole method. *Advanced Electromagnetics*, 6(4):58–62, 2017.
- [42] Alfonso Zozaya. Método de los momentos. Universidad de Carabobo. Facultad de Ingeniería, 2009.