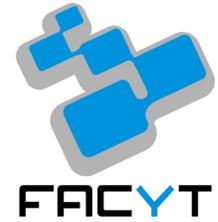




Universidad de Carabobo
Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología
Dirección de Postgrado
Maestría en Matemática Aplicada



Estudio y Simulación de la Ecuación de Calor Estocástica con Ruido Aditivo

Trabajo de Grado
para obtener el grado académico
Magíster Scientiarum en Matemática
(*Msc. Mat*)

Autor: Lic. Victor Guzmán
Tutor: Dr. Luis Rodríguez

22/02/2024



ACTA

Reunidos en la sede del Departamento de Matemáticas de la Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo, los miembros del Jurado designados por Consejo de Postgrado de la Facultad Experimental de Ciencias y Tecnologías (FACYT), en su reunión 01/2024 de fecha 02/02/2024 para evaluar el Trabajo de Grado titulado: **“ESTUDIO Y SIMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR ESTOCÁSTICA CON RUIDO ADITIVO”**, el cual fue presentado por el Licenciado Víctor Guzmán, C.I. V-21018878, a fines de cumplir con los requerimientos legales para optar al título de **MAGISTER EN MATEMÁTICAS APLICADAS**, dejamos constancia de lo siguiente: Una vez leído el Trabajo por cada uno de los miembros del jurado, se fijó el día **jueves 14 de marzo de 2024 a la 1:00 p.m.**, para la defensa pública del trabajo. Después de concluida ésta, el ponente respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado. Se pudo observar que el autor posee dominio del tema y realizó la exposición con claridad y precisión. Considerando, que dicho trabajo que presenta un aporte en el estudio de procesos estocásticos a tiempo continuo y que expone tres problemas que pueden ser de interés en próximos estudios: simulación de la ecuación del calor estocástica a partir de su estructura markoviana, la estimación de los parámetros de la ecuación y su aplicación a caracterizar perfiles de temperaturas en cuerpos de agua. Por todo lo anterior el Jurado deliberó y consideró **Aprobarlo**.

En Naguanagua, a los catorce días del mes de marzo del año dos mil veinticuatro.

Dra. Stella Brassesco
C.I. 81321188
Jurado

Luis A. Rodríguez

Dr. Luis Rodríguez
C.I. 11678882
Coordinador/Tutor



Dr. José Rafael León
C.I. 3846337
Jurado

Índice

1. Introducción	5
1.1. Ecuación de Difusión y su Relevancia	5
1.2. Objetivos de la investigación	5
1.2.1. Objetivo general	5
1.2.2. Objetivos Específicos	5
1.2.3. Modelado y simulación de los procesos de difusión en interacción con un sistema aleatorio	6
1.3. Metodología de trabajo	6
1.3.1. Actividades	7
2. La Ecuación de Calor Determinista	8
2.1. Problema Físico de la Ecuación de Calor	8
2.1.1. La Ecuación de Difusión	8
2.1.2. La Ecuación de Calor	8
2.1.3. Interpretación Física de la Ecuación	9
2.2. Soluciones y Representaciones de la ECD	10
2.2.1. Análisis Dimensional	10
2.2.2. Problema del valor inicial (Cauchy) en \mathbb{R}^n	11
2.2.3. La ECD en un intervalo de \mathbb{R} - Series de Fourier	13
2.3. Simulación de la EC-1D en Python	14
2.3.1. Solución numérica - Método de Euler Adelantado	14
2.3.2. Criterio de estabilidad	15
2.3.3. Implementación en Python y resultados	16
2.4. Primer Acercamiento al Caso Estocástico	18
2.4.1. Ecuación de Calor Estocástica - ¿Qué se necesita?	19
2.4.2. Definición de la covarianza	19
2.4.3. Regularidad y comportamiento asintótico	20
3. Procesos Estocásticos	21
3.1. Variables Aleatorias Gaussianas	21
3.2. Proceso de Wiener	22
3.2.1. Existencia de un proceso de Wiener	23
3.2.2. Construcción del proceso de Wiener en la semirecta	30
3.3. Ruido espacio-temporal	32
3.3.1. Movimiento Browniano	32
3.3.2. Hoja Browniana	32
3.3.3. Ruido blanco	33

3.3.4. Espacio de Wiener	36
4. Solución Numérica de la Ecuación de Calor Estocástica	38
4.1. Generación de un ruido blanco Gaussiano	38
4.2. Simulación de un Proceso de Wiener	40
4.3. Proceso de Q -Wiener	41
4.3.1. Representación en L^2 del Ruido Blanco	42
4.3.2. Representación en L^2 del Ruido Coloreado	43
4.3.3. Aproximación de Caminos Muestrales de un Proceso de Q -Wiener	49
4.4. Simulación de la Hoja Browniana	51
4.5. Ecuación de Calor Estocástica con Ruido Aditivo	52
4.5.1. Aproximación y Solución Numérica	56
4.5.2. Simulación en Python	58
4.6. Estimación Paramétrica para la Ecuación de Calor Estocástica	60
4.6.1. Problema Inverso en la Estimación Paramétrica	61
4.6.2. Estimación Paramétrica en Cuerpos de Agua	62
4.6.3. Estimación de la difusividad con MLE	63
Apéndice A. La Ecuación de Calor Determinista	65
A.1. Análisis Dimensional	65
A.1.1. Transformación	65
A.1.2. Solución de la ECD	66
A.2. Problema del Valor Inicial	67
A.2.1. Transformada de Fourier de la ECD	67
A.2.2. Transformada Inversa	69
A.2.3. Solución en el Plano Complejo	70
A.2.4. La Transformada y el Teorema de Convolución	74
A.3. Series de Fourier para la ECD	74
A.3.1. Ortogonalidad de la base	74
A.3.2. Reescribiendo la solución	75
Apéndice B. Procesos Estocásticos	77
B.1. Espacios de Medida	77
B.2. Proceso de Wiener	80
B.2.1. Prueba de la existencia del proceso de Wiener	81
B.2.2. Elementos Necesarios para la Construcción	85
B.2.3. La desigualdad de Hölder	85
Apéndice Bibliografía	85

Capítulo 1

Introducción

1.1. Ecuación de Difusión y su Relevancia

La ecuación de calor es un tipo de ecuación de difusión, esta ecuación puede ser usada para describir el cambio en la temperatura de un material dadas ciertas condiciones de contorno e iniciales, en esta ecuación pueden incluirse términos que representen fuentes o sumideros de energía. Bajo este enfoque la ecuación puede ser generalizada al caso estocástico introduciendo una fuente estocástica, básicamente un ruido que introduzca o extraiga energía del sistema de forma aleatoria.

Sea u la cantidad en estudio y f una fuente de calor o materia por ejemplo, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u(t, \mathbf{x}) + f,$$

donde D es el coeficiente de difusión, \mathbf{x} es la coordenada espacial, t es el tiempo y ∇^2 es el operador laplaciano. Esta ecuación será resuelta en el caso unidimensional con una fuente de calor estocástica y para ello será necesario profundizar en la definición de f .

La solución de la ecuación de calor estocástica puede ser estudiada analíticamente por medio de la integral de Walsh, por otro lado la simulación numérica de la misma se puede hacer utilizando el método de Euler-Maruyama adelantado. En este trabajo se conseguirá la solución débil de la ecuación de calor estocástica. Esta ecuación puede ser utilizada por ejemplo para modelar el comportamiento de térmico de un lago el cual obedece a grandes rasgos la ecuación de calor, pero que debido a efectos climáticos ha de presentar un comportamiento aleatorio.

En el presente trabajo se busca simular de manera numérica la ecuación de calor estocástica con ruido coloreado en el lenguaje de programación Python.

1.2. Objetivos de la investigación

1.2.1. Objetivo general

Simular numéricamente la ecuación de calor estocástica con ruido aditivo en Python.

1.2.2. Objetivos Específicos

1. Resolver la ecuación de calor determinística.

2. Estudiar los fundamentos de los procesos estocásticos.
3. Simular el ruido blanco en Python.
4. Estudiar la ecuación de calor estocástica con ruido aditivo.
5. Realizar una simulación numérica en Python de la ecuación de calor estocástica con ruido aditivo.

1.2.3. Modelado y simulación de los procesos de difusión en interacción con un sistema aleatorio

Los procesos de difusión aparecen de forma natural en diferentes ámbitos, por ejemplo en el proceso de extracción del petróleo pesado se suele mezclar el mismo con un solvente que disminuya su coeficiente de viscosidad y facilite su extracción. Considerando que la cantidad de solvente necesaria y la velocidad a la que se debe suministrar depende del coeficiente de viscosidad, tener estimaciones o medidas del coeficiente es útil para poder optimizar el proceso, sin embargo las medidas experimentales son difíciles de realizar, así que un modelo teórico del sistema puede contribuir en el proceso de extracción minimizando costos y el tiempo invertido.

Otro proceso de difusión que puede ser modelado es el proceso de la transferencia de calor, el mismo puede ser estudiado por medio de la ecuación de calor. El coeficiente que caracteriza a esta ecuación es conocido como el coeficiente de difusividad térmico, el mismo puede ser calculado en cualquier proceso de transferencia de calor, como lo es en el caso del calentamiento de un lago por ejemplo. Por otro lado existen generalizaciones de la ecuación de calor que permiten incluir otros fenómenos.

El modelo parabólico de Anderson es la ecuación de calor incorporando un potencial aleatorio, donde espacialmente el sistema se encuentra discretizado, esta situación es conveniente para el establecimiento del modelado numérico. Este modelo sirve para explicar procesos de transferencia de calor en los cuales el sistema esté de alguna manera interactuando con algún agente aleatorio.

Esta ecuación puede ser utilizada para modelar el comportamiento de un lago cuya temperatura puede fluctuar debido a diferentes factores, por ejemplo la presencia de nubes, disminuye el flujo de calor que recibe la superficie del lago disminuyendo así la temperatura en el mismo. Otro fenómeno que puede influir en la temperatura del lago es el viento, el transporte de aire a la zona inmediatamente superior al lago dificultará el establecimiento del equilibrio térmico y hará fluctuar la temperatura en la superficie.

1.3. Metodología de trabajo

Para el estudio la ecuación de calor estocástica con ruido aditivo, primero se buscará definir qué es ese ruido aditivo y por ello se comenzará estudiando sobre los procesos estocásticos, particularmente el proceso de Wiener, luego se definirá su extensión en el espacio tiempo como la hoja Browniana, para finalmente definir el ruido blanco y coloreado como la derivada de la hoja Browniana.

La resolución de las Ecuaciones diferenciales parciales numéricamente junto a sus criterios de estabilidad serán estudiados e implementados posteriormente en Python para la ecuación de Calor estocástica con ruido aditivo pequeño. El caso de nivel de ruido alto será estudiado numéricamente

y además será comparado el estado final del sistema en relación a su estado inicial. Se espera que el sistema diverga en concordancia con lo comentado por [Khoshnevisan, 2014], la introducción de ruido a una ecuación diferencial parcial puede llevar a cambios significativos del sistema que se estaba intentando estudiar.

1.3.1. Actividades

1. Revisión de los fundamentos de los procesos estocásticos y las variables aleatorias. [Durrett, 1996; Khoshnevisan, 2014].
2. Revisión de la ecuación de calor determinista [Agranovich, 1994; Evans, 1998].
3. Revisión de la formulación y solución de las ecuaciones diferenciales estocásticas ordinarias [Øksendal, 2010]
4. Estudio de las propiedades de las variables aleatorias Gaussianas[Prato, 2014].
5. Estudio del criterio de estabilidad para la solución numérica de la ecuación de calor determinista.
6. Simulación de la ecuación de calor determinista.
7. Simulación del ruido blanco en Python.
8. Simulación del ruido coloreado en Python [Gabriel J. Lord, 2014].
9. Estudio de la ecuación de calor estocástica.
10. Solución débil de la ecuación de calor estocástica con ruido aditivo [Gabriel J. Lord, 2014].
11. Simulación numérica de la ecuación de calor estocástica con ruido aditivo [Higham, 2001; Gabriel J. Lord, 2014].
12. Estudio del nivel de ruido y modelado numérico de la ecuación de calor estocástica [Khoshnevisan, 2014].

Capítulo 2

La Ecuación de Calor Determinista

2.1. Problema Físico de la Ecuación de Calor

La ecuación de calor es una ecuación diferencial parcial cuyo nombre se debe a que la misma puede ser usada para describir como ocurre la transferencia de energía en un sistema en forma de calor. En este capítulo se estudiará el origen físico de la misma, se conseguirá la solución usando distintos métodos y se hará un primer acercamiento al problema estocástico.

2.1.1. La Ecuación de Difusión

La ecuación de calor es un tipo de ecuación de difusión, la misma se puede usar para modelar muchas situaciones como la extracción de petróleo [Khalifi, 2021], el comportamiento térmico de la superficie de un lago [Vercauteren et al., 2011] o como una herramienta para la Resonancia Magnética Nuclear [Baliyan et al., 2016].

El caso particular en que el sistema no está en presencia de una fuente o sumidero se conoce como la ecuación de difusión homogénea:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \nabla^2 \phi(t, \mathbf{x})$$

2.1.2. La Ecuación de Calor

La ecuación de calor que en este trabajo será llamada la *Ecuación de Calor Determinista* (ECD) tiene la misma forma que la ecuación de difusión solo que en esta ecuación ϕ representa la temperatura y se suele escribir como u . Con esto en mente la ecuación de calor no homogénea sería

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u + f, \tag{2.1}$$

donde $u(t, \mathbf{x})$ representa la temperatura en el punto \mathbf{x} en el instante t y k es la difusividad térmica. Cuando f es igual a cero se le conoce como la ecuación de calor homogénea:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u, \tag{2.2}$$

con la finalidad de simplificar la notación, la ecuación 2.1 se suele escribir como:

$$u_t - \Delta u = f$$

donde $u_t = \partial_t u$ y $\Delta = \nabla^2$. Como u representa una temperatura o concentración química es definida positiva $u : [0, \infty) \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ y \bar{U} dependerá de las condiciones de contorno e iniciales asociadas al problema particular en estudio.

2.1.3. Interpretación Física de la Ecuación

Esta ecuación se suele deducir por medio de un teorema de conservación, en el caso de la ecuación de calor es la conservación de la energía térmica y en el caso del proceso de difusión asociado algún químico es la conservación de la materia. La idea consiste en calcular la tasa a la que cambia la energía en una región \mathcal{V} y asociarla al calor que entre o salga por sus fronteras. Matemáticamente esto sería:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} c\rho u dx = - \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.3)$$

donde \mathbf{F} representa el flujo y el signo menos se usa para indicar que si \mathbf{F} es paralelo a $-d\mathbf{S}$ entonces está entrando energía o materia al sistema y aumenta la cantidad u en el tiempo, además dx representa el diferencial de volumen en el espacio n -dimensional. Además c representa el calor específico y ρ la densidad de masa volumétrica. En el caso en el que existan fuentes o sumideros de energía Q , es decir un fenómeno externo al sistema que introduzca o extraiga energía del mismo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} c\rho u dx = - \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\mathcal{V}} Q dx \quad (\text{Ec. de Continuidad})$$

Usando el teorema de la divergencia Gauss:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} c\rho u dx = \int_{\mathcal{V}} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot F dx + \int_{\mathcal{V}} Q dx$$

y reescribiendo:

$$\int_{\mathcal{V}} \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot F + Q \right) dx = 0$$

Por cuestiones de simplicidad se asumió que $c\rho$ no dependen del tiempo, en caso de que estas propiedades cambien con el tiempo quedan un términos adicionales que tendrían que ser considerados. Por otro lado el flujo puede ser reescrito por medio del gradiente de u usando la ley de Fourier:

$$\mathbf{F} = -K_0 \nabla u, \quad (K_0 > 0) \quad (2.4)$$

donde el signo $-$ indica que la energía pasa de la región caliente a la fría (buscando el equilibrio térmico) y en el caso de la concentración química que las regiones de mayor concentración se moverán hacia las regiones de menor concentración (en dirección contraria del gradiente) buscando homogeneizar la concentración de gradiente en el medio. Usando la expresión de arriba y reescribiendo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla \cdot \nabla u + f = k \nabla^2 u + f, \quad k = \frac{K_0}{c\rho}, \quad f = \frac{Q}{c\rho} \quad (2.5)$$

donde k es la difusividad térmica¹ y tiene unidades de m^2/s . Esta ecuación suele ser escrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = \Delta u + f' \implies u_{t'} = \Delta u + f', \quad t' = kt, \quad f' = \frac{f}{k} \quad (2.6)$$

¹En el caso de la Ecuación de Calor

al escribir la ecuación de esta manera nótese que t' tendría unidades de:

$$t' = kt \quad \implies \quad [t'] = [k][t] = \frac{m^2}{s} \cdot s = m^2,$$

es decir que t' tendría unidades de m^2 . En la sección siguiente se usará esta notación y se especificará en caso de ser necesario.

2.2. Soluciones y Representaciones de la ECD

En el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), cada método que nos permite conseguir soluciones específicas tiene consigo perspectivas que contribuyen en la interpretación de la ecuación. Para iniciar el estudio de la Ecuación de Calor Determinista (ECD) se comenzará usando el método del análisis dimensional, luego se usará la transformada de Fourier y como última aproximación se usarán las series Fourier.

2.2.1. Análisis Dimensional

Una manera de resolver la ECD es haciendo un análisis dimensional de la misma. La idea consiste en realizar una dilatación de las variables (acá del espacio y el tiempo) y buscar que relación han de tener esas dilataciones para que la ECD sea invariante.

Comencemos notando que 2.2 tiene 2 derivadas espaciales y una temporal, por la forma de esta ecuación sabemos que si $u(t, x)$ es solución, entonces $u(\lambda^2 t, \lambda x)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ también ha de ser una solución ver A.1.1.

Para este análisis en particular se hará el cambio $t' = kt$, básicamente se medirá el tiempo en metros cuadrados. El escalamiento obtenido indica que el cociente $|x|^2/kt$ es relevante, en el análisis de la ecuación de calor, esto se hará evidente más adelante analizando la convergencia de la solución usando el método de Euler.

Esperamos que la solución tenga la forma²

$$u(t, x) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^n), \quad (2.7)$$

donde v es alguna función desconocida, busquemos entonces una solución en la forma:

$$u(t, x) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^n), \quad (2.8)$$

donde α y β se encontrarán luego. La solución ha de ser invariante bajo un escalamiento de dilatación. El procedimiento se desarrolla con detenimiento en A.1.2 obteniendo:

$$u(t, x) = \frac{b}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4kt}} \quad (2.9)$$

El valor de b puede obtenerse considerando que $\int_{\mathbb{R}^n} u dx = 1$. Esta solución que hemos encontrado es conocida como la solución fundamental de la ecuación de calor, tomando a la solución como cero para $t < 0$.

²En el resto de la sección se omitirá el $'$ en t' al escribir a t .

2.2.2. Problema del valor inicial (Cauchy) en \mathbb{R}^n

El análisis dimensional de la sección anterior nos da una idea de la solución a la ECD y además introduce la idea del cociente $|x|^2/kt$ y su relación con la solución. En esta sección se abordará el tema de las condiciones iniciales CI y como se relacionan con la solución. Específicamente acá se aborda el problema del valor inicial (o de Cauchy):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u & \text{en } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(t, x) = g(x) & \text{en } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.10)$$

Puede ser resuelto bajo ciertas hipótesis sobre g usando la transformada de Fourier. Definiremos la transformada de Fourier espacial $F(\bar{x}, t)$ de $f(x, t)$ como:

$$\mathcal{F}\{f\} = F(t, \bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) e^{i\bar{x}\cdot x} dx \quad (2.11)$$

Entonces se puede ver que la transformada de Fourier de la ecuación de calor junto al problema del valor inicial es:

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \mathcal{F}\{k\nabla^2 u\} & \text{en } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ \mathcal{F}\{u(t, x)\} = \mathcal{F}\{g(x)\} & \text{en } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.12)$$

donde se definirá:

$$\mathcal{F}\{u(t, x)\} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) e^{i\bar{x}\cdot x} dx = U(t, \bar{x}) \quad (2.13)$$

En el apéndice A.2.1 se realiza la transformación de esta EDP, obteniendo así la solución en términos de la transformada $U(\bar{x}, t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -k\bar{x}^2 U \implies U(\bar{x}, t) = c(\bar{x}) e^{-k\bar{x}^2 t}. \quad (2.14)$$

y por medio de la transformada de Fourier de la condición inicial A.13 entonces:

$$U(\bar{x}, t) = G(\bar{x}) e^{-k\bar{x}^2 t} \quad (2.15)$$

Esta ecuación se puede resolver pensando en $e^{-k\bar{x}^2 t}$ como la transformada de Fourier de una función $h(t, x)$ y utilizando el teorema de convolución para hallar la inversa de $U(t, \bar{x})$ que es la temperatura u . El procedimiento de hallar la inversa de $e^{-k\bar{x}^2 t}$ requiere del uso de la delta de Dirac y se detalla en el apéndice. De allí se puede ver que la inversa de $H(t, \bar{x}) = e^{-k\bar{x}^2 t}$ sería:

$$h(t, x) = e^{-\frac{x^2}{4kt}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \exp \left[-kt \left(\bar{x}_l^2 + i \frac{x_l}{2kt} \right)^2 \right] d\bar{x}_l \right\}^n$$

Esta última expresión se puede reescribir usando el valor principal de Cauchy (el libro [Ruel, 2009] cubre éstos así como múltiples teoremas que se usarán más adelante), para escribir esa integral en \mathbb{R} como un límite:

$$h(t, x) = e^{-\frac{x^2}{4kt}} \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \exp \left[-kt \left(\bar{x}_l^2 + i \frac{x_l}{2kt} \right)^2 \right] d\bar{x}_l \right\}^n,$$

En el apéndice A.2.3 se desarrolla esta integral con lo que se obtiene:

$$h(t, x) = \left(\frac{\pi}{kt}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \quad (2.16)$$

Es decir que ya conocemos las funciones no-transformadas tales que:

$$U(t, \bar{x}) = G(\bar{x})H(t, \bar{x}) \quad (2.17)$$

Ahora vamos a conseguir la transformada inversa de una función ($U(t, \bar{x})$) que es el producto de dos transformadas ($G(\bar{x})$ y $H(t, \bar{x})$). Para reescribir a $u(t, x)$ se usa el teorema de convolución, ver A.2.4:

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x') \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4kt}\right] dx' \quad (2.18)$$

donde ha aparecido lo que en algunos textos es llamada la función de influencia o solución fundamental de la ecuación de calor:

$$\Gamma(t, x, 0, x') = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4kt}\right] \quad (2.19)$$

puede probarse por ejemplo que $\Gamma(t, x, 0, x') = \Gamma(t, x - x', 0, 0)$. Además la misma está definida para $t > 0$, que era una condición para la convergencia a cero de la expresión que se puede ver en el apéndice A.22. Se puede probar sin ningún problema que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - x', t, 0, 0) d(x - x') = 1 \quad (2.20)$$

además se puede verificar con la condición inicial que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = g(x) \implies \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} g(x') \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4kt}\right] dx' = g(x)$$

ésto es cierto si:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4kt}\right] = \delta(x - x') \quad (2.21)$$

ya que la delta de Dirac tiene la propiedad buscada como se mostró anteriormente en A.15, lo que muestra el caracter *irregular* de la solución en $t = 0$, es decir que el proceso comienza como un pulso en el espacio. Por consiguiente podemos ver que:

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x') \Phi(t, x - x') dx' \quad (2.22)$$

que la solución a la ecuación de calor es la convolución del valor inicial de la función $u(0, x)$ con la solución fundamental de la ecuación de calor trasladada.

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}, & (t > 0, x \in \mathbb{R}^n) \\ \delta(x), & (t = 0, x \in \mathbb{R}^n) \\ 0, & (t < 0, x \in \mathbb{R}^n) \end{cases} \quad (2.23)$$

Se puede mostrar así como se hace en [Lawrence, 1997] que el problema de la ecuación de calor puede ser planteado en términos de la solución fundamental de la ecuación de calor $\Phi(x, t)$ únicamente.

2.2.3. La ECD en un intervalo de \mathbb{R} - Series de Fourier

La ECD se puede resolver en el caso de volumen finito por medio de series de Fourier. Esta idea es presentada porque algunas de estas herramientas como la representación de la solución como una serie en términos de alguna base en particular de igual manera se rescata en el caso estocástico. En este enfoque adicionalmente se verificará que la solución planteada como serie es la única solución a 2.24. Para abordar este enfoque a la ECD podemos plantearla de la siguiente manera con las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \text{EC: } & u_t = u_{xx} && \text{en } (0, \infty) \times [0, 1], \text{ sujeto a} \\ \text{CI: } & u(0, x) = u_0(x) && \text{en } [0, 1], \text{ y} \\ \text{CC: } & u(t, 0) = u(t, 1) = 0 && \forall t > 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde $u_0 \in L^2[0, 1]$ está ya definido. Podemos resolver esta ecuación considerando la condición de contorno de $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$. Usando series de Fourier. Primero hacemos que

$$\psi_n(x) = A \sin(n\pi x) \quad x \in [0, 1], \quad n \geq 1. \quad (2.25)$$

Entonces, escribamos cualquier solución de $L^2[0, 1]$ en series de Fourier como:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \psi_n(x) \quad (2.26)$$

donde por medio de la ortogonalidad de la base escogida $\{\psi_n(x)\}$, podemos llegar a A.3.1

$$u_n(t) = \int_0^1 u(t, x) \psi_n(x) dx \quad (2.27)$$

finalmente incorporando la notación:

$$u_n(t) = (u(t), \psi_n) := \int_0^1 u(t, x) \psi_n(x) dx \quad (2.28)$$

del producto interno, que será útil más adelante para conseguir la solución de la Ecuación de Calor Estocásticas (ECE). Ésta notación es interesante ya que nos permite estudiar la evolución de u por medio del producto interno definido, veáse que

$$\dot{u}_n(t) = \langle \dot{u}(t), \psi_n \rangle = \langle u''(t), \psi_n \rangle \quad (2.29)$$

usando esta idea se puede reescribir la solución como:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_0, \psi_n \rangle e^{-n^2 \pi^2 t} \psi_n(x) \quad \in L^2[0, 1] \quad (2.30)$$

Esta expresión es útil y escribiremos una expresión similar más adelante al estudiar la ECE. De momento consideremos que [Khoshnevisan, 2016]:

Teorema 2.2.1 (Unicidad). *Si $u_0 \in L^2[0, 1]$, entonces A.34 es la única solución a 2.24 en $L^2[0, 1]$.*

De acá sale algo interesante. Definamos:

$$p_t(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\psi_n(y)e^{-n^2\pi^2 t} \quad (\text{kernel de calor}) \quad (2.31)$$

para todo $t > 0$ y $x, y \in [0, 1]$. Entonces, para todo $y \in [0, 1]$ fijo, $u(x, t) := p_t(x, y)$ resuelve débilmente la ecuación 2.24 dado un pulso $u_0 = \delta_x$. Por lo tanto $p_{x,y} > 0 \forall t > 0, (x, y) \in (0, 1)^2$, por el principio del máximo. Entonces definiendo:

$$(P_t\varphi)(x) := \int_0^1 p_t(x, y)\varphi(y)dy \quad \forall t > 0 \text{ y } x, y \in [0, 1] \quad (2.32)$$

donde $P_0\varphi := \varphi$ representa la identidad. Esta idea de semigrupos para la representación de la solución será retomada más adelante en el estudio de la Ecuación de Calor Estocástica (ECE). De momento, podemos ver que:

$$(P_t\varphi)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, \psi_n \rangle e^{-n^2\pi^2 t} \psi_n(x) \quad (2.33)$$

esta expresión tiene la misma forma de A.34, así que gracias a esta ecuación y definiendo $u(x, t) := (P_t u_0)(x)$ podemos concluir que esta es la única solución a 2.24.

2.3. Simulación de la EC-1D en Python

Como un primer acercamiento al modelado de la ecuación de calor (EC), se modelará la misma en Python. Para ello primero se encontrará la solución numérica, luego se analizará el criterio de estabilidad para la solución y más adelante se hará una simulación en el caso en que no hay fuentes $Q = 0$:

2.3.1. Solución numérica - Método de Euler Adelantado

La Ecuación de Calor 1D no homogénea con fuente de calor $Q(t, x)$ puede ser modelada en Python usando el método de Euler adelantado [Hans Petter Langtangen, 2017]. Este método es uno de los más sencillos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden aunque puede tener problemas de inestabilidad para ciertos tipos de ecuaciones. Con la finalidad de asegurar la estabilidad del método más adelante se estudiará el criterio de estabilidad para la ecuación de calor.

El primer paso consiste en construir una cuadrícula espacio temporal donde ocurre el fenómeno:

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, \dots, N_x \quad (2.34a)$$

$$t_j = j\Delta t, \quad j = 0, \dots, N_t \quad (2.34b)$$

Se espera que la ecuación de calor en una dimensión:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + Q(t, x), \quad (2.35)$$

se cumpla en en estos puntos de la rejilla definidos, es decir que:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t_i, x_j) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t_i, x_j) + Q(t_i, x_j), \quad (2.36)$$

El siguiente paso consiste en reemplazar las derivadas usando el método de las diferencias finitas. Se puede escribir la ecuación de arriba como:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = k \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + Q(t_n, x_j) \quad (2.37)$$

es decir que:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + F(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + Q(t_n, x_j)\Delta t, \quad (2.38)$$

donde se introdujo el número/módulo de Fourier:

$$F = k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad (2.39)$$

F es un número adimensional que es importante para asegurar la estabilidad del método. En la siguiente sección se estudiará esto.

2.3.2. Criterio de estabilidad

Con la finalidad de estudiar la estabilidad de la solución, consideremos primero como se vió anteriormente que la solución puede ser expresada como una serie de Fourier, básicamente por medio de una superposición de ondas planas. Una vez se ha discretizado el problema (q identificando el lugar en la rejilla):

$$u_q^n = e^{-k\alpha^2 nt} e^{i\alpha q \Delta x} = A^n e^{i\alpha x} \quad (2.40)$$

Como $|A|$ representa la amplitud de estas ondas, la estabilidad dependerá de que $|A| < 1$ [Hans Petter Langtangen, 2017], con ello aseguramos que la suma de amplitudes no diverja. Por lo tanto:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx e^{i\alpha q \Delta x} \left(\frac{A^{n+1} - A^n}{\Delta t} \right) = e^{i\alpha x} A^n \left(\frac{A - 1}{\Delta t} \right),$$

por otro lado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx A^n \left(\frac{e^{i\alpha q \Delta x + i\alpha \Delta x} - 2e^{i\alpha q \Delta x} + e^{i\alpha q \Delta x - i\alpha \Delta x}}{\Delta^2} \right) \\ &= \frac{A^n e^{i\alpha q \Delta x}}{\Delta x^2} (e^{i\alpha \Delta x} - 2 + e^{-i\alpha \Delta x}) = \frac{A^n e^{i\alpha q \Delta x}}{\Delta x^2} (2 \cos(\alpha \Delta x) - 2) \\ &= -2 \frac{A^n e^{i\alpha q \Delta x}}{\Delta x^2} (1 - \cos(\alpha \Delta x)) = -4 \frac{A^n e^{i\alpha x}}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\alpha \Delta x}{2} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha x} A^n \left(\frac{A - 1}{\Delta t} \right) &= k \left[-4 \frac{A^n e^{i\alpha x}}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\alpha \Delta x}{2} \right) \right] \\ \frac{A - 1}{\Delta t} &= -\frac{4k}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\alpha \Delta x}{2} \right), \end{aligned}$$

despejando a A :

$$A = 1 - 4 \frac{k \Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\alpha \Delta x}{2} \right) \implies A = 1 - 4F \sin^2 p \quad (2.41)$$

donde F es el número de Fourier que había aparecido previamente y $p = k\Delta x/2$. Hay varias cosas que señalar en esta expresión de arriba. Primero, la solución numérica sería de la forma:

$$u_q^n = (1 - 4F \sin^2 p)^n e^{ikq\Delta x}, \quad (2.42)$$

la condición de estabilidad como lo habíamos comentado era $|A| \leq 1$ entonces:

$$4F \sin^2(p/2) \leq 2$$

el valor mas grande que puede tomar el seno es $\sin^2(p/2) = 1$, entonces un criterio de estabilidad suficiente sería:

$$4F \leq 2 \quad \implies \quad F \leq \frac{1}{2}, \quad (2.43)$$

o escrito en términos de los parámetros físicos:

$$\frac{k\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (2.44)$$

Esta consideración ha de ser implementada al código de manera que arroje un error en caso de que los valores escogidos para k , Δx y Δt arrojen un F mayor a $1/2$.

2.3.3. Implementación en Python y resultados

El código puede ser implementado en python usando la librería NumPy para la manipulación de vectores, matrices y cálculo numérico, junto a las librerías Matplotlib.pyplot y Seaborn para la representación gráfica de la solución y Pandas para representar la información como un dataframe. El código utilizado para conseguir la solución a la ecuación 2.35 fue:

```

1  # Solución de la ecuación de calor en 1D por el método de Euler
2  # Importando librerías
3  import pandas as pd           # Manipulación de dataframes
4  import matplotlib.pyplot as plt # Visualización básica
5  import seaborn as sns       # Visualizaciones con dataframes
6  import numpy as np
7
8
9  # Graficando algunos elementos
10 sns.set_theme() # Fijando el tema estándar de Seaborn
11
12 # Estableciendo las constantes
13 media = 0
14 desviacion = 1
15
16 # Definición de constantes
17 k = 0.5 # Conductividad térmica
18
19 # Creando rejilla espacio-temporal
20 x_0, x_f, delta_x = 0, 1, 0.01 # Estableciendo la rejilla en x
21 x = np.arange(x_0, x_f, delta_x) # Discretización de la región [x_{0}, x_{f}]

```

```

22
23 t_0, t_f, delta_t = 0, 0.2, 0.00005      # Estableciendo el intervalo temporal
24 t = np.arange(t_0, t_f, delta_t)         # Discretización temporal de [t_{0}, t_{f}]
25
26
27 # Condiciones de contorno e inicial
28 u_x_0 = [np.sin(np.pi*x) for x in x]     #Temperatura inicial (distribución de la temperatura
    ↪ en t=t_{0})
29 u_0_t = 0      # Condición de contorno I
30 u_f_t = 0      # Condición de contorno II
31
32 # Solución de la ecuación de Calor
33
34 def EC_Calor(x, t, u_x_0, u_0_t, u_f_t, k):
35
36     # Creación de rejilla discreta en el espacio tiempo
37     n_x = len(x)      # Número de intervalos de posición
38     n_t = len(t)      # Número de intervalos de tiempo
39
40     dx = (x_f - x_0)/(n_x - 1)    # Incremento en x
41     dt = (t_f - t_0)/(n_t - 1)    # Incremento en y
42
43     # Inicializando la función de temperatura (tiene dos índices porque es el caso 1D, espacio
    ↪ y tiempo)
44     u = np.zeros((n_x, n_t))      # Matriz de ceros espacio-temporal / u representará la
    ↪ solución
45
46     u[:,0] = u_x_0      # Se fija la primera columna como la distribución inicial de
    ↪ temperaturas
47     u[0,:] = u_0_t
48     u[n_x-1,:] = u_f_t
49
50     # Número/Módulo de Fourier / Verificando criterio de convergencia
51     F = k*dt/(dx**2)
52     assert F <= 0.5, f"El código no compilará porque F = {F}, y debería ser F <= 0.5"
53
54     for i_t in range(0, n_t-1):
55         for i_x in range(1, n_x-2):
56             u[i_x, i_t+1] = u[i_x, i_t] + F*(u[i_x-1, i_t] - 2*u[i_x, i_t] + u[i_x+1, i_t])
57
58     return u, x, t, F
59
60 u, x, t, F = EC_Calor(x, t, u_x_0, u_0_t, u_f_t, k)
61
62 df = pd.DataFrame(u, index=x.round(3), columns=t.round(3))
63 fig, axs = plt.subplots(figsize=(16,6))

```

```

64 s = sns.heatmap(df, ax=axes)
65 s.set(xlabel='Tiempo (s)', ylabel='Posición (m)')
66 plt.title(r"Solución a la ecuación de calor:  $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , con  $u(x,0) = \sin(\pi x)$  y  $u(0,t) = u(L,t) = 0$ ", y=1.05)
67 plt.tight_layout()
68 plt.savefig("SolEcCalor.png")
69 plt.show()

```

La imagen arrojada por el código de arriba muestra en el eje y a la posición (m) con el 0 en la parte superior y 1 en la parte inferior, por otro lado en el eje x aparece el tiempo en (s) de 0 a 0,2. La escala de colores está entre 0 negro y 1 blanco, los tonos rojizos corresponden a temperaturas entre 0,5 y 1 y los tonos morados entre 0 y 0,5.

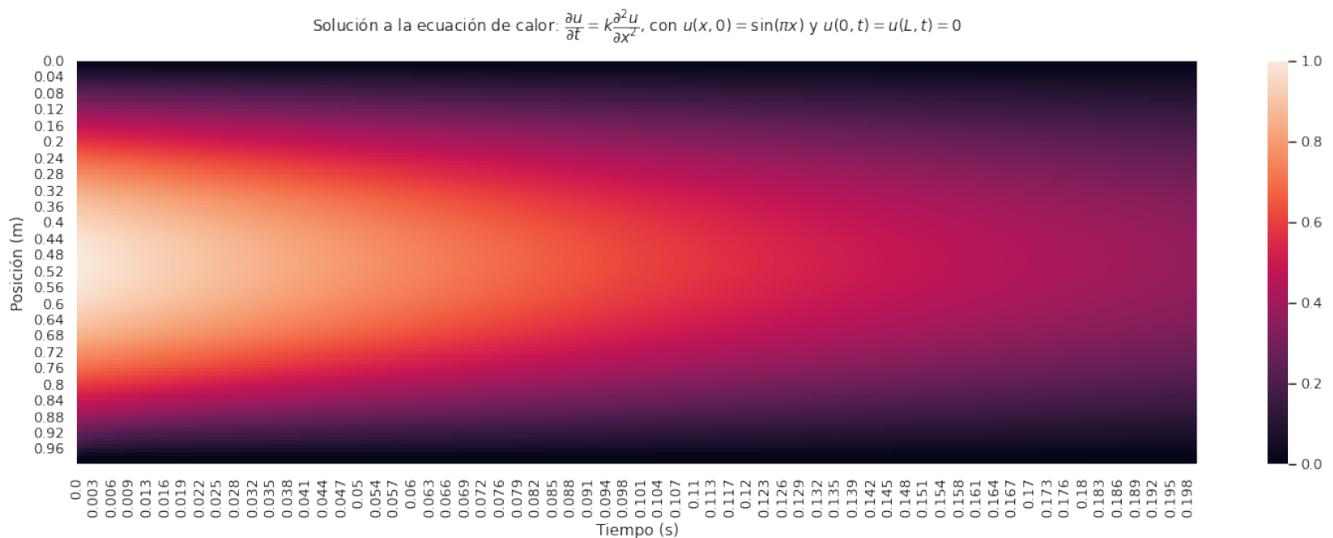


Figura 2.1: Solución de la ecuación de Calor usando el método de Euler adelantado.

este fue el resultado obtenido estableciendo como condición inicial $u(0, x) = \sin(\pi x)$, y como condiciones de contorno $u(0, t) = u(1, t) = 0$ de temperaturas fijas. Implícitamente estas condiciones de contorno sugieren que el sistema se encuentra en contacto con reservorios térmicos de temperatura 0 en ambos extremos.

Nótese que a medida que avanza el tiempo la temperatura en la parte del medio va disminuyendo (pasa de un tono blanco a rojo y luego a morado). Esta imagen puede ser pensada de la siguiente manera, una línea vertical representa la temperatura en distintas posición para un instante de tiempo y una línea horizontal representa la evolución de la temperatura para una posición en particular.

2.4. Primer Acercamiento al Caso Estocástico

En esta sección se hará una aproximación informal a la Ecuación de Calor Estocástica similar a como se hace en [Hairer, 2009]. La idea será tener una idea sin ser completamente formales sobre

que esperar de la solución a la ECE.

2.4.1. Ecuación de Calor Estocástica - ¿Qué se necesita?

Representemos la solución

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy$$

usando la notación $u(\cdot, t) = e^{\Delta t} u_0$. En analogía al caso de una ecuación lineal del tipo $\partial_t u = Au$. Para la ecuación no-homogénea se tendría

$$u(t, \cdot) = e^{\Delta t} u_0 + \int_0^t e^{\Delta(t-s)} f(s, \cdot) ds. \quad (2.45)$$

Supongamos que f es un **ruido blanco espacio-temporal**, cosa que aún no hemos definido. Pero que podría estar caracterizado por un **proceso Gaussiano centrado** ξ tal que $\mathbb{E}\xi(s, x)\xi(t, y) = \delta(t-s)\delta(x-y)$.

La Ecuación de Calor Estocástica en \mathbb{R}^n sería

$$u_t = \Delta u + \xi, \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.46)$$

El caso mas sencillo sería para $u_0 = 0$

$$u(t, x) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi|t-s|)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \xi(s, y) dy ds \quad (2.47)$$

Este es nuevamente un proceso gaussiano centrado pero cuya función de covarianza es mas complicada.

La solución $u(t, x)$ comienza a tener problemas para ser definida en dimensiones $n > 1$ y en $n = 1$ es diferente en relación a las EDOE, las cuales son en general Hölder continuas en el tiempo para todo $\alpha < 1/2$, pero no para $\alpha = 1/2$.

2.4.2. Definición de la covarianza

Sea $u(t, x)$ la solución a la ECE 2.47, entonces su covarianza está definida por

$$C(x, y, s, t) := \mathbb{E}[u(x, s)u(y, t)] \quad (2.48)$$

por invarianza traslacional estadística se tiene que $C(x, y, s, t) = C(0, x-y, s, t)$, entonces

$$\begin{aligned} C(s, t, 0, x) &= \frac{1}{(4\pi)^n} \mathbb{E} \int_0^t \int_0^s \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|s-r'|^{n/2}|t-r|^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-r)} - \frac{|y'|^2}{4(s-r')}} \xi(y, r)\xi(y', r') dy dy' dr' dr \\ &= \frac{1}{(4\pi)^n} \int_0^{s \wedge t} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|s-r|^{n/2}|t-r|^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-r)} - \frac{|y|^2}{4(s-r)}} dy dr \\ &= \frac{1}{(4\pi)^n} \int_0^{s \wedge t} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|s-r|^{n/2}|t-r|^{n/2}} \times \exp(A) dy dr. \end{aligned}$$

donde

$$A = -\frac{|x|^2}{4(t-r)} - \frac{\langle x, y \rangle}{2(t-r)} - \frac{|y|^2}{4(s-r)} - \frac{|y|^2}{4(t-r)}$$

Completando cuadrado se puede resolver la integral de y (Gaussiana)

$$\begin{aligned} C(s, t, 0, x) &= \frac{1}{2^n} \int_0^{s \wedge t} (s + t - 2r)^{-n/2} \exp \left[-\frac{|x|^2}{4(s + t - 2r)} \right] dr \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \int_{|s-t|}^{s+t} l^{-n/2} \exp \left(-\frac{|x|^2}{4l} \right) dl. \end{aligned}$$

La singularidad de $l = 0$ es integrable si y sólo si $n < 2$, de manera que $C(0, 0, t, t)$ es finito solo en el caso unidimensional.

2.4.3. Regularidad y comportamiento asintótico

La regularidad de la solución u dependerá del comportamiento de C en la cercanía a la diagonal $x = y$, $s = t$. Regularidad temporal ($x = 0$)

$$C(s, t, 0, 0) = \frac{1}{4} \int_{|s-t|}^{|s+t|} l^{-1/2} dl = \frac{1}{2} \left(|s + t|^{\frac{1}{2}} - |s - t|^{\frac{1}{2}} \right).$$

es decir que en el caso unidimensional con $s \approx t$ se tiene el comportamiento asintótico:

$$\mathbb{E}|u(0, s) - u(0, t)|^2 \approx |t - s|^{\frac{1}{2}}$$

comparando esto con el movimiento Browniano $\mathbb{E}|B(s) - B(t)|^2 = |t - s|$, se puede concluir que el proceso $t \mapsto u(x, t)$ es casi seguramente para x fijo α -Hölder continuo con $\alpha < 1/4$ y no para $\alpha = 1/4$.

Estudemos ahora la regularidad espacial haciendo $s = t$ y $z = |x|^2/4l$ por simplicidad

$$C(t, t, 0, x) = \frac{|x|}{8} \int_{\frac{|x|^2}{8t}}^{\infty} z^{-\frac{3}{2}} e^{-z} dz = \frac{\sqrt{t}}{4} e^{-\frac{|x|^2}{8t}} + \frac{|x|}{4} \int_{\frac{|x|^2}{8t}}^{\infty} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} dz$$

es decir que en la vecindad de x ($|x|$ pequeño):

$$C(t, t, 0, x) \approx \frac{\sqrt{t}}{4} + \frac{|x|}{4} \int_0^{\infty} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} dz \quad (2.49)$$

Esta expresión indica que dado un t , la solución u es parecida al movimiento Browniano en el espacio sobre escalas de longitud del orden de $t^{1/2}$. Nótese que a estas escalas de longitud el movimiento Browniano fluctúa alrededor de $t^{1/4}$, que es del orden de magnitud de $\mathbb{E}|u(x, t)|$.

¿Qué se puede esperar de la solución u [Hairer, 2009]?

- Dada una ubicación en el espacio, la ECE tiene casi una continuidad de $1/4$ -Hölder a diferencia del caso Browniano continuidad de $1/2$ -Hölder.
- A diferencia del caso determinista, el proceso no parece ser suave. Esto implica un problema ya que el mapeo $x \mapsto u(t, x)$ no será dos veces diferenciable.
- Aunque en el caso determinista $e^{\Delta t u} \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$ y cualquier $u \in L^2$, la solución a la ECE tiene la propiedad de que $\mathbb{E}|u(t, x)|^2 \rightarrow \infty$ para un x fijo y $t \rightarrow \infty$.

con estos elementos en mente podemos pasar a estudiar los procesos estocásticos para luego analizar la ECE.

Capítulo 3

Procesos Estocásticos

Utilizando las herramientas de los espacio de medida como fue presentado en B.1 podemos definir lo que es un proceso estocástico y con esta idea presentar los conceptos del movimiento browniano también conocido como el proceso de Wiener.

Definición 3.0.1 (proceso estocástico). Un proceso estocástico es una colección parametrizada de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T}$, definida en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y que toma valores en \mathbb{R}^n .

El parámetro T usualmente es tomado en $[0, \infty)$, pero pudiese ser también un intervalo arbitrario $[a, b]$ de enteros no-negativos e incluso subconjuntos de \mathbb{R}^n cuando $n \geq 1$. Note que para cada $t \in T$ se tiene una variable aleatoria, es decir:

$$\omega \rightarrow X_t(\omega); \quad \omega \in \Omega$$

por otro lado dado un evento $\omega \in \Omega$ podemos considerar la función

$$t \rightarrow X_t(\omega); \quad t \in T$$

el cual es llamado el camino de X_t . En este contexto t suele ser pensado como el *tiempo* y ω es pensado como las realizaciones de un experimento o una partícula. Podemos pensar en t y ω como variables del proceso estocástico:

$$(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$$

que va de $T \times \Omega$ a \mathbb{R}^n .

3.1. Variables Aleatorias Gaussianas

Las variables aleatorias gaussianas pueden ser usadas para modelar procesos estocásticos. Esta idea es usada por ejemplo en [Khoshnevisan, 2016] para el ruido blanco espacio-temporal que se usa en la ECE. Con esto en mente definamos lo que sería una variable aleatoria Gaussiana:

Definición 3.1.1 (Variable aleatoria Gaussiana). Una variable aleatoria Gaussiana X es una variable aleatoria con una función de densidad de probabilidad (PDF):

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.1)$$

donde (μ, σ^2) son los parámetros de la distribución. En este contexto se suele escribir:

$$X \sim \text{Gaussian}(\mu, \sigma^2) \quad \text{o} \quad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad (3.2)$$

otra definición que será de utilidad es la de Variables Aleatorias Conjuntas Gaussianas:

Definición 3.1.2 (Variables aleatorias conjuntas Gaussianas). Unas variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n son conjuntamente gaussianas si cualquier combinación lineal no trivial es una variable aleatoria gaussiana. Es decir:

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n \text{ es Gaussiana } \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0} \quad (3.3)$$

Esta idea permite introducir el concepto de un vector aleatorio Gaussiano:

Definición 3.1.3 (Vector aleatorio Gaussiano). Un vector aleatorio Gaussiano es un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ cuyas componentes son conjuntamente Gaussianas.

Para probar la existencia de los procesos de Wiener se usará adicionalmente el siguiente teorema:

Teorema 3.1.1. Sean ξ_1, \dots, ξ_k vectores aleatorios Gaussianos. Entonces el vector (ξ_1, \dots, ξ_k) construido de todas las coordenadas de los ξ_j 's también es un vector Gaussiano.

y para la construcción del proceso de Wiener en la semirecta $[0, \infty)$ se usará

Teorema 3.1.2. Sea ξ un vector d -dimensional Gaussiano, $n \in \mathbb{R}_k, Q$ a la matrix $(k \times d)$. Entonces $n + Q\xi$ es un vector k -dimensional Gaussiano. En otras palabras la imagen afín de un vector Gaussiano es un vector Gaussiano.

Con estos elementos podemos definir lo que sería un proceso aleatorio Gaussiano:

Definición 3.1.4 (Proceso aleatorio Gaussiano). Un proceso aleatorio $X(t)$ es Gaussiano si sus muestras $X(t_1), \dots, X(t_n)$ son conjuntamente Gaussianas para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y distintos t_1, t_2, \dots, t_n .

Con estas herramientas se construirá mas adelante la hoja browniana como una generalización del movimiento browniano con una dependencia espacial.

3.2. Proceso de Wiener

En el año 1827 el Botánico Escocés Robert Brown observó que un grano de polen que se encuentra en la superficie de un líquido en reposo realiza un movimiento irregular. Actualmente este fenómeno es conocido como el *Movimiento Browniano*, el mismo fue explicado mas adelante por medio de colisiones aleatorias con las moléculas del líquido. Para describir matemáticamente este fenómeno, parece ser natural usar el concepto de proceso estocástico $B_t(\omega)$, donde ω representa el grano de polen y t el tiempo.

Bajo esta premisa al estar un grano de polen en la superficie del agua tendríamos un ω fijo y lo que describiría este proceso estocástico es el camino de la partícula. La construcción matemática rigurosa de este fenómeno se realizó el año 1923 por Wiener, por ello a este proceso estocástico se le conoce también por el nombre de proceso de Wiener (en el apéndice B.2 se prueban algunas propiedades de este).

Los procesos de Wiener pueden ser usados para generar una amplia variedad de procesos estocásticos continuos. El proceso de Wiener puede ser unidimensional o de varias dimensiones. Comencemos por simplicidad definiendo el caso unidimensional:

Definición 3.2.1 (proceso de Wiener 1D). Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, $T \in (0, \infty]$ un número y supongamos que para todo $\omega \in \Omega$, $t \in [0, T)$ hay definida una función real $w_t(\omega)$. Diremos que w_t o $(w_t(\omega))$ es un proceso de Wiener unidimensional en (Ω, \mathcal{F}, P) para $t \in [0, T)$, si

- (a) para cualquier entero n y cualesquiera $t_1, \dots, t_n \in [0, T)$, el vector $(w_{t_1}, \dots, w_{t_n})$ es Gaussiano y además $\mathbb{E}w_t = 0$, $\mathbb{E}w_t w_s = \min(t, s)$ para todo $t, s \in [0, T)$,
- (b) $w_t(\omega)$ es una función continua de t en $[0, T)$ y $w_0(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Si $T < \infty$, $w_t(\omega)$ está definido y $w_t(\omega)$ es continuo en $[0, T]$, diremos que w_t es un proceso de Wiener en el intervalo $[0, T]$. Dado un ω fijo llamaremos a $w_t(\omega)$, como una función de t , un camino muestral (o trayectoria) del proceso de Wiener.

La prueba de la existencia del proceso de Wiener y su construcción se hará a continuación:

3.2.1. Existencia de un proceso de Wiener

Comencemos probando la existencia del proceso de Wiener en la región $[0, \pi]$

Teorema 3.2.1. Sean $\eta_0(\omega), \eta_1(\omega), \dots$ variables aleatorias independientes normal-estándar en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Entonces para alguna secuencia de enteros $N(k) \rightarrow \infty$ y para casi todo ω la secuencia de funciones

$$w_t^k := \frac{1}{\sqrt{\pi}} t \eta_0(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N(k)} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} \sin(nt) \quad (3.4)$$

converge a medida que $k \rightarrow \infty$ uniformemente en $t \in [0, \pi]$, a una función $w_t(\omega)$, la cual es el proceso de Wiener en $[0, \pi]$.

Demostración. Consideremos la definición de un proceso de Wiener 3.2.1. Para probar la existencia del proceso, asumamos que hemos probado la existencia del proceso en $[0, \pi]$, en ese caso sería natural representarlo como una serie de Fourier, expandiendo en términos de $\sin nt$. Sería algo como

$$w_t^k(\omega) \sim \sum_{n=1}^{N(k)} \eta_n(\omega) B_n \sin(nt)$$

pero ya que $\sin 0 = \sin n\pi = 0$, para asegurar la convergencia $\eta_\pi \sim \mathcal{N}(0, \pi)$, $\eta_\pi \neq 0$, entonces se expandirá con $\tilde{\eta} := \eta_t - \frac{t}{\pi} \eta_\pi$, en ese caso, $\eta_t = \tilde{\eta}_t + \frac{t}{\pi} \eta_\pi$, es decir que

$$w_t^k(\omega) \sim \frac{B_0 t}{\pi} \eta_0(\omega) + \sum_{n=1}^{N(k)} \tilde{\eta}_t(\omega) B_n \sin(nt)$$

de la discusión anterior es natural [Krylov et al., 1995]¹

$$w_t^k(\omega) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} t \eta_0(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N(k)} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} \sin(nt)$$

¹Esta construcción se debe a Norbert Wiener y se puede conseguir en la colección de sus trabajos publicados [Wiener, 1976].

Comencemos con la deducción de 3.4, primero probemos que la esperanza es cero y luego calculemos la varianza:

$$\mathbb{E}[w_t^k(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} t \underbrace{\mathbb{E}[\eta_0(\omega)]}_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N(k)} \frac{1}{n} \sin nt \mathbb{E}[\eta_n(\omega)] = 0$$

donde $\mathbb{E}[\eta_n(\omega)] = 0$, ahora calculemos $\mathbb{E}(|w_t^k - w_s^k|^2)$. Sea $\varphi(t) = \mathbb{E}|w_{s+t} - w_s|^2$ para $t, s \geq 0$ y sea $r \geq 0$

$$\begin{aligned} \varphi(t+r) &= \mathbb{E}|w_{t+r}|^2 = \mathbb{E}|w_{t+r} - w_t + w_t - w_0|^2 \\ &= \mathbb{E}[(w_{t+r} - w_t)^2 + 2(w_{t+r} - w_t)(w_t - w_0) + (w_t - w_0)^2] \\ &= \mathbb{E}|w_{t+r} - w_t|^2 + 2 \underbrace{\mathbb{E}[(w_{t+r} - w_t)(w_t - w_0)]}_0 + \mathbb{E}|w_t - w_0|^2 \\ &= \mathbb{E}|w_{t+r} - w_t|^2 + |w_t - w_0|^2 = \varphi(r) + \varphi(t) \end{aligned}$$

La única solución continua de $\varphi(t+r) = \varphi(t) + \varphi(r)$ es $\varphi(t) = ct$, donde c es un factor de escalamiento. Tomando $c = 1$, vemos que es natural asumir que

$$\mathbb{E}|w_t - w_s|^2 = \mathbb{E}|w_{s+(t-s)} - w_s|^2 = |t - s|$$

ahora probemos rigurosamente

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}|w_t^k - w_s^k|^2 &= \mathbb{E}|w_t - w_s|^2 \\ &= \mathbb{E} \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}}(t-s)\eta_0(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N(k)} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} [\sin nt - \sin ns] \right|^2 \\ &= \frac{1}{\pi}(t-s)^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\sin nt - \sin ns)^2 = |t-s|, \quad t, s \in [0, \pi] \end{aligned}$$

para esta prueba comencemos definiendo el indicador $g_t(x)$ del conjunto $x \in (-t, t)$

$$g_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (-t, t) \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

expandamos esta función (que es par) en una serie de Fourier

$$g_t(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

calculando los coeficientes

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^t dx = \frac{2t}{\pi}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^t \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^t \cos nx dx = \frac{2 \sin nx}{\pi n} \Big|_0^t = \frac{2 \sin nt}{n\pi}$$

entonces

$$g_t(x) = \frac{t}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} \cos nx$$

por lo tanto

$$g_t(x) - g_s(x) = \frac{t-s}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\sin nt - \sin ns]}{n} \cos nx$$

ahora usemos la identidad de Parseval:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

acá $b_n = 0$, es decir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [g_t(x) - g_s(x)]^2 dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{2(t-s)}{\pi} \right]^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin nt - \sin ns)^2}{n^2 \pi^2} \\ &= 2 \frac{(t-s)^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin nt - \sin ns)^2}{n^2} \\ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [g_t(x) - g_s(x)]^2 dx &= \frac{(t-s)^2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin nt - \sin ns)^2}{n^2} \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [g_t(x) - g_s(x)]^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [g_t^2(x) - 2g_t(x)g_s(x) + g_s^2(x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} g_t^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} g_t(x)g_s(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} g_s^2(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-t}^t dx - 2 \int_{-\min(t,s)}^{\min(t,s)} dx + \int_{-s}^s dx \right) = \frac{1}{2} (2t - 4 \min(t,s) + 2s) \\ &= \begin{cases} t - 2t + s, & t < s \\ t - 2s + s, & s < t \end{cases} = \begin{cases} s - t, & s > t \\ t - s, & t > s \end{cases} = |t - s| \end{aligned}$$

es decir que

$$\frac{1}{\pi} (t-s)^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\sin nt - \sin ns)^2 = |t-s|, \quad t, s \in [0, \pi]$$

Ahora probaré que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} |w_t^k - w_s^k|^2 = \frac{1}{\pi} (t-s)^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\sin nt - \sin ns)^2$$

donde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} |w_t^k - w_s^k|^2 = \mathbb{E} \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} (t-s) \eta_0(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} (\sin nt - \sin ns) \right|^2$$

considerando que los $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k$, son variables aleatorias estandar normales, es decir que $\mathbb{E} \eta_k = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_k|^2 &= \mathbb{E} \left| \sum_{n=0}^k \eta_n^2 + \sum_{m=0}^k \sum_{n=0}^k \eta_n \eta_m \right| = \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^k \eta_n^2 \right) + \mathbb{E} \left(\sum_{m=0}^k \sum_{n=0}^k \eta_n \eta_m \right) \\ &= \sum_{n=0}^k \mathbb{E}(\eta_n^2) + \sum_{m=0}^k \sum_{n=0}^k \mathbb{E}(\eta_n \eta_m) (1 - \delta^{mn}) \\ &= \sum_{n=0}^k \mathbb{E}(\eta_n^2) + \sum_{m=0}^k \sum_{n=0}^k \mathbb{E}(\eta_n) \mathbb{E}(\eta_m) (1 - \delta^{mn}) \\ &= \mathbb{E} |\eta_0|^2 + \mathbb{E} |\eta_1|^2 + \dots + \mathbb{E} |\eta_k|^2 \end{aligned}$$

podemos usar este resultado considerando que los η_n son variables aleatorias Gaussianas normales $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}|w_t^k - w_s^k|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\mathbb{E} \left[\frac{(t-s)^2}{\pi} \eta_0^2(\omega) \right] + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \mathbb{E} \left[\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{N(k)} \sum_{n=1}^{N(k)} \eta_n(\omega) \eta_m(\omega) \frac{(\sin nt - \sin ns)(\sin mt - \sin ms)}{mn} \right] \right] \end{aligned}$$

donde

$$\mathbb{E} \left[\frac{(t-s)^2}{\pi} \eta_0^2(\omega) \right] = \frac{(t-s)^2}{\pi} \mathbb{E}[\eta_0^2(\omega)] = \frac{(t-s)^2}{\pi} \cdot 1 = \frac{(t-s)^2}{\pi}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{N(k)} \sum_{n=1}^{N(k)} \eta_n(\omega) \eta_m(\omega) \frac{(\sin nt - \sin ns)(\sin mt - \sin ms)}{mn} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(k)} \eta_n^2(\omega) \frac{(\sin nt - \sin ns)^2}{n^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \sum_{m=1}^{N(k)} \sum_{n=1}^{N(k)} \eta_n(\omega) \eta_m(\omega) \frac{(\sin nt - \sin ns)(\sin mt - \sin ms)}{mn} (1 - \delta^{mn}) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N(k)} \frac{(\sin nt - \sin ns)^2}{n^2} \mathbb{E}[\eta_n^2(\omega)] + \dots \\ &\quad \dots + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{N(k)} \sum_{n=1}^{N(k)} \frac{(\sin nt - \sin ns)(\sin mt - \sin ms)}{mn} \mathbb{E}[\eta_n(\omega) \eta_m(\omega) (1 - \delta^{mn})] \end{aligned}$$

donde se usó:

$$\delta^{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

como una herramienta matemática ya que $1 - \delta^{mn} = 0$ para los elementos de la diagonal $m = n$ y 1 para los elementos fuera de la diagonal. Siguiendo podemos ver que:

$$\mathbb{E}[\eta_n(\omega) \eta_m(\omega) (1 - \delta^{mn})] = (1 - \delta^{mn}) \mathbb{E}[\eta_n(\omega)] \mathbb{E}[\eta_m(\omega)] = (1 - \delta^{mn}) \cdot 0 = 0$$

es decir que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}|w_t^k - w_s^k|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{(t-s)^2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N(k)} \frac{1}{n^2} (\sin nt - \sin ns)^2 \right] \\ &= \frac{(t-s)^2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\sin nt - \sin ns)^2 \\ &= |t-s| \end{aligned}$$

Ahora bien, definamos

$$c(n) := \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}} \left[\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\sin kt - \sin ks)^2}{k^2} \right]^2 dt ds, \quad \alpha \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$$

entonces para $n=1$

$$c(1) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}} \left[\sum_{k=1}^\infty \frac{(\sin kt - \sin ks)^2}{k^2} \right]^2 dt ds$$

y usando

$$|f(t) - f(s)|^p \leq N |t-s|^{p\alpha-1} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{1+p\alpha}} dx dy,$$

además sabiendo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}(t-s)^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} (\sin nt - \sin ns)^2 &= |t-s| \\ \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} (\sin nt - \sin ns)^2 &= \frac{\pi}{2} \left[|t-s| - \frac{1}{\pi}(t-s)^2 \right] = \frac{\pi}{2} |t-s| \left[1 - \frac{|t-s|}{\pi} \right] \\ \left[\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} (\sin nt - \sin ns)^2 \right]^2 &= \frac{\pi^2}{4} |t-s|^2 \left[1 - \frac{|t-s|}{\pi} \right]^2 \\ \left[\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} (\sin nt - \sin ns)^2 \right]^2 &\leq \frac{\pi^2}{4} |t-s|^2 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} c(1) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}} \left[\sum_{k=1}^\infty \frac{(\sin kt - \sin ks)^2}{k^2} \right]^2 \\ &\leq \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}} \cdot \frac{\pi^2}{4} |t-s|^2 dt ds = \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{|t-s|^{4\alpha-1}} dt ds < \infty. \end{aligned}$$

Por el teorema de convergencia dominada, en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega f_k dP = \int_\Omega f dP \implies \lim_{k \rightarrow \infty} c(k) \rightarrow 0$$

Definiendo $N(k)$ de manera tal que

$$c(N(k)) \leq 2^{-k} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} c(N(k)) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-k} = 0,$$

ahora definamos

$$\delta_t^k := w_t^{k+1} - w_t^k$$

y usando el lema B.2.3

$$|f(t) - f(s)|^p \leq N |t-s|^{p\alpha-1} \int_s^t \int_s^t \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{1+p\alpha}} dx dy$$

con $p = 4$, $s = 0$ y considerando que $\mathbb{E}\eta_i \eta_j = \delta^{ij}$, entonces

$$|f(t) - f(0)|^4 \leq N |t|^{4\alpha-1} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{1+4\alpha}} dx dy$$

con $f^k(t, \omega) = \delta_t^k$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{t \in [0, \pi]} |\delta_t^k|^4 &\leq N |t|^{4\alpha-1} \mathbb{E} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}} |\delta_t^k - \delta_s^k|^4 dt ds \\
&\leq N |t|^{4\alpha-1} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}} \mathbb{E} |\delta_t^k - \delta_s^k|^4 dt ds \\
&\leq N \pi^{4\alpha-1} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}} \mathbb{E} |\delta_t^k - \delta_s^k|^4 dt ds \quad (|t| \leq \pi) \\
&= N_1 \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}} \left(\mathbb{E} |\delta_t^k - \delta_s^k|^2 \right)^2 dt ds
\end{aligned}$$

nótese que en la expresión anterior N_1 no depende de k , por otro lado

$$\mathbb{E} |\delta_t^k - \delta_s^k|^2 = \mathbb{E} |w_t^{k+1} - w_t^k - w_s^{k+1} + w_s^k|^2$$

donde

$$\begin{aligned}
w_t^{k+1} - w_t^k &= \frac{1}{\sqrt{n}} t \eta_0(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N(k+1)} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} \sin nt - \frac{1}{\sqrt{\pi}} t \eta_0(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N(k)} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} \sin nt \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\sum_{n=1}^{N(k)} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} \sin nt + \sum_{n=N(k)+1}^{N(k+1)} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} \sin nt - \sum_{n=1}^{N(k)} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} \sin nt \right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=N(k)+1}^{N(k+1)} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} \sin nt
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} |\delta_t^k - \delta_s^k|^2 &= \mathbb{E} |(w_t^{k+1} - w_t^k) - (w_s^{k+1} - w_s^k)|^2 \\
&= \mathbb{E} \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=N(k)+1}^{N(k+1)} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} \sin nt - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=N(k)+1}^{N(k+1)} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} \sin ns \right|^2 \\
&= \mathbb{E} \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=N(k)+1}^{N(k+1)} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} (\sin nt - \sin ns) \right|^2 \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{m=N(k)+1}^{N(k+1)} \sum_{n=N(k)+1}^{N(k+1)} \frac{(\sin nt - \sin ns)(\sin mt - \sin ms)}{nm} \underbrace{\mathbb{E} [\eta_n(\omega) \eta_m(\omega)]}_{\delta^{nm}} \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{m=N(k)+1}^{N(k+1)} \sum_{n=N(k)+1}^{N(k+1)} \frac{(\sin nt - \sin ns)(\sin mt - \sin ms)}{nm} \delta^{nm} \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{n=N(k)+1}^{N(k+1)} \frac{(\sin nt - \sin ns)^2}{n^2}
\end{aligned}$$

es decir que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{t \in [0, \pi]} |\delta_t^k|^4 &\leq N_1 \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}} (\mathbb{E} |\delta_t^k - \delta_s^k|^2)^2 dt ds \\
&= N_1 \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}} \frac{4}{\pi^2} \left[\sum_{n=N(k)+1}^{N(k+1)} \frac{(\sin nt - \sin ns)^2}{n^2} \right]^2 dt ds \\
&\leq N_1 \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}} \left[\sum_{n=N(k)}^\infty \frac{(\sin nt - \sin ns)^2}{n^2} \right]^2 dt ds \\
&= N_1 c(N(k)) \leq N_1 2^{-k}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Nótese que $\sup_{t \in [0, \pi]} |\delta_t^k|^4$ no cambia si es reemplazado por el conjunto contable de todos los racionales en $[0, \pi]$, entonces

$$\sup_{t \in [0, \pi]} |w_t^{k+1} - w_t^k|^4 = \sup_{t \in [0, \pi]} |\delta_t^k|^4$$

es una variable aleatoria. Pero además usando la desigualdad de Hölder B.2.3, con esto entonces

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E} \sup_{t \in [0, \pi]} |w_t^{k+1} - w_t^k| \leq \sum_{k=1}^\infty \left(\mathbb{E} \sup_{t \in [0, \pi]} |w_t^{k+1} - w_t^k|^4 \right)^{\frac{1}{4}} \leq \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{N_1}{2^k} \right)^{\frac{1}{4}} = N_1^{1/4} \sum_{k=1}^\infty 2^{-k/4} < \infty.$$

Por lo tanto considerando el siguiente corolario

Corolario 3.2.1.1. *Si ξ_1, ξ_2, \dots , son variables aleatorias no-negativas, entonces*

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^\infty \xi_n \mu(d\omega) = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega \xi_n \mu(d\omega)$$

además si ξ tiene una integral finita con respecto a μ , entonces $-\infty < \xi < \infty$. Con esto

$$\sum_{k=1}^\infty \sup_{t \in [0, \pi]} |w_t^{k+1} - w_t^k| < \infty. \tag{3.6}$$

Sea Ω' el conjunto de todos los ω que satisfacen 3.6. Claramente $\Omega' \in \mathcal{F}$ y para cualquier $\omega \in \Omega'$ la secuencia $w_t^k(\omega)$ converge uniformemente en $t \in [0, \pi]$ por 3.6. Entonces

$$w_t(\omega) := \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} w_t^k(\omega), & \omega \in \Omega' \\ 0, & \omega \notin \Omega' \end{cases}, \quad t \in [0, \pi] \tag{3.7}$$

De acá se sigue que w_t es continua en t para todo ω ya que es la suma de funciones continuas y ya que $P(\Omega') = 1$, se sigue que $w_t^k \rightarrow w_t$. Además de acuerdo a el teorema B.2.4 y la definición B.2.2: Usando el teorema 3.1.1

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} w_t &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} w_t^k = 0, \\
\mathbb{E} |w_t - w_s|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} |w_t^k - w_s^k|^2 \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\pi} (t-s)^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N(k)} n^{-2} (\sin nt - \sin ns)^2 \right] = |t-s|
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Finalmente se puede ver que:

$$w_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 0 \eta_0(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N(k)} \eta_n(\omega) \frac{1}{n} \sin(0) = 0 + 0 = 0$$

y de acá

$$\mathbb{E}|w_t - w_s|^2 = \mathbb{E}(w_t^2 - 2w_t w_s + w_s^2) = \mathbb{E}|w_t|^2 + \mathbb{E}|w_s|^2 - 2\mathbb{E}|w_t w_s|$$

pero

$$\mathbb{E}|w_t|^2 = \mathbb{E}|w_t - 0|^2 = \mathbb{E}|w_t - w_0|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}|w_t^k - w_0^k|^2 = |t - 0| = |t|, \quad \mathbb{E}|w_s|^2 = |s|$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}|w_t - w_s|^2 = |t| + |s| - 2\mathbb{E}|w_t w_s| = |t - s|$$

pero anteriormente se probó que

$$t - 2 \min(t, s) + s = |t - s|, \quad \text{como } t, s \geq 0$$

entonces

$$|t| + |s| - 2\mathbb{E}|w_t w_s| = t + s - 2\mathbb{E}|w_t w_s| = |t - s| \quad \text{y} \quad t + s - 2 \min(t, s) = |t - s|$$

es decir que $\mathbb{E}|w_t w_s| = \min(t, s)$, con esto queda probada la existencia del proceso de Wiener en $[0, \pi]$. \square

3.2.2. Construcción del proceso de Wiener en la semirecta

Ahora probaremos la existencia del proceso en la semirecta $[0, \infty)$, es decir se extenderá la región en la cuál fue definido el proceso previamente 3.2.1

Teorema 3.2.2. *Existe un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) en el cual uno puede definir un proceso de Wiener w_t para $t \in [0, \infty)$.*

Demostración. Tomemos un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) en el cual existen variables aleatorias independientes ζ_1, ζ_2, \dots con la distribución normal estandar. Sea $r : (n, k) \rightarrow r(n, k)$ un mapeo uno a uno de todos los pares (n, k) , $n = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots$ al conjunto $\{1, 2, \dots\}$. Además $\epsilon_{nk} = \epsilon_{r(nk)}$, entonces

$$(\eta_0^{(n)}, \eta_1^{(n)}, \dots) = (\zeta_{r(n,1)}, \zeta_{r(n,2)}, \dots)$$

usando el teorema 3.2.1, construimos un proceso de Wiener $w_t^{(n)}$ en $[0, \pi]$ para cada una de las sucesiones y definamos

$$w_t(\omega) = \begin{cases} w_t^{(0)}, & 0 \leq t < \pi \\ w_\pi^{(0)}(\omega) + w_{t-\pi}^{(1)}(\omega), & \pi \leq t < 2\pi \\ w_\pi^{(0)}(\omega) + w_\pi^{(1)}(\omega) + w_{t-2\pi}^{(2)}(\omega), & 2\pi \leq t < 3\pi \\ \vdots & \end{cases}$$

puede ser mostrado (como se hizo previamente) que para todo $s_i \in [0, \pi]$ y enteros $n_i, i = 1, \dots, r$, el vector $(w_{s_1}^{n_1}, \dots, w_{s_r}^{n_r})$ es Gaussiano.

Usando el teorema 3.1.2 sabemos que $(w_{t_1}, \dots, w_{t_r})$ es Gaussiano para $t_i \geq 0$. Además, podemos mostrar que $w_r^{(n)}$ y $w_s^{(m)}$ son independientes para $n \neq m$, $r, s \in [0, \pi]$. Por lo tanto para $t \geq s \geq 0$ y $p := [t/\pi]$, $q := [s/\pi]$. Calculemos $\mathbb{E}[w_t w_s]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[w_t w_s] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{n=0}^{p-1} w_\pi^{(n)} + w_{t-p\pi}^{(p)} \right) \left(\sum_{m=0}^{q-1} w_\pi^{(m)} + w_{s-q\pi}^{(q)} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{q-1} w_\pi^{(n)} w_\pi^{(m)} + \sum_{n=0}^{p-1} w_\pi^{(n)} w_{s-q\pi}^{(q)} + \sum_{m=0}^{q-1} w_\pi^{(m)} w_{t-p\pi}^{(p)} + w_{t-p\pi}^{(p)} w_{s-q\pi}^{(q)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{q-1} w_\pi^{(n)} w_\pi^{(m)} \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{p-1} w_\pi^{(n)} w_{s-q\pi}^{(q)} \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{m=0}^{q-1} w_\pi^{(m)} w_{t-p\pi}^{(p)} \right] + \mathbb{E} \left[w_{t-p\pi}^{(p)} w_{s-q\pi}^{(q)} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{q-1} \mathbb{E} \left[w_\pi^{(n)} w_\pi^{(m)} \right] + \sum_{n=0}^{p-1} \mathbb{E} \left[w_\pi^{(n)} w_{s-q\pi}^{(q)} \right] + \sum_{m=0}^{q-1} \mathbb{E} \left[w_\pi^{(m)} w_{t-p\pi}^{(p)} \right] + \mathbb{E} \left[w_{t-p\pi}^{(p)} w_{s-q\pi}^{(q)} \right] \end{aligned}$$

ahora calculando cada término

$$n \neq m : \quad \mathbb{E} \left[w_\pi^{(n)} w_\pi^{(m)} \right] = \mathbb{E} \left[w_\pi^{(n)} \right] \cdot \mathbb{E} \left[w_\pi^{(m)} \right] = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} n = m : \quad \mathbb{E} \left[w_\pi^{2(n)} \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \pi \eta_0(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{N(n)} \eta_k(\omega) \frac{1}{n} \sin k\pi \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\frac{\pi^2}{\pi} \eta_0^2(\omega) \right] = \pi \mathbb{E} \left[\eta_0^2(\omega) \right] \\ &= \pi \cdot 1 = \pi \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbb{E}[w_\pi^{(n)} w_\pi^{(m)}] = \delta^{mn} \pi$$

siguiendo

$$\mathbb{E}[w_\pi^{(n)} w_{s-q\pi}^{(q)}]; \quad \text{cuando } n \neq \frac{s}{\pi} \implies \mathbb{E}[w_\pi^{(n)} w_{s-q\pi}^{(q)}] = 0$$

pero cuando $n = q = s/\pi$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[w_\pi^{(s/\pi)} w_{s-\frac{s}{\pi}\pi}^{(s/\pi)} \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\sqrt{\pi} \eta_0(\omega) \right) \cdot \left(\frac{s-q\pi}{\sqrt{\pi}} \eta_0(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{s/\pi} \eta_k(\omega) \frac{1}{k} \sin n(s-q\pi) \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} (s-q\pi) \mathbb{E}[\eta_0^2(\omega)] = s-q\pi \end{aligned}$$

es decir que

$$\mathbb{E}[w_\pi^{(n)} w_{s-q\pi}^{(q)}] = \delta^{nq} \cdot (s-q\pi)$$

siguiendo

$$\mathbb{E} \left[w_{t-p\pi}^{(p)} w_{s-q\pi}^{(q)} \right] = 0, \quad \text{sí } p \neq q \text{ (aparecerá } \delta^{pq} \text{)}$$

por otro lado recordemos que

$$\mathbb{E} \left[w_t^k w_s^{(k)} \right] = \text{mín}(t, s),$$

entonces

$$\mathbb{E} \left[w_t^k w_s^{(k)} \right] = \text{mín} [\delta^{pq}(t-p\pi), (s-q\pi)] = \delta^{pq}(s-q\pi)$$

esto debido a que $0 \leq s \leq t$, s es mas pequeño o igual a t . Finalmente entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[w_t w_s] &= \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{q-1} \mathbb{E} [w_\pi^{(n)} w_\pi^{(m)}] + \sum_{n=0}^{p-1} \mathbb{E} [w_\pi^{(n)} w_{s-q\pi}^{(q)}] + \sum_{m=0}^{q-1} \mathbb{E} [w_\pi(m) w_{t-p\pi}^{(p)}] + \mathbb{E} [w_{t-p\pi}^{(p)} w_{s-q\pi}^{(q)}] \\ &= \delta^{pq} \underbrace{(s - q\pi)}_0 + \sum_{n=0}^{p-1} \delta^{nq} \underbrace{(s - q\pi)}_0 + \sum_{m=0}^{q-1} \delta^{mp} \underbrace{(t - p\pi)}_0 + \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{n=0}^{p-1} \delta^{nm} \pi\end{aligned}$$

considerando que $s \leq t$ entonces $\frac{s}{\pi} \leq \frac{t}{\pi}$ y $q \leq p$ es decir que

$$\mathbb{E}[w_t w_s] = \sum_{n=0}^{q-1} \pi = (q - 1 + 1)\pi = q\pi = \frac{s}{\pi} \pi = s$$

este fue en el caso en que $s \leq t$, para el caso general

$$\mathbb{E}[w_t w_s] = \text{mín}(t, s), \quad \text{para } s, t \geq 0$$

y ya que $\mathbb{E}w_t = 0$ y w_t es continua en t , el teorema se ha probado. \square

3.3. Ruido espacio-temporal

En esta sección iniciaremos obteniendo una representación equivalente del movimiento Browniano.

3.3.1. Movimiento Browniano

Teorema 3.3.1. Sean $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ unas variables aleatorias Gaussianas estándar independientes y además sea $\{m_k(t), k \geq 1\}$ una base ortonormal en $L^2(0, T)$, entonces

$$w(t) = \sum_{k \geq 1} \left(\int_0^t m_k(s) ds \right) \xi_k \quad (3.9)$$

es un movimiento Browniano.

Es decir, un proceso gaussiano con media cero y covarianza $\mathbb{E}[w(t)w(s)] = \text{mín}(t, s)$.

3.3.2. Hoja Browniana

La construcción anterior se puede generalizar para un proceso espacio-temporal de la siguiente manera:

Teorema 3.3.2. Sean $\{w_k(t)\}_{k \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias con la distribución del movimiento browniano, $t \in [0, T]$ y una base ortonormal $\{h_k(x) : k \geq 1, x \in (0, L)\}$, en $L^2(0, L)$, entonces

$$W(t, x) = \sum_{k \geq 1} w_k(t) \int_0^x h_k(r) dr \quad (3.10)$$

es gaussiano, $\mathbb{E}[W(t, x)] = 0$ y $\mathbb{E}[W(t, x)W(s, y)] = \text{mín}(t, s) \text{mín}(x, y)$. Este proceso se conoce como la hoja Browniana.

La prueba de este teorema y el anterior se sigue de:

Demostración. Para demostrar 3.3 .1 y 3.3.2. Sea $L^2[0, 1]$ con el producto interno usual

$$\langle f, g \rangle = \int f g dx$$

Sea $\{W(t)\}_{t \in [0,1]}$ un movimiento Browniano estandar, definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Cada variable aleatoria $W(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, que se considera con el producto interno usual

$$\langle X, Y \rangle = \int_{\Omega} XY d\mathbb{P} = \mathbb{E}(XY).$$

Vale el siguiente resultado: $\forall 0 \leq s < t \leq 1$ la función $\mathbb{1}_{[s,t]} \rightarrow W(t) - W(s)$ se extiende a una isometría lineal $I_W : L^2[0, 1] \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y para cada $\varphi \in [2[0, 1]$ $I_W(\varphi)$ es una variable aleatoria gaussiana centrada.

La demostración sigue de observar que

$$\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \mathbb{1}_{[0,s]} \rangle = \langle W(t), W(s) \rangle = t \wedge s,$$

y extender usando aproximaciones por combinaciones lineales de indicadoras de intervalos, que resultan densas, etc.

Ahora bien, si $\{\psi_n\}$ es una base ortonormal de $L^2(0, 1)$ entonces $\xi_n = I_W(\psi_n)$ define una base ortonormal de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, compuesta de variables aleatorias Gaussianas no correlacionadas, por lo tanto independientes. Como I_W es una isometría, tiene que mandar la expansión de $\mathbb{1}_{[0,t]}$ en la base $\{\psi_n\}$ en la expansión de $W(t)$ en la base $\{\xi_n\}$, y esto es

$$W(t) = \sum_n \xi_n \langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \psi_n \rangle$$

(con la serie siendo el limite en L^2 .)

□

3.3.3. Ruido blanco

En esta sección comenzamos presentando un teorema de existencia de procesos gaussianos dadas una media y una covarianza [Brassesso, 2012]

Teorema 3.3.3 (Existencia de procesos gaussianos). *Sea T un conjunto cualquiera, $m : T \rightarrow \mathbb{R}$ y $\Gamma : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ es simétrica ($\Gamma(s, t) = \Gamma(t, s)$, $\forall s, t \in T$) y para todo conjunto finito $F \subset T$, la matriz $\{\Gamma(s, t)\}_{s, t \in F}$ es no-negativa definida, entonces existe un proceso gaussiano X_t con media m y función de covarianza Γ .*

Construcción

Construimos un proceso estocástico el cual será indexado por la colección $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, es decir usando subconjuntos de números reales Borel medibles. Definimos el proceso:

$$\{\dot{W}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda(A) < \infty\} \tag{3.11}$$

donde λ es la medida de Lebesgue, por las siguientes condiciones.

- 1) $\dot{W}(A) \sim \mathcal{N}(0, \lambda(A))$
- 2) $\mathbb{E}[W(A), W(B)] = \lambda(A \cap B) = \Gamma(A, B)$.

Estas condiciones junto al siguiente lema y el teorema 3.3.3 nos permiten tener lo necesario para establecer el proceso conocido como ruido blanco. Primero demostremos el lema.

Lema 3.3.4. Sean $A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y definimos la matriz $\{\Gamma(A_i, A_j)\}_{1 \leq i, j \leq N} = \lambda(A_i \cap A_j)$ es no-negativa definida.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Gamma(A_i, A_j) x_i x_j &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda(A_i \cap A_j) x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int \mathbf{1}_{A_i \cap A_j}(u) du x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int x_i \mathbf{1}_{A_i}(u) x_j \mathbf{1}_{A_j}(u) du \\
&= \int \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i}(u) \sum_{j=1}^N x_j \mathbf{1}_{A_j}(u) du \quad (\text{Teorema de Fubini}) \\
&= \int \left[\sum_{i=1}^N x_i \mathbf{1}_{A_i}(u) \right]^2 du \geq 0.
\end{aligned}$$

□

En virtud del teorema 3.3.3 y el lema anterior existe el proceso conocido como ruido blanco.

Conexión entre el movimiento Browniano y el ruido blanco

Si consideramos la representación 3.9

$$w(t) = \sum_{k \geq 1} \left(\int_0^t m_k(s) ds \right) \xi_k$$

la derivada del movimiento Browniano no existe en el sentido usual, de igual manera con la finalidad de explorar la idea de la derivada podemos probar derivando la serie de arriba término a término.

$$\dot{w}(t) = \sum_{k \geq 1} m_k(t) \xi_k \quad (3.12)$$

la serie anterior es divergente, sin embargo podemos definir una función generalizada sobre $L^2(0, T)$ de acuerdo a la regla,

$$\dot{w}(f) = \sum_{k \geq 1} f_k \xi_k, \quad f_k = \int_0^T f(t) m_k(t) dt \quad (3.13)$$

La serie 3.13 converge con probabilidad 1 a una variable gaussiana con media cero y varianza

$$\sum_k f_k^2 = \int_0^T f(t)^2 dt. \quad (3.14)$$

Sea w un movimiento Browniano y $f \in L^2(0, T)$ una función no aleatoria, definimos:

$$\xi_k = \int_0^T m_k(s) dw(s), \quad (3.15)$$

donde $dw(s)$ es un incremento infinitesimal del proceso de Wiener en $t = s$ durante el intervalo ds . las variables aleatorias $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ son gaussianas. Sustituyendo en la representación

$$\dot{w}(t) = \sum_{k \geq 1} m_k(t) \int_0^T m_k(s) dw(s) \quad (3.16)$$

si evaluamos en f de acuerdo a 3.12

$$\dot{w}(f) = \sum_{k \geq 1} f_k \int_0^T m_k(s) dw_k(s) = \sum_{k \geq 1} \int_0^T \int_0^T f(t) m_k(t) m_k(s) dt dw_k(s) \quad (3.17)$$

entonces

$$\dot{w}(f) = \int_0^T f(s) dw(s). \quad (3.18)$$

Podemos identificar cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ con la función indicadora $\mathbb{1}_A$,

$$\mathbb{E}[\dot{W}(A), \dot{W}(B)] = \lambda(A \cap B) = \int \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B d\lambda = E[\dot{W}(\mathbb{1}_A) \dot{W}(\mathbb{1}_B)] \quad (3.19)$$

Consideremos el siguiente conjunto de funciones simples en $L^2(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ f : f = \sum_{j=1}^N a_j \mathbb{1}_{A_j}, a_j \in \mathbb{R}, A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A_j \text{ disjuntos y } \lambda(A_j) < \infty \right\}. \quad (3.20)$$

Definimos \dot{W} en S como

$$\dot{W}(f) = \sum_{i=1}^N a_i \dot{W}(A_i). \quad (3.21)$$

si $f \in S$ se puede ver directamente de la definición 3.19:

$$\mathbb{E}[\dot{W}(f)^2] = \mathbb{E} \left[\sum_{j,k} a_j a_k \dot{W}(A_j) \dot{W}(A_k) \right] = \sum_j a_j^2 \lambda(A_j) = \int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\lambda. \quad (3.22)$$

Esto indica que la función $f \rightarrow \dot{W}(f)$ es una isometría de $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\Omega, \mathbb{P})$. Este espacio es completo, por lo tanto esta sucesión de variables aleatorias tiene límite, el cual llamamos $\dot{W}(g)$. Este proceso indexado denotado por $\dot{W}(g)$ sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ se le denomina proceso isonormal [Brassasco, 2012]. El cual suele representarse como:

$$\dot{W}(g) = \int g(x) dW_x, \quad (3.23)$$

Nótese que la x suele omitirse cuando está claro el espacio del contexto. Si generalizamos la construcción al siguiente nivel

$$\dot{W}(x, t) = \sum_{k \geq 1} h_k(x) \dot{W}(t) \quad (3.24)$$

donde $\{h_k\}_{k \geq 1}$ es una base ortonormal en $L_2(0, L)$. El proceso \dot{W} es un ruido blanco espacio temporal. Este proceso es una distribución en $L((0, T) \times (0, L))$:

$$\dot{W}(f) = \sum_{k \geq 1} \int_0^T \left(\int_0^L f(x, t) h_k(x) dx \right) w_k(t) \quad (3.25)$$

y

$$\dot{W}(f) = \int_0^T \int_0^L f(x, t) dW(x, t) \quad (3.26)$$

Propiedades:

$$\mathbb{E}(\dot{W}(f)^2) = \int_0^T \int_0^L f^2(x, t) dx dt \quad (3.27a)$$

$$\dot{W}(t, x) = \sum_{k, n} m_k(t) h_n(x) \xi_{k, n}, \quad (3.27b)$$

donde $\xi_{k, n} = \dot{W}(m_k h_n)$.

Descripción alternativa del ruido blanco

El ruido blanco puede pensarse como un proceso gaussiano $\dot{w}(t)$ con

$$\mathbb{E}[\dot{w}(t)\dot{w}(s)] = \delta(t - s) \quad (3.28)$$

donde δ es la delta de Dirac. De manera similar

$$\mathbb{E}[\dot{W}(t, x)\dot{W}(s, y)] = \delta(x - y)\delta(t - s). \quad (3.29)$$

3.3.4. Espacio de Wiener

Sea $\mathbb{T} = [0, T]$ con $T > 0$ o $[0, \infty)$, una familia de variables aleatorias donde $X = \{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ de un conjunto F tal que $X : \Omega \rightarrow F$, toma elementos del espacio muestral Ω y lo envía a F , diremos que $X(t)$ es una variable F -valuada indexada T -indexada. Esta familia está definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, en estas condiciones llamaremos a la familia de variables un proceso estocástico F -valuada.

Fijemos un $T > 0$ y sea $W_T = W_T(\mathbb{R}^d)$ el conjunto \mathbb{R}^d -valuado de funciones continuas ω en $[0, T]$ con $\omega(0) = 0$:

$$W_T = \{\omega : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d; \omega \text{ es continuo y } \omega(0) = 0\} \quad (3.30)$$

Consideremos ahora el siguiente teorema:

Teorema 3.3.5. *Existe una medida de probabilidad única μ_T en W_T que satisface:*

$$\mu_T(\{\omega \in W_T; \omega(t_1) \in A_1, \omega(t_2) \in A_2, \dots, \omega(t_n) \in A_n\}) = \int_{A_1} dx_1 \int_{A_2} dx_2 \cdots \int_{A_n} dx_n \prod_{j=1}^n g(t_j - t_{j-1}, x_{j-1}, x_j) \quad (3.31)$$

para $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ y $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, y la función $g(t, x, y)$ está dada por

$$g(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|y-x|^2}{2t}} \quad (3.32)$$

donde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ no es otra cosa que la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}^d , g es la densidad de probabilidad gaussiana en d -dimensiones.

Definición: μ_T es la llamada **medida de Wiener** d -dimensional y el espacio de probabilidad $(W_T, \mathcal{B}(W_T), \mu_T)$ es llamado el espacio d -dimensional Wiener en $[0, T]$. Adicionalmente, llamaremos a las funciones (variables aleatorias) definidas en el espacio de Wiener **funcionales de Wiener**.

La función $g(t, x, y)$ es el kernel o núcleo de calor y es la solución fundamental a la ecuación de calor.

Capítulo 4

Solución Numérica de la Ecuación de Calor Estocástica

En este capítulo, avanzaremos en nuestro estudio de la ecuación de calor estocástica, construyendo sobre la base de la ecuación de calor determinista y los procesos estocásticos que hemos desarrollado en capítulos anteriores. Este avance nos permitirá incorporar la presencia de una fuente aleatoria, es decir ruido en el fenómeno físico que modela la ecuación de calor. En particular, modelaremos el ruido aditivo mediante el muestreo de caminos muestrales de un proceso de Q -Wiener.

Al inicio de este capítulo, nos centraremos en la simulación de un ruido blanco, un proceso de Wiener y una hoja browniana. Estos elementos son fundamentales para la definición de la ecuación de calor estocástica. Para resolver numéricamente la ecuación, aplicaremos el método de Euler-Maruyama, una técnica ampliamente utilizada en la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas debido a su simplicidad para la solución de ecuaciones diferenciales.

Finalmente, para abordar la ECE con ruido aditivo se tratará a esta ecuación con un campo aleatorio $\dot{W}(x, t)$, como una ecuación semilineal en el espacio de Hilbert $L^2(\bar{U})$, y utilizaremos un proceso gaussiano que toma valores en $L^2(\bar{U})$. Con esto en mente se tendrán las bases sentadas para la simulación en Python de la ECE con ruido aditivo.

El lenguaje de programación Python se usa con frecuencia en la simulación de procesos estocásticos debido a su extensa biblioteca de paquetes científicos y su sintaxis intuitiva. Actualmente se pueden encontrar algunos autores como [Gabriel J. Lord, 2014] que proporcionan un análisis exhaustivo de los métodos para la simulación de ecuaciones diferenciales parciales estocásticas en Python, ofreciendo una base sólida para aquellos que deseen profundizar en este campo. En esta sección se seguirá el enfoque adoptado en [Gabriel J. Lord, 2014] para la simulación de la ECE con ruido aditivo.

4.1. Generación de un ruido blanco Gaussiano

La generación de un ruido blanco Gaussiano puede ser implementado en python usando la librería/módulo `random` para la manipulación de número aleatorios, la misma permite obtener número aleatorios de una distribución Gaussiana de media 0 y desviación estándar 1. Las demás librerías sirven para manipular la información gráficamente y organizarla como un dataframe. El código implementado fue:

```

1 # Generación de un ruido blanco Gaussiano
2 serie_gauss = pd.Series(np.random.normal(mean, std, num), name="Valor")
3
4 # Graficar la serie temporal en el primer subplot
5 serie_gauss.plot(ax=ax0, xlabel="Tiempo", ylabel="Valor")
6
7 # Graficar la función de autocorrelación en el segundo subplot
8 # Autocorrelación, las líneas representan los niveles de confianza del 95% y del 99%
9 pd.plotting.autocorrelation_plot(serie_gauss, ax=ax1)
10
11 # Graficar el histograma en el tercer subplot
12 serie_gauss.plot(ax=ax2, kind="hist", xlabel="Valor", ylabel="Frecuencia", bins=35);

```

Los aspectos gráficos de las imágenes fueron ignorados del código así como la definición de la semilla, media, desviación estándar y cantidad de número aleatorios. Las imágenes arrojadas por el código de arriba son:

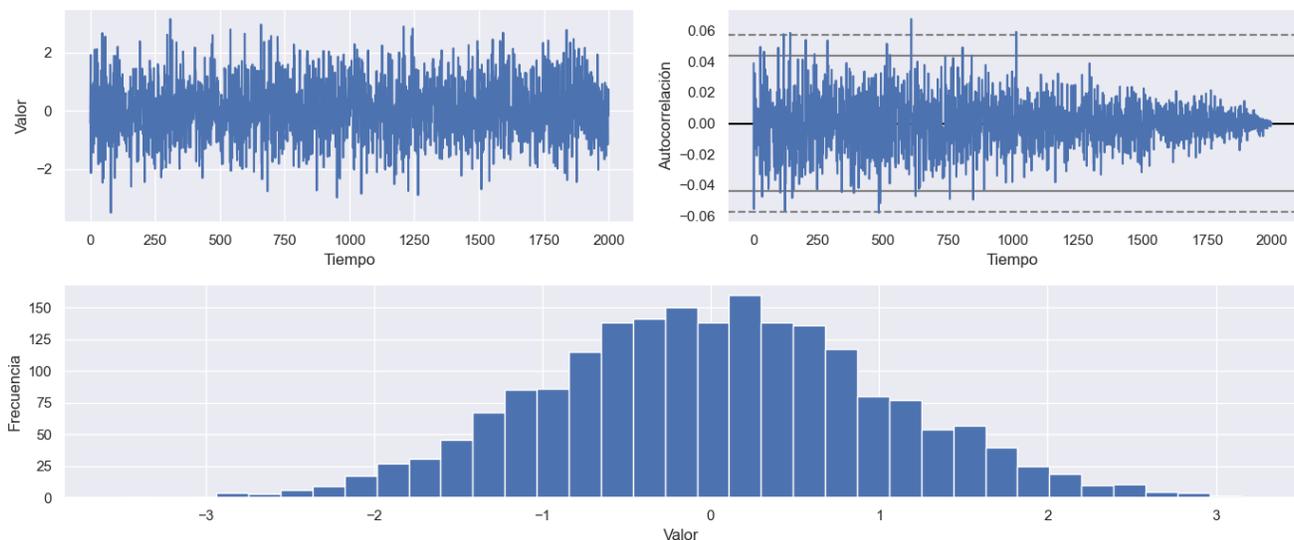


Figura 4.1: Representación del ruido blanco, su histograma y su autocorrelación en el tiempo

Además el código arroja: Media: 0,0254 y Desviación estándar: 1,0002, usando 2000 números. Nótese que la media y la desviación estándar no son exactamente 0 y 1 respectivamente, a medida que se aumenta la cantidad de números usados la media y la desviación estándar tienden a acercarse a 0 y 1. En la misma imagen del ruido blanco el algoritmo arroja la gráfica de la autocorrelación del proceso junto a los intervalos de confianza del 95 % y del 99 % con líneas sólidas y punteadas respectivamente.

Nótese que la media es cercana a 0, su desviación estándar es constante y que su autocorrelación tiende a cero. Que este proceso tenga una autocorrelación cercana a cero se puede justificar entendiendo que la autocorrelación de un proceso estocástico $X(t)$ se define como:

$$R_X(t') =: \mathbb{E}[X(t)X(t + t')]. \quad (4.1)$$

Si $X(t)$ es un ruido blanco gaussiano, entonces sus muestras son independientes y siguen una distribución normal con media cero y varianza σ^2 , en el caso de arriba $\sigma = 1$. Por lo tanto, la función de autocorrelación para el ruido blanco se puede escribir como:

$$R_X(t') = E[X(t)X(t+t')] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } t' = 0 \\ 0 & \text{si } t' \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } t' = 0 \\ 0 & \text{si } t' \neq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Esto se debe a que cuando $t' = 0$, las muestras $X(t)$ y $X(t+t')$ son iguales y su producto es igual a su varianza. Cuando $t' \neq 0$, las muestras $X(t)$ y $X(t+t')$ son independientes y su producto tiene una esperanza de cero, ya que la media de cada muestra es cero. Por lo tanto, el ruido blanco gaussiano tiene una función de autocorrelación que es cero en todos los puntos excepto en el origen.

4.2. Simulación de un Proceso de Wiener

El proceso de Wiener $\{W_t : t \geq 0\}$ puede simularse considerando que $W_t - W_s$ es una variable aleatoria normal con media 0 y varianza $t - s$, es decir desviación estándar $\sqrt{t - s}$. Con esto en mente entonces $dW_t = \xi_t \sqrt{dt}$ donde ξ_t es una variable aleatoria gaussiana con media 0 y desviación estándar 1:

$$W_t = W_0 + \int dW_t = \int \xi_t \sqrt{dt} = \sum_t \xi_t \sqrt{\Delta t}, \quad (4.3)$$

donde se usó $W_0 = 0$. Esto puede simularse de la siguiente manera en Python:

```

1  # Generación de un proceso de Wiener
2  def proceso_wiener(T: float, Nt: int):
3      np.random.seed(42)
4
5      t = np.linspace(0, T, Nt)
6      dt = T/(Nt-1)
7
8      # Generar los incrementos del proceso de Wiener
9      dW = pd.Series(np.sqrt(dt) * np.random.normal(0, 1, size=Nt-1))
10
11     W = np.zeros(Nt)
12     # Inicializando W(0)=0
13     W[1:] = dW
14
15     # Calcular el proceso de Wiener como la suma acumulada de los incrementos
16     W = W.cumsum()
17
18     return t, W

```

El código de arriba genera la siguiente gráfica:



Figura 4.2: Representación de un proceso de Wiener durante 10 segundos con intervalos de tiempo $\Delta t = 10/199s$.

Esta gráfica pudiérase pensarse como un movimiento Browniano donde un objeto/cuerpo se mueve en una dimensión. No obstante con la finalidad de introducir este ruido a la ECE se deberá generalizar este proceso al caso bidimensional para así tener un ruido en el espacio-tiempo. Ahora abordaremos un elemento necesario que nos permitirá modelar este ruido espacio-temporal conocido como la hoja browniana.

4.3. Proceso de Q -Wiener

Partamos de la ECE con ruido aditivo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \dot{W} \quad (4.4)$$

nótese que esta ecuación puede ser representada de la siguiente manera:

$$u_t = \theta u_{xx} + \sigma \dot{W}(t, x) \quad \implies \quad du = \theta u_{xx} dt + \sigma \dot{W}(t, x) dt, \quad x \in \bar{U} \subset \mathbb{R} \quad (4.5)$$

Esta ecuación puede ser tratada por ejemplo usando la integral de Walsh aunque también puede ser tratada usando el método de Euler-Maruyama. El enfoque adoptado en esta parte será similar al de la sección 2.2.3 donde se encuentra una solución usando series de Fourier. Con la finalidad de llevar a cabo este procedimiento la ecuación será tratada como una ecuación semilineal en $L^2(\bar{U})$ y trabajando con un proceso Gaussiano que toma valores en $L^2(\bar{U})$ (este es el motivo por el cual se introdujeron los procesos gaussiano con valores en un espacio de Hilbert previamente), en vez de trabajar directamente con el campo aleatorio $\dot{W}(x, t)$. Con este objetivo se introducen en esta sección los procesos de Q -Wiener.

La idea básicamente en relación a este tópico consiste en usar un espacio de Hilbert separable U_H con norma $\|\cdot\|_{U_H}$ y producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{U_H}$ y definir el proceso de Q -Wiener $\{W(t) : t \geq 0\}$ como un proceso con valores en U_H . Con esta perspectiva será necesario rehacer la construcción de la hoja browniana bajo estas nuevas consideraciones.

Cada $W(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana que toma valores en U_H y tiene un operador de covarianza bien definido (como se hizo anteriormente). El operador de covarianza en $t = 1$ está denotado por Q y satisface la siguiente suposición:

Teorema 4.3.1. $Q \in \mathcal{L}(U)$ es definida no-negativa y simétrica, además Q tiene una base ortonormal $\{\xi_j : j \in \mathbb{N}\}$ de autofunciones con autovalores correspondientes $q_j \geq 0$ tales que $\sum_{j \in \mathbb{N}} q_j < \infty$.

Ahora definamos lo que sería un proceso de Q -Wiener en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ be a filtered probability space [Gabriel J. Lord, 2014] de la siguiente manera

Definición 4.3.1 (Proceso Q -Wiener). Un proceso que toma valores en U $\{W(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Q -Wiener si

1. $W(0) = 0$ a.s.,
2. $W(t)$ es una función continua $\mathbb{R}^+ \rightarrow U$, para cada $\omega \in \Omega$,
3. $W(t)$ está adaptado a la filtración \mathcal{F}_t y $W_t - W(s)$ es independiente de \mathcal{F}_s para $s < t$
4. $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, (t - s)Q)$ para todo $0 \leq s \leq t$.

donde $\mathcal{N}(0, (t - s)Q)$ representa a la distribución normal de media cero y varianza $(t - s)Q$

Donde N Para entender el contexto de lo que viene será necesario aclarar la diferencia entre un ruido blanco y un ruido coloreado (que es lo que se desarrollará acá). La diferencia básicamente radica en si su representación en la base ortonormal de funciones escogida es una mezcla homogénea (ruido blanco) de funciones de la base o una mezcla heterogénea (ruido coloreado) de las mismas.

4.3.1. Representación en L^2 del Ruido Blanco

Supongamos que deseamos modelar un ruido blanco entre en $[0, 1]$, la idea sería la siguiente, sea $\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}$ una base ortonormal de $L^2(0, 1)$. Entonces si $\phi_j(t) = \sqrt{2} \sin(j\pi t)$ entonces cada ϕ_j representa una onda y j es conocido como el número de onda. El ruido blanco al ser representado en esta base se puede pensar como un proceso estocástico el cual consiste de cantidad iguales aleatorias de cada función de la base. Es decir:

$$\dot{W}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \phi_j(t) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \sin(j\pi t), \quad \text{donde } \xi_j \sim N(0, 1) \text{ iid.} \quad (4.6)$$

la media y la covarianza pueden verificarse de manera rápida:

$$\mathbb{E}[\dot{W}(t)] = \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \phi_j(t) \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(t) \mathbb{E}[\xi_j] = 0 \quad (4.7a)$$

$$\mathbb{E}[\dot{W}(s)\dot{W}(t)] = \mathbb{E} \left[\sum_{j,k}^{\infty} \xi_j \xi_k \phi_j(s) \phi_k(t) \right] = \sum_{j,k}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_j \xi_k] \phi_j(s) \phi_k(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(s) \phi_j(t). \quad (4.7b)$$

La ortonormalidad de la base hace que la covarianza de $\dot{W}(t)$ se comporte como una delta de dirac es decir que $\mathbb{E}[\dot{W}(s)\dot{W}(t)] = Cov[\dot{W}(s), \dot{W}(t)] = \delta(s - t)$ (de la misma manera en la que se comprobó previamente). Este comportamiento de la delta deja entrever varias cosas, como por

ejemplo que el ruido blanco en instantes diferentes no está correlacionado, además que la varianza $\mathbb{E}[\dot{W}(t)^2] = \infty$. Es decir que el ruido blanco no está bien definido en $L^2(U)$ porque la suma 4.6 no converge.

Ilustremos esta característica graficando tres caminos muestrales de la siguiente ecuación:

$$\dot{W}_J(t) = \sum_{j=1}^J \xi_j \phi_j(t) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^J \xi_j \sin(j\pi t) \quad (4.8)$$

para realizarlo en Python se hizo una vectorización:

```

1  # Representación Espectral del Ruido Blanco
2  def generar_WN(J: int, tmin: float, tmax: float, numt: int):
3      x = np.arange(1, J+1)
4      t = np.linspace(tmin, tmax, numt)
5
6      xi = np.random.normal(0, 1, J)
7      seno = np.sin(np.outer(x * np.pi, t))
8
9      WN = np.dot(xi, np.sqrt(2)*seno)
10     return t, WN

```

el resultado obtenido es el siguiente: como se puede ver a medida que J aumenta también aumenta

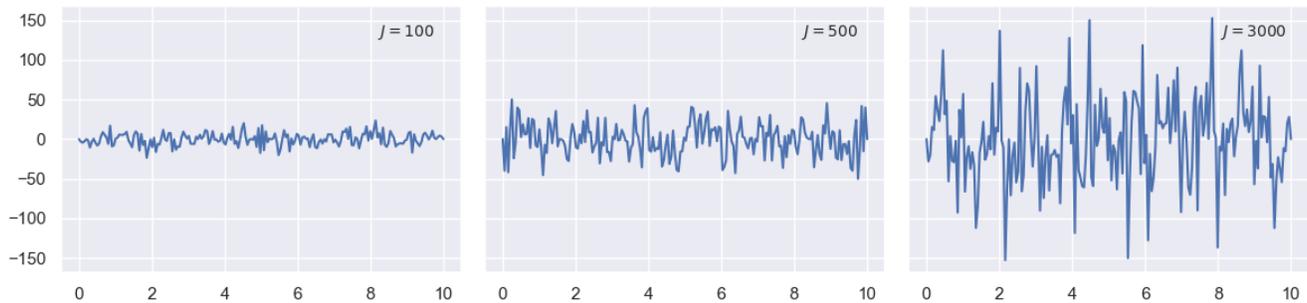


Figura 4.3: Ruido Blanco representado para J igual a 100, 500 y 3000.

el ruido $\dot{W}(t)$, mostrando la divergencia de $\dot{W}(t)$.

4.3.2. Representación en L^2 del Ruido Coloreado

Para representar el ruido coloreado lo podemos hacer de la siguiente manera:

$$\dot{W}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\nu_j} \xi_j \phi_j(t), \quad \text{donde } \xi_j \sim N(0, 1) \text{ iid y } \nu_j \geq 0. \quad (4.9)$$

Nótese que se puede pensar en el ruido blanco como el caso especial en que los ν_j son constantes. En este caso del ruido coloreado las variables aleatorias $\dot{W}(t)$ y $\dot{W}(s)$ están correlacionadas. Esto se puede probar con facilidad por medio de la covarianza:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}[\dot{W}(s), \dot{W}(t)] &= \mathbb{E}[\dot{W}(s)\dot{W}(t)] - \mathbb{E}[\dot{W}(s)]\mathbb{E}[\dot{W}(t)] = \mathbb{E}[\dot{W}(s)\dot{W}(t)] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{j,k}^{\infty} \sqrt{\nu_j \nu_k} \xi_j \xi_k \phi_j(s) \phi_k(t) \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \mathbb{E}[\xi_j^2] \phi_j(s) \phi_j(t) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \phi_j(s) \phi_j(t)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Como los ν_j son diferente de cero entonces la correlación es diferente de cero también. Existe un caso interesante que es el de la elección de de los elementos de la base de manera tal que coincida con las autofunciones de la función de covarianza, a esta expansión se le conoce como la *expansión de Karhunen-Loève* [Gabriel J. Lord, 2014].

Como se vió con el teorema 4.3.1 los q_j han de ser los autovalores asociados a la base ortonormal $\{\xi_j : j \in \mathbb{N}\}$ de autofunciones, donde estos autovalores son no-negativos y la serie $\sum_{j \in \mathbb{N}} q_j < \infty$. Con la finalidad de explorar esto primero desarrollemos unas ideas relacionadas a la descomposición espectral relacionadas a procesos estocásticos. Sea $\{X(t) : t \in \mathcal{T}\}$ un proceso Guassiano que toma valores reales con media $\mu(t)$ y función de covarianza $C(s, t)$. Para $t_1, \dots, t_N \in \mathcal{T}$. Entonces

$$\mathbf{X} = [X(t_1), \dots, X(t_N)]^\top \sim N(\boldsymbol{\mu}, C_N)$$

donde C_N es una matriz real, simétrica y positiva definida y por lo tanto admite una factorización de Choleski en dos matrices triangulares V que pueden ser determinadas:

$$C_N = V^\top V, \tag{4.11}$$

las muestras de $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, C_N)$ pueden ser generadas por medio de:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + V^\top \boldsymbol{\xi} \tag{4.12}$$

donde el vector $\boldsymbol{\xi} := [\xi_1, \dots, \xi_N]^\top$ con componentes iid $\xi_j \sim N(0, 1)$. En este punto se introduce el método alternativo para representar el proceso gaussiano conocido como la descomposición espectral:

Teorema 4.3.2 (Descomposición Espectral). *Toda matriz real simétrica A puede ser escrita como $A = U\Sigma U^\top$, donde U es una matriz ortonormal cuyas columnas u_j son autovectores de A y Σ es una matriz diagonal $N \times N$ cuyas entradas v_j son los autovalores reales de A . La forma $U\Sigma U^\top$ es conocida como la descomposición espectral de A .*

Aplicando este teorema a $C_N = U\Sigma U^\top$, entonces los autovalores podrán ser ordenados de manera tal que $\nu_1 \geq \nu_2 \cdots \nu_N \geq 0$. Entonces:

$$C_N = U\Sigma U^\top = U\Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2}U^\top = U\Sigma^{1/2} \left(U\Sigma^{1/2} \right)^\top = V^\top V \tag{4.13}$$

Definiendo $V^\top := U\Sigma^{1/2}$, donde $\Sigma^{1/2}$ es una matriz diagonal tal que sus entradas se relacionan con los autovalores de la matriz de covarianza de la siguiente manera:

$$C_N \phi_j = \nu_j \phi_j \implies C_N \phi_j = V^\top V \phi_j = V^\top \eta_j \phi_j = \eta_j V^\top \phi_j = \eta_j^2 \phi_j = \nu_j \phi_j \implies \eta_j = \sqrt{\nu_j} \tag{4.14}$$

Los valores de la matriz diagonal $\Sigma^{1/2}$ son $\sqrt{\nu_j}$. Entonces:

$$V^T \boldsymbol{\xi} = U \Sigma^{1/2} \boldsymbol{\xi} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N) \begin{pmatrix} \sqrt{\nu_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\nu_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\nu_N} \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi} = \sum_{j=1}^N \sqrt{\nu_j} \mathbf{u}_j \xi_j \quad (4.15)$$

por lo tanto

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + V^T \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=1}^N \sqrt{\nu_j} \mathbf{u}_j \xi_j, \quad \xi_j \sim N(0, 1) \text{ iid}, \quad (4.16)$$

podemos generar muestras de $N(\boldsymbol{\mu}, C_N)$ luego de calcular los autovalores y autovectores de la función de covarianza C_N . La generalización de la descomposición espectral de arriba para procesos estocásticos $X(t)$ es llamada la expansión de Karhunen-Loève.

La idea en relación a la expansión de Karhunen-Loève es la siguiente, sea $\mu(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ y considere un proceso de media cero $X(t) - \mu(t)$. Estamos interesados en caminos muestrales $X(\omega, t) - \mu(t)$ como una serie representada en una base ortonormal $\{\phi_j : j \in \mathbb{N}\}$ de $L^2(\mathcal{T})$. Esto es,

$$X(\omega, t) - \mu(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(\omega) \phi_j(t) \quad (4.17)$$

donde los coeficientes γ_j son variables aleatorias que se pueden conseguir como se hace en el apéndice para el caso determinista A.3.2

$$\gamma_j(\omega) := \langle X(\omega, t) - \mu(t), \phi_j(t) \rangle_{L^2(\mathcal{T})} \quad (4.18)$$

Sea $C(s, t)$ la función de covarianza del proceso $X(t)$ y definamos al operador integral \mathcal{C} por

$$(\mathcal{C}f)(t) := \int_{\mathcal{T}} C(s, t) f(s) ds \quad \text{para } f \in L^2(\mathcal{T}). \quad (4.19)$$

La expansión de Karhunen-Loève es el nombre dado a la ecuación 4.17 cuando las funciones ϕ_j son escogidas como las autofunciones del operador de covarianza \mathcal{C} . Nótese las similitudes con la descomposición y expansión espectral 4.16 de una variable aleatoria multivariada, por esta similitud la ecuación 4.16 es en algunos casos llamadas la expansión Karhunen-Loève discreta.

Proceso de Wiener como una Expansión de Karhunen-Loève

Con la finalidad de ilustrar la utilidad de la expansión Karhunen-Loève vamos a representar el proceso de Wiener en $L^2(0, T)$. Recordemos que la función de covarianza de este proceso es $C(s, t) = \min(s, t)$, identifiquemos cuáles son las autofunciones ϕ y autovalores λ de la función de covarianza:

$$(\mathcal{C}\phi)(t) = \int_0^T C(s, t) \phi(s) ds = \int_0^T \min(s, t) \phi(s) ds = \int_0^t s \phi(s) ds + t \int_t^T \phi(s) ds = \lambda \phi(t) \quad (4.20)$$

derivando la ecuación anterior:

$$t\phi(t) + \int_t^T \phi(s) ds - t\phi(t) = \lambda\phi'(t) \implies \int_t^T \phi(s) ds = \lambda\phi'(t)$$

y derivando de nuevo:

$$-\phi(t) = \lambda\phi''(t) \implies \phi'' + \frac{1}{\lambda}\phi = 0 \quad (4.21)$$

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta de manera tal que:

$$\phi(t) = A \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + B \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad (4.22)$$

las condiciones para esta ecuación diferencial se obtienen de 4.20, nótese que para $\phi(t=0) = 0$, por lo tanto $A = 0$, por otro lado para $t = T$:

$$\int_0^T s\phi(s)ds = \lambda\phi(T) \implies B \int_0^T s \sin\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\right) ds = \lambda B \sin\left(\frac{T}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad (4.23)$$

donde:

$$\begin{aligned} \int_0^T s \sin\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\right) ds &= -T\sqrt{\lambda} \cos\left(\frac{T}{\sqrt{\lambda}}\right) + \lambda \sin\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\right) \Big|_0^T \\ &= -T\sqrt{\lambda} \cos\left(\frac{T}{\sqrt{\lambda}}\right) + \lambda \sin\left(\frac{T}{\sqrt{\lambda}}\right) = \lambda \sin\left(\frac{T}{\sqrt{\lambda}}\right) \end{aligned}$$

es decir que:

$$-T\sqrt{\lambda} \cos\left(\frac{T}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \implies \frac{T}{\sqrt{\lambda_j}} = \left(j + \frac{1}{2}\right) \pi \implies \lambda_j = \frac{T^2}{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \quad (4.24)$$

es decir que las autofunciones serían:

$$\phi_j(t) = B_j \sin\left[\left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{T}\right] \quad (4.25)$$

con la finalidad de que estas funciones formen una base ortonormal:

$$\int_0^T \phi_j^2(t)dt = B_j^2 \int_0^T \sin^2\left[\left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{T}\right] dt = \frac{B_j^2}{2} \int_0^T \left[1 - \cos\left[2\left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{T}\right]\right] dt = \frac{TB_j^2}{2} = 1 \quad (4.26)$$

entonces $B = \sqrt{2/T}$ y por lo tanto:

$$\phi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left[\left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{T}\right], \quad \lambda_j = \frac{T^2}{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \quad (4.27)$$

nótese que los autovalores de 4.21 no son los mismos de la función de covarianza y que los autovalores de la ecuación 4.21 son $\nu_j = 1/\sqrt{\lambda_j}$, con esto en mente entonces se puede expresar el proceso de Wiener en el intervalo $[0, T]$ como:

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(\omega) \phi_j(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{(j + 1/2)\pi} \sin\left[\left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{T}\right] \xi_j \quad (4.28)$$

donde las ξ_j son iid y $\xi_j \sim N(0, 1)$. En el caso del proceso de Q -Wiener los coeficientes no son los autovalores asociados a las autofunciones ϕ_j y las variables aleatorias no son las ξ_j sino unos procesos de Wiener iid.

Esta representación puede ser simulada al truncar la serie hasta algún J . Con esto en mente:

$$W(t) = \sum_{j=0}^J \frac{\sqrt{2}}{(j + 1/2)\pi} \sin \left[\left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T} \right] \xi_j \quad (4.29)$$

el código en python para generar este proceso sería:

```

1  # Generar un proceso de Wiener con la expansión de Karhunen-Loève
2  def generar_WKL(J: int, T: float, Nt: int, seed=42):
3      np.random.seed(seed)
4      j = np.arange(0, J)
5      t = np.linspace(0, T, Nt)
6
7      xi = np.random.normal(0, 1, J)
8      coef = np.array([np.sqrt(2)/((j+0.5)*np.pi) for j in range(J)])
9
10     seno = np.sin(np.outer((j+0.5)*np.pi/T, t))
11
12     WN = np.dot(xi*coef, seno)
13
14     return t, WN

```

el resultado de este código se puede ver en la imagen 4.4 para distintos valores de J .

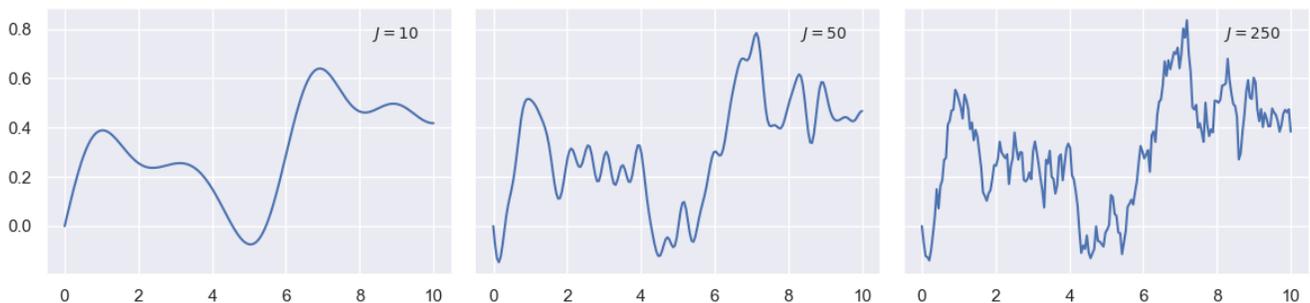


Figura 4.4: Proceso de Wiener para J igual a 10, 50 y 240.

Una expresión similar será usada para la generación del proceso de Q -Wiener.

Coefficientes y Autofunciones del Proceso de Q -Wiener

Teniendo estas herramientas podemos volver a la ecuación 4.9 asociada al ruido coloreado, se puede entender ahora esta ecuación como una especie de analogía a la expansión Karhunen-Loève discreta con el proceso estocástico teniendo media 0, ya que se representa el proceso estocástico como una combinación lineal de autofunciones χ_j de Q . Enunciemos este proceso ahora como un teorema:

Teorema 4.3.3. *Sea Q una matriz que satisface el teorema 4.3.1. Entonces, un proceso $W(t)$ es un proceso de Q -Wiener si y solo si*

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{q_j} \chi_j \beta_j(t), \quad a.s., \quad (4.30)$$

donde $\beta_j(t)$ son movimientos \mathcal{F}_t -Brownianos iid y la serie converge en $L^2(\Omega, U)$. Además la ecuación de arriba converge en $L^2(\Omega, C([0, T], U))$ para cualquier $T > 0$.

Donde Ω y U están definidos de acuerdo a 4.3.1, es decir está Ω está definido en un espacio medible y el espacio $L^2(\Omega, U)$ es el conjunto de las funciones \mathcal{F} -medibles $u : \Omega \rightarrow U$ tal que $\|u\|_{L^2(\Omega, U)} < \infty$. Por otro lado $C([0, T], U)$ es un espacio de Banach.

Nótese que algunas de las diferencias que hay entre 4.16 y 4.30 es que para la primera ecuación la expansión se hace con un vector gaussiano y en la segunda con movimientos brownianos que permiten introducir el factor temporal. De manera que como $W \in L^2(\Omega, C([0, T], U))$ y sus caminos muestrales pertenecen a $C([0, T], U)$ a.s. podemos escoger una versión de $W(t)$ que sea continua y que satisfaga la definición de un proceso de Q -Wiener.

Elección de una Versión del Proceso de Q -Wiener

Ahora siguiendo con la línea de ideas de [Gabriel J. Lord, 2014], sea $U = L^2(D)$ para un dominio D . Buscamos construir un proceso de Q -Wiener que tome valores en $H^r(D)$ (el espacio de Sobolev) para un $r \geq 0$. Esto puede hacerse escogiendo las autofunciones de χ_j y los autovalores de q_j del operador de covarianza con una tasa apropiada de decaimiento.

El uso de los espacios de Sobolev acá está justificado en [Gabriel J. Lord, 2014]. Pero primero entendamos que son estos espacios:

Definición 4.3.2 (Espacios de Sobolev). Sea D un dominio y Y un espacio de Banach. Para $p \geq 1$, el espacio de Sobolev $W^{r,p}(D, Y)$ es el conjunto de funciones cuyas derivadas débiles hasta el orden $r \in \mathbb{N}$ están en $L^p(D, Y)$, que es

$$W^{r,p}(D, Y) := \{u : \mathcal{D}^\alpha u \in L^p(D, Y) \text{ si } |\alpha| \leq r\} \quad (4.31)$$

Si $p = 2$ y H es un espacio de Hilbert se suele usar $H^r(D, H)$ para denotar $W^{r,2}(D, H)$.

adicionalmente abreviamos $H^r(D, \mathbb{R})$ como $H^r(D)$. Para el caso de condiciones periódicas:

$$H_{per}^2(a, b) := \{u \in H^2(a, b) : u(a) = u(b) \text{ y } u_x(a) = u_x(b)\}. \quad (4.32)$$

Un estudio con mayor profundidad de esto se puede conseguir en [Gabriel J. Lord, 2014] de momento ya tenemos la nomenclatura necesaria y pasaremos a plantear la ecuación de calor como una ecuación en L^2 .

Supongamos que $D = [0, a]$ entonces $U = L^2(0, a)$ y dado un $r \geq 0$ definimos el operador de clase traza $Q \in \mathcal{L}(U)$ y por consiguiente un proceso de Q -Wiener $W(t)$, tal que $W(t)$ toma valores en $H_{per}^2(0, a) \subset U$, esta elección se deriva del enfoque adoptado en [Gabriel J. Lord, 2014], en el cual se plantea la ecuación de calor de una manera diferente. La idea es la siguiente (en el caso determinista):

$$u_t = ku_{xx} \quad \Longrightarrow \quad u_t = -Au, \quad u(0) = u_0 \in H = L^2(D) \quad (4.33)$$

donde $Au = -ku_{xx}$ para algún dominio $\mathcal{D}(A)$ de A , con las condiciones de Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$, u queda bien definida en $u \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$. El operador de Laplace en este dominio tiene autofunciones $\phi_j(x) = \sqrt{2} \sin(j\pi x)$ las cuales usaremos más adelante. Acá tomaremos a los $\chi_j = \phi_j$ y considerando que si $u \in L^2(0, a)$, entonces u puede ser representada con los coeficientes de Fourier $q_j = \mathcal{O}(j^{-(2r+1+\epsilon)})$ para algún $r, \epsilon > 0$ y $u \in H^r(0, 2\pi)$.

De manera que podremos describir el ruido coloreado en $L^2(0, a)$ con las autofunciones $\chi_j(x) = \sqrt{2/a} \sin(j\pi x)$ y con los coeficientes $q_j = |j|^{-(2r+1+\epsilon)}$ lo cual lleva a que este proceso sea un proceso que toma valores de $H_0^r(0, a)$. Nótese que acá los coeficientes q_j no fueron tomados en relación a los autovalores de las autofunciones χ_j y por eso esta representación no es la de la expansión de Karhunen-Loève, aunque tenga elementos similares.

4.3.3. Aproximación de Caminos Muestrales de un Proceso de Q -Wiener

Consideremos un proceso de Q -Wiener que toma valores de $L^2(D)$. La aproximación numérica de los caminos muestrales de $W(t)$ se consigue de manera directa cuando se conocen las autofunciones de la función de covarianza Q . Por este motivo el primer paso será identificar estas autofunciones. Introduzcamos primero un conjunto finito de puntos muestrales $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K \in D$ y busquemos generar muestras de $W(\mathbf{x}_1, t), \dots, W(\mathbf{x}_K, t)$ para $t > 0$. Esto se puede conseguir aproximando $W(t)$ a la versión finita de 4.30 $W^J(t)$

$$W^J(t) = \sum_{j=1}^J \sqrt{q_j} \chi_j \beta_j(t) \quad (4.34)$$

y haciendo muestreos de las variables aleatorias $W^J(\mathbf{x}_k, t)$. Previamente dada una función de covarianza Q se consiguieron las autofunciones y autovalores asociados. Convenientemente las autofunciones son funciones trigonométricas que al seleccionar de manera cuidadosa los puntos muestrales \mathbf{x}_k , permiten la evaluación de $W^J(\mathbf{x}_k, t)$ para $k = 1, \dots, K$ con una sola transformada de Fourier. Este es un método eficiente de generar muestras aproximadas de $W(t)$.

El muestreo del mismo camino muestral $W(t)$ para pasos de tiempo diferentes requiere de algunas consideraciones importantes. La primera es la necesidad de usar el mismo camino muestral en los muestreos. La segunda consideración es que al no tener una solución explícita para $W(t)$, vamos a hacer un muestreo temporal para así construir un camino muestral, esto se hará introduciendo un pequeño intervalo de tiempo $\Delta t_{ref} = T/N_{ref}$. Con la finalidad de mantener el mismo camino muestral, los incrementos $W((n+1)\Delta t_{ref}) - W(n\Delta t_{ref})$ para los caminos muestrales de referencias son usados para generar los incrementos requeridos sobre un paso de tiempo $\Delta t = \kappa \Delta t_{ref}$

$$W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t) = \sum_{j=1}^{(n+1)\kappa-1} (W((j+1)\Delta t_{ref}) - W(j\Delta t_{ref})) \quad (4.35)$$

Para el caso del proceso en estudio, primero consigamos $W^J(t_{n+1}) - W^J(t_n)$ de 4.34, donde $t_n =$

$n\Delta t_{\text{ref}}$:

$$W^J(t_{n+1}) - W^J(t_n) = \sum_{j=1}^J \sqrt{q_j} \chi_j \beta_j(t_{n+1}) - \sum_{j=1}^J \sqrt{q_j} \chi_j \beta_j(t_n) = \sum_{j=1}^J \sqrt{q_j} \chi_j [\beta_j(t_{n+1}) - \beta_j(t_n)]$$

considerando que los $\beta_j(t_n)$ son procesos de Wiener, entonces la variable aleatoria $\beta_j(t_{n+1}) - \beta_j(t_n) \sim N(0, \sqrt{t_{n+1} - t_n})$ es decir que

$$\beta_j(t_{n+1}) - \beta_j(t_n) = \sqrt{t_{n+1} - t_n} \xi_j^n = \sqrt{(n+1)\Delta t_{\text{ref}} - n\Delta t_{\text{ref}}} = \sqrt{\Delta t_{\text{ref}}} \xi_j^n \quad (4.36)$$

donde los ξ_j^n son iid $\xi_j^n \sim N(0, 1)$. Entonces:

$$W^J(t_{n+1}) - W^J(t_n) = \sqrt{\Delta t_{\text{ref}}} \sum_{j=1}^J \sqrt{q_j} \chi_j \xi_j^n \quad (4.37)$$

Los incrementos sobre los intervalos de tamaño $\Delta t = \kappa \Delta t_{\text{ref}}$ serían:

$$W^J(t + \Delta t) - W^J(t) = \sum_{n=0}^{\kappa-1} (W^J(t + t_{n+1}) - W^J(t + t_n)). \quad (4.38)$$

La idea ahora consiste en poder pasar de $W^J(t_{n+1}) - W^J(t_n)$ a $W^J(x, t_{n+1}) - W^J(x, t_n)$ y hacer caminos muestrales que nos permitan obtener esta expresión. La idea como se comentó previamente consiste en escoger las autofunciones de manera tal que su representación permita introducir los puntos muestrales x_k . Para ello primeros consideremos que la transformada seno de Fourier discreta (DST-1) $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ está definida por:

$$y_k := \sum_{j=1}^N \sin\left(\frac{\pi j k}{N+1}\right) x_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.39)$$

Con esta ecuación podemos pensar en la transformada seno discreta del vector $J-1$ dimensional $[b_1 \xi_1^n, \dots, b_{J-1} \xi_{J-1}^n]$

$$y_k^{J-1} := \sum_{j=1}^{J-1} \sin\left(\frac{\pi j k}{J}\right) b_j \xi_j^n, \quad k = 1, \dots, J-1. \quad (4.40)$$

y comparando esta ecuación con 4.37 donde las autofunciones tienen una dependencia espacial entonces

$$W^{J-1}(t_{n+1}) - W^{J-1}(t_n) = \sum_{j=1}^{J-1} \sqrt{\Delta t_{\text{ref}} q_j} \chi_j(x) \xi_j^n \quad (4.41)$$

Nótese que las últimas dos ecuaciones pueden ser equivalentes, dejándonos ver que la expresión puede ser pensada como una DST-1 con funciones $\chi_j(x) = \sqrt{2/a} \sin(j\pi x)$ (que eran las autofunciones de la ecuación de calor $Au = -u_{xx}$). Tomando los $x_k = ka/J$ con $k = 1, \dots, J-1$ entonces

$$W^{J-1}(t_{n+1}, x_k) - W^{J-1}(t_n, x_k) = \sum_{j=1}^{J-1} \sqrt{\Delta t_{\text{ref}} q_j} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi j x_k}{a}\right) \xi_j^n = \sum_{j=1}^{J-1} b_j \sin\left(\frac{\pi j k}{J}\right) \xi_j^n \quad (4.42)$$

donde $b_j := \sqrt{2q_j \Delta t_{\text{ref}}/a}$ y los $q_j = |j|^{-(2r+1+\epsilon)}$. Con la finalidad de tener la mejor eficiencia usando la transformada rápida de Fourier (FFT), J deberá ser una potencia de 2. Estos elementos nos permiten ahora modelar la hoja Browniana como un proceso de Q -Wiener.

4.4. Simulación de la Hoja Browniana

El código usado para simular el proceso de Q -Wiener es:

```
1 # Función para la creación de los coeficientes bj
2 def func_bj(dtref, J, a, r):
3     j = np.array(range(1,J))           # Esto llega hasta J-1
4     epsilon = 0.01                    # Definición de epsilon
5     root_qj = j**(-(2*r+1+epsilon)/2) # Ecuación para la raíz de qj
6     bj = root_qj * np.sqrt(2*dtref/a) # bj coefficients
7     return bj
8
9 # Creación del proceso de Wiener
10 def func_dW(bj, kappa, N, seed=42):
11     np.random.seed(seed)
12
13     J = len(bj)+1
14     xijn = np.sum(np.random.randn(J-1, N, kappa), axis=2)
15
16     # Transformada de Fourier
17     jvals = [j for j in range(1,J)]
18     kval = [k for k in range(1,J)]
19     Sjk = np.sin(np.pi*np.outer(jvals, kval)/J)
20
21     bSjk = np.multiply(bj, Sjk)
22
23     # Estos elementos representan bj*sin(pi j k/J)xi_j^n
24     aux_e = np.array([np.multiply(bSjk, xijn[:,n]) for n in range(N)]).T
25
26     dWkn = aux_e.sum(axis=0)
27
28     W = np.zeros([J,N])
29     W[1:,:] = dWkn
30     W = W.cumsum(axis=1)
31
32     return W
```

con $J = 2^7 = 128$, $\Delta t_{\text{ref}} = 0,001$, $a = 1$, $\Delta t = 0,01$, $\kappa = \Delta t / \Delta t_{\text{ref}} = 10$, $N = 100$ y $T = N \cdot \Delta t = 1$, obteniendo las superficies que se ven en 4.5:

Podemos representar por ejemplo mostrar el camino muestral $W^J(1)$ en 4.6 bajo las mismas condiciones anteriores excepto $a = 8$ y $J = 2^8 = 256$:

En la sección siguiente se utilizará la hoja browniana coloreada para simular el ruido aditivo en la ecuación de calor estocástica.

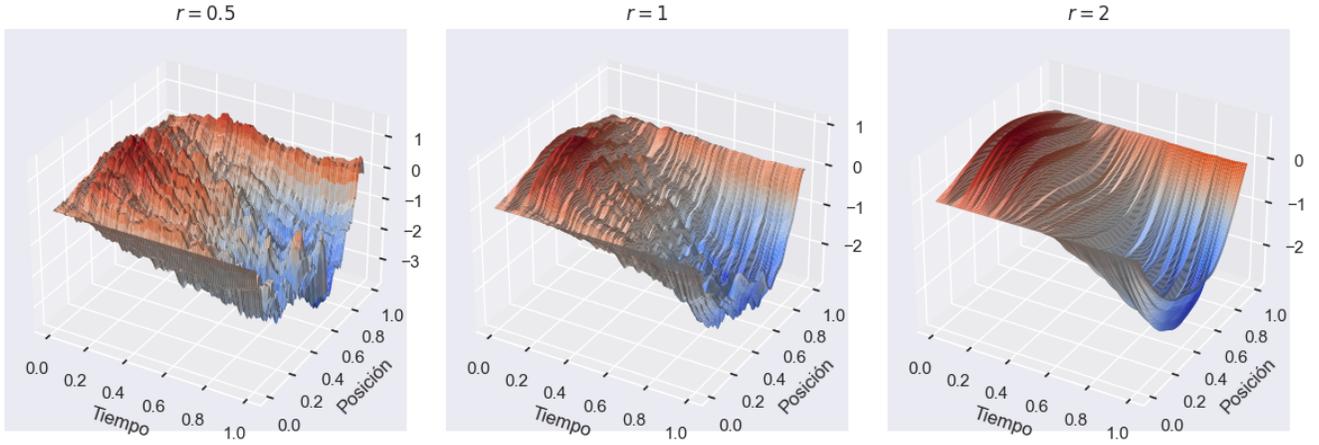


Figura 4.5: Proceso de Q -Wiener (la Hoja Browniana) variando el parámetro de regularidad r con los valores 0,5, 1 y 2 con $x \in [0, 1]$ y $t \in [0, 1]$

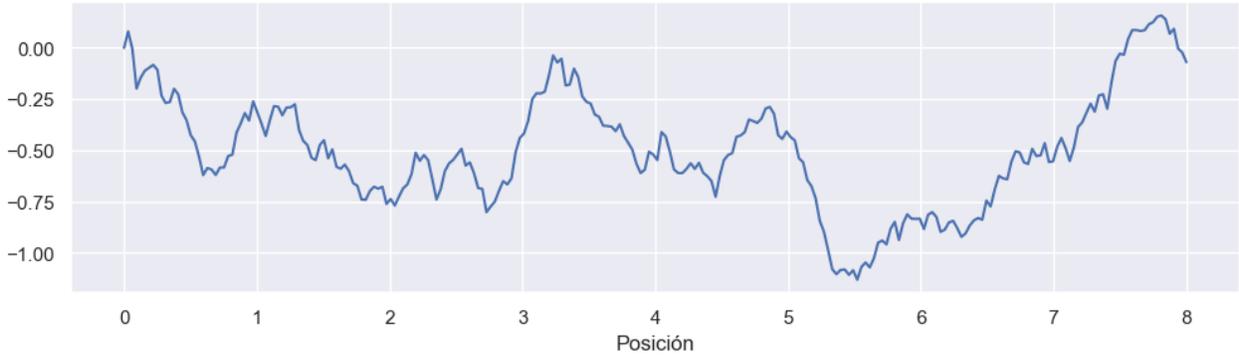


Figura 4.6: Camino muestral en $t = n\Delta t_{\text{ref}} = 1$ con $a = 8$.

4.5. Ecuación de Calor Estocástica con Ruido Aditivo

La ecuación de calor estocástica con ruido aditivo es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \dot{W} \quad (4.43)$$

Donde σ es una constante que calibra la influencia del ruido \dot{W} en la solución u , a esta constante se le conoce como el nivel de ruido y a \dot{W} se le conoce como un ruido blanco espacio-temporal. Esta ecuación puede ser escrita como:

$$du = \theta \Delta u dt + \sigma dW(t), \quad u(0) = u_0 \in L^2(D), \quad (4.44)$$

donde $\lambda > 0$ y las condiciones de contorno son de Dirichlet sobre el dominio D y $W(t)$ es un proceso de Q -Wiener. Exploremos primero lo que sería la solución fuerte a 4.44:

Definición 4.5.1 (solución fuerte). Un proceso predecible que toma valores en $H \{u(t) : t \in [0, T]\}$ es llamada una solución fuerte si

$$u(t) = u_0 - \theta \int_0^t Au(s) ds + \sigma \int_0^t dW(s) \quad (4.45)$$

esta forma de solución es muy restrictiva en la práctica ya que requiere que $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ donde $\mathcal{D}(A)^1$ es el dominio de A . En vez de esta formulación se usará la formulación débil o variacional de de 4.44. A diferencia del caso determinista no hay condición sobre du/dt . Definamos lo que sería la solución débil.

Definición 4.5.2 (solución débil). Un proceso predecible que toma valores de $H \{u(t) : t \in [0, T]\}$ es llamado una solución débil de 4.44 si

$$\langle u(t), v \rangle = \langle u_0, v \rangle - \theta \int_0^t \langle u(s), Av \rangle ds + \sigma \int_0^t \langle dW(s), v \rangle, \quad \forall t \in [0, T], v \in \mathcal{D}(A) \quad (4.46)$$

pero como $W(t)$ es un proceso de Wiener, entonces usando 4.30:

$$\int_0^t \langle dW(s), v \rangle = \int_0^t \left\langle d \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{q_j} \chi_j \beta_j(s) \right], v \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \langle \sqrt{q_j} \xi_j, v \rangle d\beta_j(s).$$

Esta forma es conveniente para realizar aproximaciones. Analicemos ahora la ecuación de calor estocástica en una dimensión. Consideremos la solución débil a la ECE 4.44 con $D = (0, \pi)$, de manera que para tratar este problema consigamos las autofunciones asociadas a la ecuación de calor determinista, siguiendo el mismo procedimiento de A.3.1 pero con el intervalo D entonces $\phi_j(x) = \sqrt{2/\pi} \sin(jx)$ con autovalores $\nu_j = j^2$ para $j \in \mathbb{N}$. Supongamos ahora que $W(t)$ es un proceso de Q -Wiener y las autofunciones χ_j de Q son las mismas que las autofunciones ϕ_j de A con $v \in \mathcal{D}(A)$, entonces una solución débil satisface

$$\langle u(t), v \rangle_{L^2(0,\pi)} = \langle u_0, v \rangle_{L^2(0,\pi)} + \theta \int_0^t \langle -u(x), Av \rangle_{L^2(0,\pi)} ds + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma \int_0^t \sqrt{q_j} \langle \phi_j, v \rangle_{L^2(0,\pi)} d\beta_j(s). \quad (4.47)$$

Representando a $u(t)$ como una serie de Fourier (es decir en $L^2(0, \pi)$) $u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(t) \phi_j$ para $\hat{u}_j(t) := \langle u(t), \phi_j \rangle_{L^2(0,\pi)}$. Entonces usando la ortogonalidad de la base (ver A.3.1) $v = \phi_j$ entonces:

$$\hat{u}_j(t) = \hat{u}_j(0) + \theta \int_0^t (-\nu_j) \hat{u}_j(s) ds + \sigma \int_0^t \sqrt{q_j} d\beta_j(s).$$

Por consiguiente, $\hat{u}_j(t)$ satisface la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica Ordinaria

$$d\hat{u}_j = -\theta \nu_j \hat{u}_j dt + \sigma \sqrt{q_j} d\beta_j(t) = -\theta j^2 \hat{u}_j dt + \sigma \sqrt{q_j} d\beta_j(t) \quad (4.48)$$

Esta ecuación se puede abordar como la ecuación de Itô unidimensional, Supongamos que:

$$du = f(u)dt + g(u)dW(t) \quad (4.49)$$

entonces:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \Phi}{\partial u} du + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} g^2 dt \quad (4.50)$$

Identificando acá $f(\hat{u}_j) = -\theta j^2 \hat{u}_j$ y $g(\hat{u}_j) = \sigma \sqrt{q_j}$, y haciendo $\Phi(t, \hat{u}_j) = e^{\alpha t} \hat{u}_j$, entonces:

$$d\Phi = e^{\alpha t} \hat{u}_j (\alpha - \theta j^2) dt + e^{\alpha t} (-\theta j^2 \hat{u}_j dt + \sigma \sqrt{q_j} e^{\alpha t} d\beta_j(t)) \quad (4.51)$$

¹Algunos detalles en relación al dominio del operador lineal A identificado como $\mathcal{D}(A)$ se consiguen en [Gabriel J. Lord, 2014]

escogiendo $\alpha = \theta j^2$ es decir α igual a los autovalores de $\phi_j(x)$:

$$e^{\theta j^2 t} \hat{u}_j - \hat{u}_j(0) = \sigma \sqrt{q_j} \int_0^t e^{\theta j^2 s} d\beta_j(s) \implies \hat{u}_j = \hat{u}_j(0) e^{-\theta j^2 t} + \sigma \sqrt{q_j} e^{-\theta j^2 t} \int_0^t e^{\theta j^2 s} d\beta_j(s), \quad (4.52)$$

esta ecuación se puede reescribir como:

$$\hat{u}_j = \hat{u}_j(0) e^{-\theta j^2 t} + \sigma \sqrt{q_j} e^{-\theta j^2 t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} e^{\theta j^2 n \Delta t} \xi_j^n \quad (4.53)$$

donde Δt representa el tamaño de los intervalos de tiempo en los que fue discretizado el tiempo. Usando 4.53 la solución de la ECE con ruido aditivo sería:

$$u(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(0) e^{-\theta j^2 t} \sin(jx) + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi j^{2r+1+\epsilon}}} \sin(jx) e^{-\theta j^2 t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} e^{\theta j^2 n \Delta t} \xi_j^n,$$

La extensión al caso espacial se abordará en la sección siguiente. Parte de la introducción de la relación espacial se puede hacer por medio de la condición inicial y escogiendo de manera específica los x en relación a la transformada de Fourier. Consideremos que $u(0, x) = u_0(x) = g(x) \in L^2(D)$ usando la ortonormalidad de la base podemos conseguir una expresión para $\hat{u}_j(0)$. Nótese que:

$$u(0, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(0) \sin(jx) = g(x)$$

con la ortonormalidad:

$$\int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(0) \sin(jx) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx) dx = \int_0^\pi g(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(jx) dx,$$

se consigue una expresión para $\hat{u}_j(0)$:

$$\hat{u}_j(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi g(x) \sin(jx) dx. \quad (4.54)$$

La solución a la ECE con ruido aditivo sería:

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(0) e^{-\theta j^2 t} \sin(jx) + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi j^{2r+1+\epsilon}}} \sin(jx) e^{-\theta j^2 t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} e^{\theta j^2 n \Delta t} \xi_j^n, \quad (4.55a)$$

$$\hat{u}_j(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi g(x) \sin(jx) dx. \quad (4.55b)$$

donde $g(x) \in L^2([0, \pi])$. Si por ejemplo se toma $g(x) = \sin(x)$ (y usando la ortonormalidad):

$$\hat{u}_j(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi g(x) \sin(jx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin(x) \sin(jx) dx = \begin{cases} 0, & j \neq 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & j = 1 \end{cases}$$

se obtiene:

$$u(t, x) = e^{-\theta t} \sin(x) + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi j^{2r+1+\epsilon}}} \sin(jx) e^{-\theta j^2 t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} e^{\theta j^2 n \Delta t} \xi_j^n \quad (4.56)$$

Acá hay varios comentarios que hacer. Nótese que los coeficientes $\hat{u}_j(t)$ en 4.48 son un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, es decir obedecen una ecuación diferencial estocástica ordinaria de la forma:

$$dP = -\theta P dt + \sigma dW(t) \quad (4.57)$$

la cual tiene la misma forma de 4.48, la solución al proceso de Ornstein-Uhlenbeck es un proceso Gaussiano y en virtud del teorema:

Teorema 4.5.1. *La distribución de probabilidad \mathbb{P}_X sobre $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathcal{T}}))$ de un proceso Gaussiano que toma valores reales $X(t)$ está únicamente determinado por su media $\mu : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ y su función de covarianza $C : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Por lo tanto el proceso estocástico que representan los coeficientes \hat{u}_j está únicamente determinado por su media y su varianza. Calculemos entonces la media y la covarianza de este proceso para el caso de 4.53:

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}[\hat{u}_j(t)] = \mathbb{E} \left[\hat{u}_j(0) e^{-\theta j^2 t} + \sigma \sqrt{q_j} e^{-\theta j^2 t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} e^{\theta j^2 n \Delta t} \xi_j^n \right] \\ &= \hat{u}_j(0) e^{-\theta j^2 t} + \sigma \sqrt{q_j} e^{-\theta j^2 t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} e^{\theta j^2 n \Delta t} \mathbb{E}[\xi_j^n] = \hat{u}_j(0) e^{-\theta j^2 t} \end{aligned} \quad (4.58)$$

por otro lado la covarianza es:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(s, t) &= \mathbb{E}[\hat{u}_j(s) \hat{u}_j(t)] - \mathbb{E}[\hat{u}_j(t)] \mathbb{E}[\hat{u}_j(s)] \\ &= \mathbb{E} \left[\hat{u}_j^2(0) e^{-\theta j^2 (t+s)} + \sigma \sqrt{q_j} \hat{u}_j(0) e^{-\theta j^2 (t+s)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{m=0}^{s/\Delta t} e^{\theta j^2 m \Delta t} \xi_j^m + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \sigma \sqrt{q_j} \hat{u}_j(0) e^{-\theta j^2 (t+s)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} e^{\theta j^2 n \Delta t} \xi_j^n + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \sigma^2 q_j e^{-\theta j^2 (t+s)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \sum_{m=0}^{s/\Delta t} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} e^{\theta j^2 (m+n) \Delta t} \xi_j^m \xi_j^n \right] - \hat{u}_j^2(0) e^{-\theta j^2 (s+t)} \\ &= \hat{u}_j^2(0) e^{-\theta j^2 (t+s)} + \sigma \sqrt{q_j} \hat{u}_j(0) e^{-\theta j^2 (t+s)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{m=0}^{s/\Delta t} e^{\theta j^2 m \Delta t} \mathbb{E}[\xi_j^m] + \dots \\ &\quad \dots + \sigma \sqrt{q_j} \hat{u}_j(0) e^{-\theta j^2 (t+s)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} e^{\theta j^2 n \Delta t} \mathbb{E}[\xi_j^n] + \dots \\ &\quad \dots + \sigma^2 q_j e^{-\theta j^2 (t+s)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \sum_{m=0}^{s/\Delta t} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} e^{\theta j^2 (m+n) \Delta t} \mathbb{E}[\xi_j^m \xi_j^n] - \hat{u}_j^2(0) e^{-\theta j^2 (s+t)} \end{aligned}$$

pero $\mathbb{E}[\xi_j^m] = 0$ y $\mathbb{E}[\xi_j^m \xi_j^n] = \delta^{mn}$, donde δ^{mn} es la delta de kronecker, además haciendo el cambio de variables s, t a $\min(s, t)$, $\max(s, t)$ y el cambio de índices m, n a m', n' , nótese que $s + t = \min(s, t) + \max(s, t)$:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(s, t) &= \sigma^2 q_j e^{-\theta j^2 (s+t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \sum_{m'=0}^{\max(s,t)/\Delta t} \sum_{n'=0}^{\min(s,t)/\Delta t} e^{\theta j^2 (m'+n')\Delta t} \delta^{m'n'} \\
&= \sigma^2 q_j e^{-\theta j^2 (s+t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \sum_{m'=0}^{\min(s,t)/\Delta t} \sum_{n'=0}^{\min(s,t)/\Delta t} e^{\theta j^2 (m'+n')\Delta t} \delta^{m'n'} \\
&= \sigma^2 q_j e^{-\theta j^2 (s+t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \sum_{m'=0}^{\min(s,t)/\Delta t} e^{2\theta j^2 m' \Delta t} \\
&= \sigma^2 q_j e^{-\theta j^2 (s+t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \sum_{m'=0}^{\min(s,t)/\Delta t} \left(e^{2\theta j^2 \Delta t} \right)^{m'} \\
\stackrel{\text{serie geométrica}}{\longrightarrow} &= \sigma^2 q_j e^{-\theta j^2 (s+t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \left[\frac{1 - \left(e^{2\theta j^2 \Delta t} \right)^{\frac{\min(s,t)}{\Delta t}}}{1 - e^{2\theta j^2 \Delta t}} \right] \\
&= \sigma^2 q_j e^{-\theta j^2 (s+t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \left[\frac{1 - e^{2\theta j^2 \min(s,t)}}{1 - e^{2\theta j^2 \Delta t}} \right] \\
&= \sigma^2 q_j e^{-\theta j^2 (s+t)} [1 - e^{2\theta j^2 \min(s,t)}] \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{1 - e^{2\theta j^2 \Delta t}} \\
\stackrel{\text{l'Hôpital}}{\longrightarrow} &= \sigma^2 q_j e^{-\theta j^2 (s+t)} [1 - e^{2\theta j^2 \min(s,t)}] \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{-2\theta j^2 e^{2\theta j^2 \Delta t}} \\
&= \frac{\sigma^2 q_j}{-2\theta j^2} e^{-\theta j^2 (s+t)} [1 - e^{2\theta j^2 \min(s,t)}] \\
\text{Cov}(s, t) &= \frac{\sigma^2 q_j}{2\theta j^2} e^{-\theta j^2 (s+t)} [e^{2\theta j^2 \min(s,t)} - 1]. \tag{4.59}
\end{aligned}$$

De acá podemos calcular la varianza por ejemplo

$$\text{Var}(\hat{u}_j(t)) = \frac{\sigma^2 q_j}{2\theta j^2} e^{-2\theta j^2 t} (e^{2\theta j^2 t} - 1) = \frac{\sigma^2 q_j}{2\theta j^2} (1 - e^{-2\theta j^2 t}). \tag{4.60}$$

Finalmente verifiquemos que $u(t) \in L^2(0, \pi)$, esto se puede verificar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^2(L^2(0,\pi),\Omega)}^2 &= \int_{L^2(0,\pi)} \int_{\Omega} u^2(x, \omega) dx d\mathbb{P} = \mathbb{E} \left[\int_{L^2(0,\pi)} u^2(x, \omega) dx \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{u}_j(t)|^2 \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} [|\hat{u}_j(t)|^2] = \sum_{j=1}^{\infty} \text{Var}(\hat{u}_j(t)) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma q_j}{2\theta j^2} (1 - e^{-2\theta j^2 t}). \tag{4.61}
\end{aligned}$$

La serie converge si la suma $\sum_{j=1}^{\infty} q_j/j^2$ es finita y esta suma es finita porque la covarianza Q es de clase traza [Gabriel J. Lord, 2014] con esto entonces la solución $u(t) \in L^2(0, \pi)$ casi seguramente.

4.5.1. Aproximación y Solución Numérica

La ecuación 4.56 puede ser aproximada utilizando las mismas consideraciones que se usaron en la sección *Aproximación de Caminos Muestrales de un Proceso de Q -Wiener* 4.3.3. Con la finalidad de

obtener una expresión similar se adoptará una notación similar, comenzando por identificar que Δt en 4.56 representa el Δt_{ref} , es decir este intervalo de tiempo es el que era “pequeño”. Adicionalmente haciendo la primera aproximación de $\lim_{\Delta t_{\text{ref}} \rightarrow 0} \Delta t_{\text{ref}} \approx \Delta t_{\text{ref}}$, además $t/\Delta t_{\text{ref}} = N_{\text{ref}}$ entonces:

$$\begin{aligned}
u(t, x) &\approx e^{-\theta t} \sin(x) + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi j^{2r+1+\epsilon}}} \sin(jx) e^{-\theta j^2 t} \sqrt{\Delta t_{\text{ref}}} \sum_{n=0}^{t/\Delta t_{\text{ref}}} e^{\theta j^2 n \Delta t_{\text{ref}}} \xi_j^n \\
&= e^{-\theta t} \sin(x) + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2q_j \Delta t_{\text{ref}}}{\pi}} \sin(jx) \sum_{n=0}^{t/\Delta t_{\text{ref}}} e^{\theta j^2 (n \Delta t_{\text{ref}} - t)} \xi_j^n \\
&= e^{-\theta t} \sin(x) + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jx) \sum_{n=0}^{t/\Delta t_{\text{ref}}} e^{\theta j^2 (n \Delta t_{\text{ref}} - t)} \xi_j^n,
\end{aligned}$$

si ahora discretizamos el espacio de la misma manera que se hizo anteriormente, con $x_k = k\pi/J$ con $k = 1 = 1, \dots, J$, nótese como $a = \pi$ y que si se trunca la serie hasta $J - 1$ se puede interpretar (como se hizo previamente) la expresión como una transformada seno discreta de Fourier y con esto los x pasarían a ser x_k :

$$u_k(t) \approx e^{-\theta t} \sin\left(\frac{k\pi}{J}\right) + \sigma \sum_{j=1}^J b_j \sin\left(\frac{jk\pi}{J}\right) \sum_{n=0}^{t/\Delta t_{\text{ref}}} e^{\theta j^2 (n \Delta t_{\text{ref}} - t)} \xi_j^n$$

donde nótese que la suma quedó hasta $J - 1$ por que el término J en la suma es cero. Usando el método de Euler-Maruyama podemos discretizar el tiempo $t = N\Delta t$ y como $t = \Delta t_{\text{ref}} N_{\text{ref}} = N\Delta t$, los $t_m = m\Delta t$ y además como $\Delta t = (N_{\text{ref}}/N)\Delta t_{\text{ref}} = \kappa\Delta t_{\text{ref}}$, entonces $t_m = m\kappa\Delta t_{\text{ref}}$ y con $t = T$ entonces:

$$\begin{aligned}
u_{km} &\approx e^{-m\kappa\theta\Delta t_{\text{ref}}} \sin\left(\frac{k\pi}{J}\right) + \sigma \sum_{j=1}^{J-1} b_j \sin\left(\frac{jk\pi}{J}\right) \sum_{n=0}^{m\kappa\Delta t_{\text{ref}}/\Delta t_{\text{ref}}} e^{\theta j^2 (n \Delta t_{\text{ref}} - m\kappa\Delta t_{\text{ref}})} \xi_j^n \\
u_{km} &= e^{-m\kappa\theta\Delta t_{\text{ref}}} \sin\left(\frac{k\pi}{J}\right) + \sigma \sum_{j=1}^{J-1} b_j \sin\left(\frac{jk\pi}{J}\right) \sum_{n=0}^{m\kappa} e^{-\theta j^2 \Delta t_{\text{ref}} (m\kappa - n)} \xi_j^n
\end{aligned} \tag{4.62}$$

esta ecuación de arriba puede ser simulada especificando los parámetros que tiene la ecuación.

4.5.2. Simulación en Python

Con esto en mente podemos pasar a la implementación en Python, cambiando el valor de semilla:

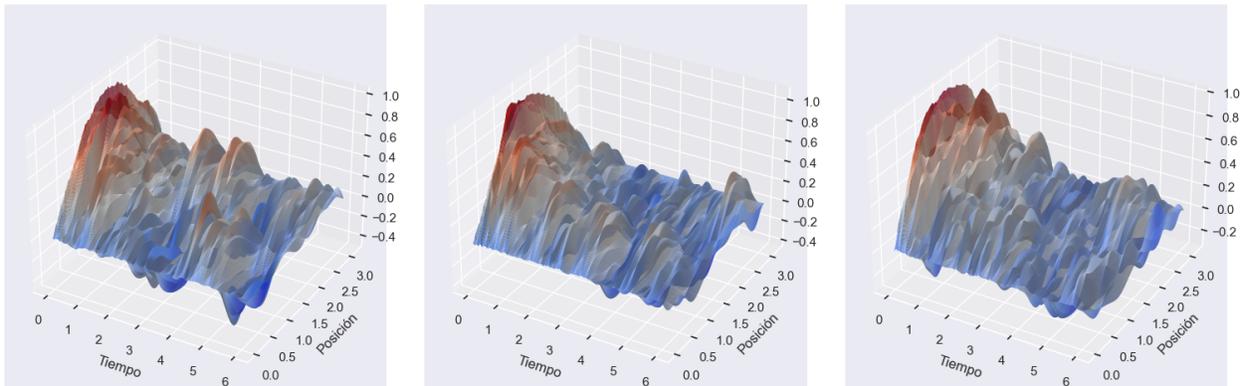


Figura 4.7: Temperatura para diferentes semillas [0, 13, 42]

la solución también puede ser representada en \mathbb{R}^2 representando la temperatura con colores:

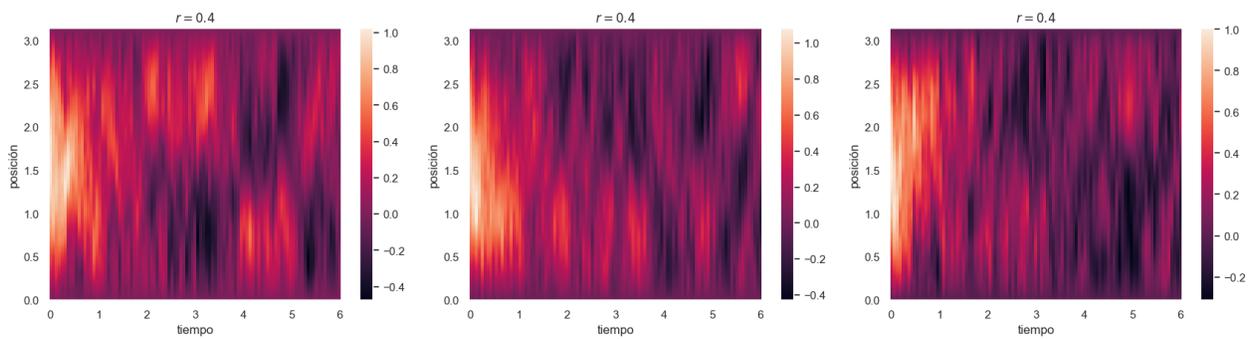


Figura 4.8: Temperatura para diferentes semillas [0, 13, 42]

Podemos ver los efectos de cambiar la regularidad r entre los valores $[0,1,0,4,1,2]$ obteniendo:

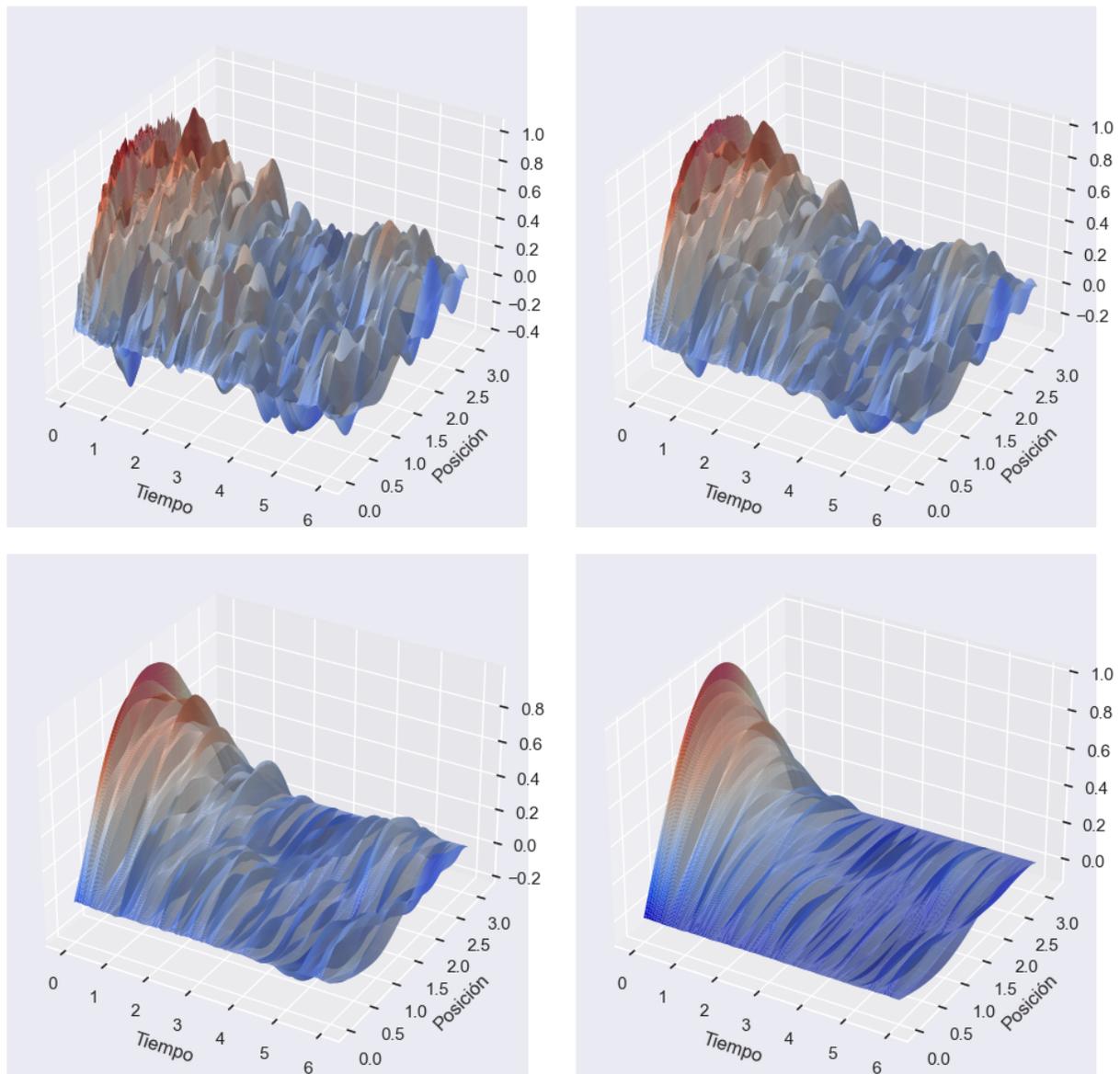


Figura 4.9: Temperatura para diferentes valores de regularidad $[0,1,0,4,1,2]$

Finalmente cambiando el nivel de ruido σ entre los valores $[0,1, 0,5, 1, 2]$

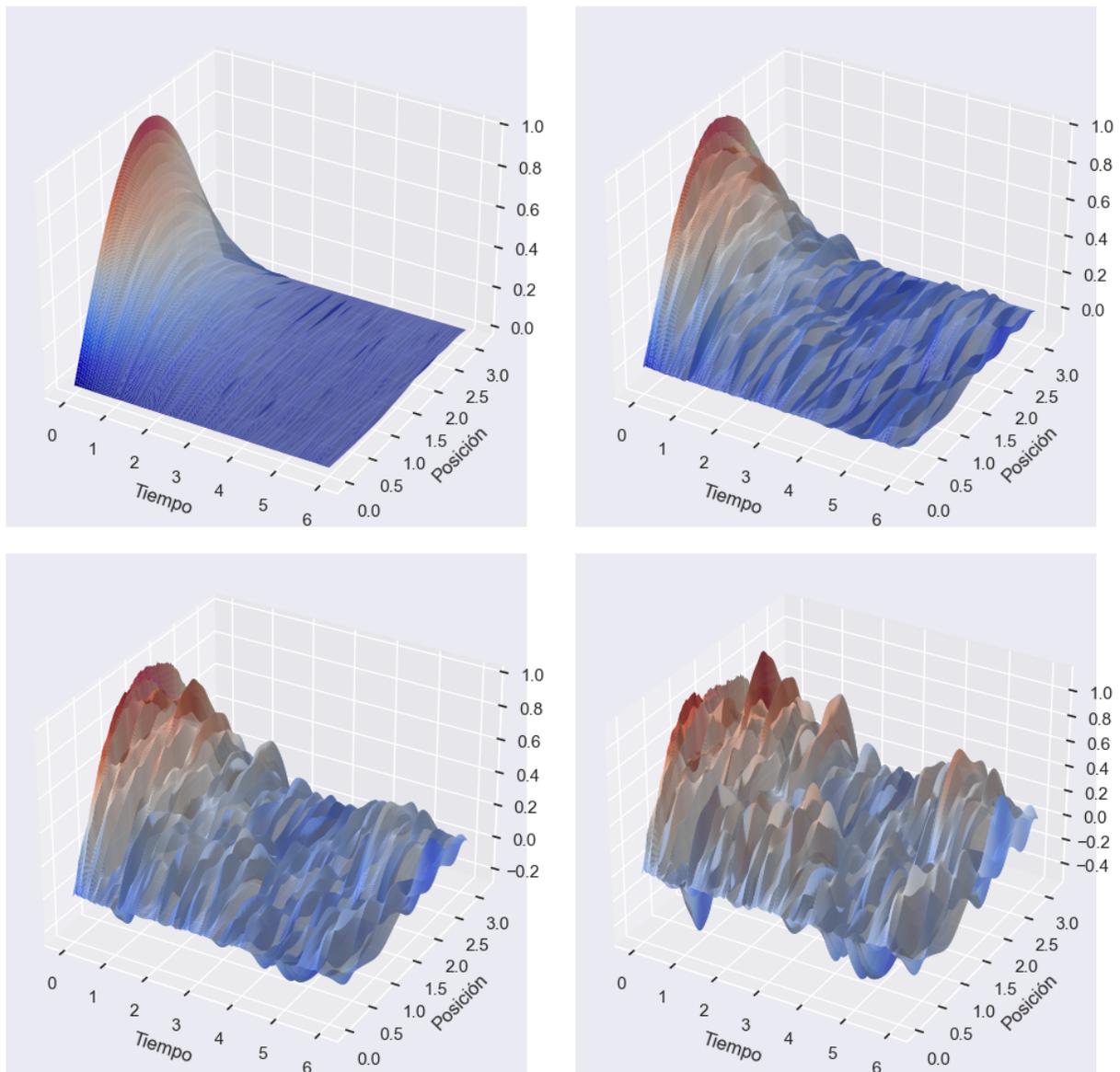


Figura 4.10: Temperatura para diferentes valores de nivel de ruido $[0,1, 0,5, 1, 2]$

como puede verse la elección de los parámetros como el nivel de ruido y la regularidad pueden afectar al punto en que la solución parece no guardar relación con la evolución del sistema sin ruido.

4.6. Estimación Paramétrica para la Ecuación de Calor Estocástica

En esta sección final se explorará brevemente el problema de la estimación paramétrica en la ECE, para ello se iniciará dando una interpretación del problema en el contexto de cuerpos de agua y se presentarán algunos elementos relacionados al problema inverso de la estimación paramétrica.

Sea $U(t, x, y, 0)$ la temperatura en la superficie del cuerpo de agua como se ve en la figura de al lado. Por medio de data histórica se puede obtener el promedio para t grande \bar{U} de U .

Podemos identificar a la fluctuación $u := U - \bar{U}$ como la cantidad de interés. Con la finalidad de mantener la misma notación que se ha venido utilizando a la fluctuación $u(t, x, y, 0)$ se le representará simplemente como $u(t, x)$ considerando que acá x representa las dos dimensiones.

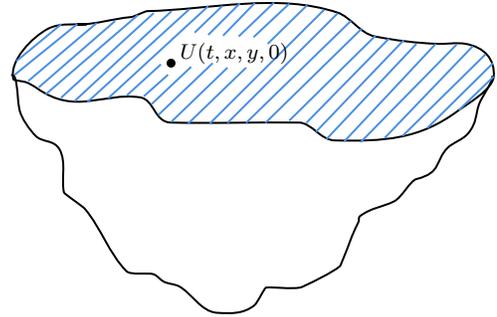


Figura 4.11: Representación de un lago. La temperatura de la superficie U es representada

Este problema ha sido abordado previamente en el caso mas general que involucra un término de deriva **modificar luego**.

4.6.1. Problema Inverso en la Estimación Paramétrica

La idea en relación al problema inverso es la siguiente y con la finalidad de presentar a grandes rasgos la idea del problema inverso se realizará una introducción similar a la de [Richard C. Aster et al., 2005], en el contexto de las ciencias e ingenierías por ejemplo usualmente se quieren relacionar parámetros físicos que caracterizan algún fenómeno/modelo con un conjunto de observaciones. Si el modelo lo representamos como m y el resultado del fenómeno como d , pudiésemos pensar que existe una función G que relaciona estas cantidades:

$$G(m) = d. \tag{4.63}$$

En la práctica d puede ser una variable que dependa del espacio y tiempo o venir dada por observaciones discretas. Adicionalmente en lo que respecta a hacer mediciones, usualmente suelen haber fuente de ruidos que modifican el valor de d . Este ruido puede venir del instrumento de medición, de la metodología empleada para la medición, de elementos o variables que no se están considerando al momento de hacer el modelado del fenómeno. Siguiendo con la exposición de [Richard C. Aster et al., 2005] pudiésemos pensar que los valores obtenidos como datos (medidas) d serían:

$$d = G(m_{\text{true}}) + \eta = d_{\text{true}} + \eta \tag{4.64}$$

donde η representa el ruido que está afectando el valor obtenido y d_{true} el valor hipotético ficticio que vendría a representar la medida “perfecta” en ausencia de ruido o error alguno.

Lo que vendría a representar el *problema directo* sería el de ya conociendo los valores de los parámetros m que caracterizan el modelo obtener los valores esperados para la data d dadas ciertas condiciones. No obstante esta sección estará enfocada en lo que se conoce como el problema *problema inverso* es decir encontrar los parámetros m dada una data discreta d . Existe otro caso adicional el cual se le conoce como el *problema de identificación del sistema* el cual consiste en determinar a G dadas muestras de m y d (considere que G puede ser un operador, una EDO o una EDP por ejemplo).

El caso de interés acá será el del problema inverso discretizado, particularmente como el número de parámetros de interés acá es pequeño este tipo de problemas serán llamados problemas de estimación paramétrica, ya que se están estimando parámetros por lo que el caso de interés sería el problema inverso de estimación paramétrica.

La dificultad de este tipo de problemas consiste en que en los casos reales se pueden tener muchos modelos que se ajusten de manera adecuada a la data. Por lo tanto es necesario en este tipo de problemas poder identificar si existe la solución, la unicidad de la misma y la estabilidad del proceso en cuestión. La discretización del caso continuo se puede hacer por medio de una representación en términos de una serie de Fourier, representando por ejemplo el parámetro de interés m en términos de alguna base en particular por ejemplo:

$$m(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j g_j(x) \approx \sum_{j=1}^J \alpha_j g_j(x). \quad (4.65)$$

esta idea puede ser usada por ejemplo para estimar la difusividad térmica θ en 4.44. Nótese que la ecuación que se ha estado explorando en este trabajo

4.6.2. Estimación Paramétrica en Cuerpos de Agua

Existen múltiples trabajos que abordan la evolución de la temperatura superficial en cuerpos de agua como en [Frankignoul, 1985]. Acá se señalan múltiples fenómenos y variables que afectan la evolución de la temperatura superficial como, si es de día o de noche y su relación con la estratificación del cuerpo de agua, la temporada del año (estación) que está relacionada con los vientos los cuales transportan energía de la superficie por medio de convección enfriando la superficie, etc... Las ecuaciones usadas para modelar este fenómeno son las de Navier-Stokes, que para variaciones en la superficie despreciables superficie del cuerpo de agua e integrando las variaciones verticales (usando la notación de [Frankignoul, 1985]):

$$h \frac{\partial}{\partial t} + h \mathbf{v} \cdot \nabla T + (T - T_+) w_e - \kappa h \nabla^2 T + \frac{Q - Q_+}{\rho C_p} = 0, \quad (4.66)$$

donde T es la temperatura, \mathbf{v} y w es la velocidad horizontal y vertical respectivamente; q es el flujo de radiación solar penetrante de onda corta que llega al cuerpo de agua, ρ es la densidad del cuerpo de agua y C_p es el calor específico y h es la profundidad de la *zona de mezcla* turbulenta que está antes de la región estratificada del agua que cuerpo de agua. Para obtener esta ecuación se usó la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{v} + \partial w / \partial z = 0$.

Dependiendo de la escala de tiempo que se analizará se pueden considerar o despreciar algunos fenómenos en particular, como por ejemplo, durante el día, unos vientos ligeros pueden ocasionar variaciones en la temperatura superficial a unos pocos metros de profundidad. Así que si el ciclo que se estudiará es de 1 día de duración estos efectos pueden jugar un rol importante pero a escalas mayores pueden tener un efecto despreciable en relación a otros fenómenos que entran en juego.

Debido a la dificultad propia de la predicción de las fluctuaciones del clima, un enfoque útil para interpretar las anomalías consiste en modelar el fenómeno como un proceso estocástico. Ya para 1976 se publicó un artículo desarrollado por Hasselman [Hasselmann, 1976] donde desarrolla su teoría del modelo climático estocástico, usando un formalismo de dos escalas de tiempo. En esta

serie de artículos divididos en varias partes demuestra que los cambios climáticos relacionados a una escala de tiempo corta dan como resultado los cambios climáticos en una escala de tiempo grande y que este proceso se puede modelar como un caminante aleatorio para las fluctuaciones en el clima, es decir se puede modelar como un proceso de Wiener.

En estos artículos Hasselman mostró que la evolución del clima está gobernado por la ecuación de Fokker-Planck para la distribución de probabilidad de estados del clima en el espacio de fases. Recordemos que la ecuación de Fokker-Planck tiene la siguiente forma:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \quad (4.67)$$

nótese que esta ecuación es un caso mas general de la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck 4.57, la cual recordemos era un caso mas general de 4.48. Es decir que el problema que se ha estado estudiando, matemáticamente obedece la misma ecuación diferencial que se ha estudiado.

4.6.3. Estimación de la difusividad con MLE

En el trabajo de Ostrovskii [Piterbarg, 1997a] se considera la estimación de la velocidad de deriva y de la difusividad para distribuciones dependientes del tiempo por medio del estimador de maxima verosimilitud (MLE). El caso particular de interés en ese trabajo es la ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T + \lambda T = \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla)T + \sigma S(t, \mathbf{r}) \quad (4.68)$$

donde λ es el coeficiente de decaimiento en la ecuación estocástica de transporte y difusión del escalar T 4.68 el cual en nuestro contexto es la temperatura. Otros trabajos como el de [Piterbarg, 1997b] también aborda la estimación de \mathbf{u} y \mathbf{D} usando MLE.

En [Lototsky, 2009] se aborda la idea de la inferencia estadística para la ECE con ruido aditivo. En el artículo se usa un estimador del tipo espectral, allí el número de coeficientes de Fourier espaciales de la solución es finito . Además en el trabajo se abordan las propiedades asintóticas del estimador para el caso de intensidad de ruido fija y para el caso de un tiempo de observación fijo. Para esta ecuación se considera que $x \in (0, \pi)$, $0 \leq t \leq T$ y que en los bordes la temperatura absoluta es igual a la media $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ además la condición inicial es que la temperatura inicialmente en toda la región es igual a la temperatura media.

Partiendo de 4.48 la trayectoria observada para un j en particular y multiplicando por $j^2 u_j$ entonces:

$$\hat{\theta}^{(j)} = - \frac{\int_0^T j^2 u_j du_j}{\int_0^T j^4 u_j^2 dt} \quad (4.69)$$

ya algunos trabajos han mostrado que este estimador es consistente [R. S. Liptser, 1978] cuando $T \rightarrow +\infty$:

$$\theta = \lim_{T \rightarrow \infty} - \frac{\int_0^T j^2 u_j du_j}{\int_0^T j^4 u_j^2 dt}. \quad (4.70)$$

Considerando las trayectorias de $u_j(t)$ y combinando los estimadores al reescribir 4.48 con N valores de j :

$$\hat{\theta}^N = - \frac{\sum_{j=1}^N \int_0^T j^2 u_j du_j}{\sum_{j=1}^N \int_0^T j^4 u_j^2 dt} \quad (4.71)$$

Este estimador fue sugerido por primera vez en [Huebner et al., 1993] el cual es de hecho el MLE θ basado en las observaciones $u_j(t)$, $k = 1, \dots, N$, $0 < t < T$. Con esto en mente podemos conseguir el error en la estimación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_N &= -\frac{\sum_{j=1}^N \int_0^T j^2 u_j du_j}{\sum_{j=1}^N \int_0^T j^4 u_j^2 dt} = -\frac{\sum_{j=1}^N \int_0^T j^2 u_j (-\theta j^2 u_j dt + \sigma \sqrt{q_j} d\beta_j)}{\sum_{j=1}^N \int_0^T j^4 u_j^2 dt} \\ &= -\theta \frac{-\sum_{j=1}^N \int_0^T j^4 u_j^2 dt}{\sum_{j=1}^N \int_0^T j^4 u_j^2 dt} - \sigma \frac{-\sum_{j=1}^N \sqrt{q_j} \int_0^T j^2 u_j d\beta_j}{\sum_{j=1}^N \int_0^T j^4 u_j^2 dt} \\ &= -\theta - \sigma \frac{-\sum_{j=1}^N \sqrt{q_j} \int_0^T j^2 u_j d\beta_j}{\sum_{j=1}^N \int_0^T j^4 u_j^2 dt}\end{aligned}$$

es decir que el error sería:

$$\hat{\theta}_N - \theta = \sigma \frac{-\sum_{j=1}^N \sqrt{q_j} \int_0^T j^2 u_j d\beta_j}{\sum_{j=1}^N \int_0^T j^4 u_j^2 dt} \quad (4.72)$$

Esta expresión nos permite calcular el error en la estimación. Nótese que para el problema en estudio se ha estado desarrollando la estimación de la difusividad θ , el caso singular del nivel ruido, o la volatilidad σ es un problema singular. El cual se comenta en [Cialenco, 2018] se puede calcular de manera exacta por medio del *argumento de variación cuadrática*:

$$\sigma = \frac{\langle u_j \rangle_T}{\left(\int_0^T dt\right)^{1/2}} = \frac{\langle u_j \rangle_T}{\sqrt{T}} \quad (4.73)$$

es decir que si la data se tiene de manera discreta se puede aproximar la ecuación de arriba. La consistencia de este estimador se puede alcanzar disminuyendo la frecuencia de los pasos temporales Δt mientras se mantiene fijo T o aumentando la cantidad de observaciones mientras T y los pasos Δt permanecen fijos.

Finalmente a modo de cierre nótese que podemos analizar el comportamiento para T grande de la variación de $\hat{u}_j(t)$ [Lototsky et al., 2017] con 4.60:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{u}_j(t)) = \frac{\sigma^2 q_j}{2\theta j^2} \quad (4.74)$$

Estos elementos pueden ser usados para explorar el problema inverso de la estimación de la difusividad térmica en la superficie de un cuerpo de agua, el cual recibe energía de una fuente aleatoria la cual se puede modelar por medio de una hoja browniana.

Apéndice A

La Ecuación de Calor Determinista

A.1. Análisis Dimensional

A.1.1. Transformación

Partamos de la ecuación de calor homogénea:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u \quad (\text{A.1})$$

esta ecuación puede ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x_1, x_2, \dots, x_r) = k \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(t, x_1, x_2, \dots, x_r) \quad (\text{A.2})$$

hagamos el cambio de variable:

$$x'_i = ax_i \quad (\text{A.3a})$$

$$t' = bt \quad (\text{A.3b})$$

Este cambio de variables no afecta el fenómeno físico ya que solo representa una dilatación o contracción del espacio y el tiempo. Veamos que ocurre si se cambia $u(\mathbf{x}, t) \rightarrow u(\mathbf{x}', t')$:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t', x'_1, x'_2, \dots, x_r) = k \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(t', x'_1, x'_2, \dots, x_r) \quad (\text{A.4})$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = b \frac{\partial u}{\partial t'} \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \frac{\partial u}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x'_i} a \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x'_i} a \right) a = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i'^2} \end{aligned}$$

entonces:

$$b \frac{\partial u}{\partial t'} = a^2 k \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 u}{\partial x_i'^2}. \quad (\text{A.5})$$

Nótese que si $a^2 = b$ y si establecemos que $a = \lambda$ entonces la ecuación de arriba obtiene la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = k \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 u}{\partial x_i'^2} \quad (\text{A.6})$$

Es decir que la ecuación diferencial es invariante ante una transformación de sus coordenadas y del tiempo de la forma $u(t, x) \rightarrow u(\lambda t^2, \lambda x)$. Otra manera de ver el resultado obtenido es que si u es solución a la ECD entonces $u(\lambda t^2, \lambda x)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ también es solución.

A.1.2. Solución de la ECD

Partamos de la siguiente transformación para encontrar la solución a la ECD:

$$u(t, x) = \lambda^\alpha u(\lambda t, \lambda^\beta x), \quad \forall \lambda > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.7})$$

Haciendo $\lambda = t^{-1}$ se obtiene $v(y) = u(y, 1)$ ¹ Introduciendo la propuesta de u en la ecuación de calor:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot \nabla v(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0 \quad (\text{A.8})$$

con $y = t^{-\beta x}$. Escogiendo $\beta = 1/2$ con la finalidad de que no aparezca $t^{-(\alpha+1)}$:

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v + \Delta v = 0 \quad (\text{A.9})$$

Simplifiquemos la expresión aún más asumiendo que el problema tiene simetría rotacional (solo dependerá del radio), es decir que $v(y = w(r))$, con $r = |y|$:

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{dw}{dr} \right) = 0 \implies \alpha w + \frac{1}{2} r w' + \frac{n-1}{r} w' + w'' = 0,$$

fijando $\alpha = n/2$, la expresión de arriba se puede reescribir:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} w + \frac{1}{2} r w' + \frac{n-1}{r} w' + w'' &= 0 \\ \frac{n}{2} r^n w + \frac{1}{2} r^{n+1} w' + (n-1) r^{n-1} w' + r^n w'' &= 0 \\ \frac{(r^{n+1} w)'}{2} + (r^n w')' &= 0, \end{aligned}$$

integrando y tomando el límite cuando $r \rightarrow \infty$, se concluye que $w' = 0$ donde se asume que no hay variación de temperatura en el infinito $w' = 0$:

$$w' = -\frac{1}{2} r w \implies w = b e^{-\frac{r^2}{4}}$$

¹Este procedimiento de seleccionar $\lambda = \text{algo}^{-1}$ se suele hacer en la termodinámica bajo el enfoque Neo-Gibbsiano (ver [Callen, 1985]), específicamente con la ecuación fundamental, ya que los parámetros extensivos son definidos como funciones homogéneas de grado 1, en el sentido del teorema de Euler. Con este procedimiento se puede redefinir el problema como un problema cuyas variables asociadas sean funciones homogéneas de orden cero (parámetros intensivos).

A.2. Problema del Valor Inicial

A.2.1. Transformada de Fourier de la ECD

Una manera de solucionar la ECD es transformando la EDP con la transformada de Fourier para luego resolverla en el plano complejo. Recordando la forma de la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{f\} = F(t, \bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) e^{i\bar{x} \cdot x} dx \quad (\text{A.10})$$

y adicionalmente que la ECD es 2.10 y que se debe reescribir 2.12. Entonces:

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \mathcal{F}\{k\nabla^2 u\} & \text{en } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ \mathcal{F}\{u(t, x)\} = \mathcal{F}\{g(x)\} & \text{en } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} e^{i\bar{x} \cdot x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{i\bar{x} \cdot x} dx \right] = \frac{\partial U}{\partial t}$$

ahora para el término del Laplaciano se puede ver que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{k\nabla^2 u\} &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} k\nabla^2 u e^{i\bar{x} \cdot x} dx = k \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} e^{i\bar{x} \cdot x} dx \\ &= k \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} e^{i\bar{x} \cdot x} dx = k \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} e^{i\bar{x} \cdot x} \prod_{l=1}^n dx_l \\ &= k \sum_{j=1}^n \prod_{l=1}^n \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} e^{i \sum_{m=1}^n (\bar{x}_m x_m)} dx_l \\ &= k \sum_{j=1}^n \prod_{l=1}^n \prod_{m=1}^n \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} e^{i\bar{x}_m x_m} dx_l \end{aligned}$$

ésta expresión se puede integrar por partes considerando que para la integración en x_l todos los términos que no son x_l salen de la integral de x_l , ésto es que:

$$\mathcal{F}\{k\nabla^2 u\} = k \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} e^{i\bar{x}_l x_l} dx_l \right] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} e^{i\bar{x}_m x_m} dx_l \right] \right\} \prod_{\substack{l,m=1 \\ m \neq l}}^n e^{i\bar{x}_m x_m} dx_l$$

resolvamos la primera integral dentro de corchetes por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} e^{i\bar{x}_l x_l} dx_l = e^{i\bar{x}_l x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\bar{x}_l e^{i\bar{x}_l x_l} u \Big|_{-\infty}^{\infty} + (i\bar{x}_l)^2 \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\bar{x}_l x_l} dx_l$$

donde se asumirá en general que:

$$\lim_{x_j \rightarrow \pm\infty} u(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = 0, \quad \lim_{x_j \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} u(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = 0$$

con ésto en mente entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} e^{i\bar{x}_l x_l} dx_l = (i\bar{x}_l)^2 \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\bar{x}_l x_l} dx_l = -\bar{x}_l^2 \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\bar{x}_l x_l} dx_l$$

éste procedimiento se puede hacer para las otras $n - 1$ integrales de igual manera obteniendo entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{k\nabla^2 u\} &= k \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left\{ -\bar{x}_l^2 \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\bar{x}_l x_l} dx_l - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \bar{x}_j^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\bar{x}_m x_m} dx_l \right] \right\} \prod_{\substack{l,m=1 \\ m \neq l}}^n e^{i\bar{x}_m x_m} dx_l \\ &= -k \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left\{ \bar{x}_j^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\bar{x}_m x_m} dx_l \right] \right\} \prod_{\substack{l,m=1 \\ m \neq l}}^n e^{i\bar{x}_m x_m} dx_l \\ &= -k \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^n \bar{x}_j^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} u e^{i\bar{x}_m x_m} dx_l \prod_{\substack{l,m=1 \\ m \neq l}}^n e^{i\bar{x}_m x_m} dx_l \\ &= -k \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^n \prod_{l,m=1}^n \bar{x}_j^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} u e^{i\bar{x}_m x_m} dx_l = -k \sum_{j=1}^n \bar{x}_j^2 \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u e^{i\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}} dx \end{aligned}$$

donde sabemos que 2.13:

$$\sum_{j=1}^n \bar{x}_j^2 = |\bar{\mathbf{x}}|^2 = \bar{x}^2, \quad U(t, \bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) e^{i\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}} dx \quad (\text{A.11})$$

es decir que:

$$\mathcal{F}\{k\nabla^2 u\} = -k\bar{x}^2 U(t, \bar{x})$$

por lo tanto volviendo a 2.12:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -k\bar{x}^2 U \quad \implies \quad U(t, \bar{x}) = c(\bar{x}) e^{-k\bar{x}^2 t}. \quad (\text{A.12})$$

Ahora apliquemos la transformada de fourier a la condición inicial:

$$\mathcal{F}\{u(0, x)\} = U(0, \bar{x}) = \mathcal{F}\{g(x)\} = G(\bar{x}), \quad (\text{A.13})$$

pero sabemos que:

$$U(t, \bar{x}) = c(\bar{x}) e^{-k\bar{x}^2 t} \quad \implies \quad U(0, \bar{x}) = c(\bar{x}) = G(\bar{x}) \quad \implies \quad U(t, \bar{x}) = G(\bar{x}) e^{-k\bar{x}^2 t}$$

Es decir que la transformada de fourier de $u(t, x)$ es el producto de la transformada de fourier de la condición inicial $g(x)$ por una función.

A.2.2. Transformada Inversa

Con la finalidad de hallar la transformada espacial inversa de $H(t, \bar{x}) = e^{-k\bar{x}^2 t}$ debemos definir primero a la inversa:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(t, \bar{x})\} = f(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t, \bar{x}) e^{-i\bar{x} \cdot \mathbf{x}} d\bar{x} \quad (\text{A.14})$$

ésta definición nos permite definir una distribución de gran utilidad al ver que:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{f(t, x)\} = f(t, x)$$

es decir que:

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x') e^{i\mathbf{x}' \cdot \bar{\mathbf{x}}} dx' \right] e^{-i\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}} d\bar{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x') \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\bar{\mathbf{x}}(x' - x)} d\bar{\mathbf{x}} \right] dx' = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x') h(x' - x) dx' \end{aligned}$$

La distribución $h(x' - x)$ es conocida como la delta de Dirac:

$$\delta(x' - x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\bar{\mathbf{x}}(x' - x)} d\bar{\mathbf{x}} \quad \text{y} \quad f(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x', t) \delta(x' - x) dx' \quad (\text{A.15})$$

y reescribiendo A.15 se puede ver que puede ser interpretada como la transformada de Fourier de la función $1 \mathcal{F}\{1\} = \delta(x)$. Habiendo aclarado éstas particularidades podemos pasar a calcular la inversa de $H(t, \bar{x}) = e^{-k\bar{x}^2 t}$:

$$\mathcal{F}^{-1}H(t, \bar{x}) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}h(t, x) = h(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \bar{x}) e^{-i\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}} d\bar{\mathbf{x}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-k\bar{x}^2 t} e^{-i\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}} d\bar{\mathbf{x}}$$

ésta ecuación puede ser reescrita considerando que:

$$\begin{aligned} -k\bar{x}^2 t - i\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} &= -kt \left(\bar{x}^2 + i \frac{\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}}{kt} \right) = -kt \left(\bar{x}_1^2 + \dots + \bar{x}_n^2 + i \frac{\bar{x}_1 x_1}{kt} + \dots + i \frac{\bar{x}_n x_n}{kt} \right) \\ &= -kt \left[\left(\bar{x}_1^2 + i \frac{\bar{x}_1 x_1}{kt} \right) + \dots + \left(\bar{x}_n^2 + i \frac{\bar{x}_n x_n}{kt} \right) \right] = -kt \sum_{j=1}^n \left(\bar{x}_j^2 + i \frac{\bar{x}_j x_j}{kt} \right) \\ &= -kt \sum_{j=1}^n \left[\left(\bar{x}_j + i \frac{x_j}{2kt} \right)^2 + \frac{x_j^2}{4k^2 t^2} \right] = -\frac{kt}{4k^2 t^2} \sum_{j=1}^n x_j^2 - kt \sum_{j=1}^n \left(\bar{x}_j^2 + i \frac{x_j}{2kt} \right)^2 \\ &= -\frac{x^2}{4kt} - kt \sum_{j=1}^n \left(\bar{x}_j^2 + i \frac{x_j}{2kt} \right)^2 \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
h(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[-\frac{x^2}{4kt} - kt \sum_{j=1}^n \left(\bar{x}_j + i \frac{x_j}{2kt} \right)^2 \right] d\bar{x} \\
&= e^{-\frac{x^2}{4kt}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[-kt \sum_{j=1}^n \left(\bar{x}_j + i \frac{x_j}{2kt} \right)^2 \right] d\bar{x} \\
&= e^{-\frac{x^2}{4kt}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \exp \left[-kt \left(\bar{x}_j + i \frac{x_j}{2kt} \right)^2 \right] d\bar{x} \\
&= e^{-\frac{x^2}{4kt}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \exp \left[-kt \left(\bar{x}_1 + i \frac{x_1}{2kt} \right)^2 \right] d\bar{x}_1 \right\} \cdots \left\{ \int_{\mathbb{R}} \exp \left[-kt \left(\bar{x}_1 + i \frac{x_1}{2kt} \right)^2 \right] d\bar{x}_1 \right\} \\
&= e^{-\frac{x^2}{4kt}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \exp \left[-kt \left(\bar{x}_l + i \frac{x_l}{2kt} \right)^2 \right] d\bar{x}_l \right\}^n
\end{aligned}$$

A.2.3. Solución en el Plano Complejo

La ecuación:

$$h(t, x) = e^{-\frac{x^2}{4kt}} \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \exp \left[-kt \left(\bar{x}_l + i \frac{x_l}{2kt} \right)^2 \right] d\bar{x}_l \right\}^n,$$

puede desarrollarse si se comienza haciendo el cambio de variables:

Ahora haciendo el cambio de variables:

$$\chi = \sqrt{kt} \left(\bar{x}_l + i \frac{x_l}{2kt} \right),$$

en la integral dentro de corchetes:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \exp \left[-kt \left(\bar{x}_l + i \frac{x_l}{2kt} \right)^2 \right] d\bar{x}_l = \frac{1}{\sqrt{kt}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r\sqrt{kt} + i \frac{x_l}{2\sqrt{kt}}}^{r\sqrt{kt} + i \frac{x_l}{2\sqrt{kt}}} e^{-\chi^2} d\chi$$

ésta integral está representada en el plano complejo como una integral de línea C_1 como se ve en A.1

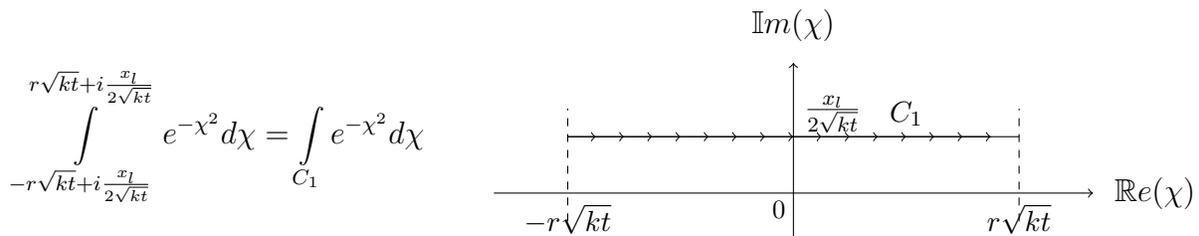


Figura A.1: Integración compleja de C_1 .

Es decir que la integración sobre la región encerrada por los 4 caminos sería:

$$\oint e^{-\chi^2} d\chi = \sum_{j=1}^4 \int_{C_j} e^{-\chi^2} d\chi$$

Figura A.2: Integral cerrada que se puede crear para evaluar la integral original considerando múltiples teoremas en el plano complejo.

de acá se puede ver que:

$$\int_{C_1} e^{-\chi^2} d\chi = \oint e^{-\chi^2} d\chi - \int_{C_2} e^{-\chi^2} d\chi - \int_{C_3} e^{-\chi^2} d\chi - \int_{C_4} e^{-\chi^2} d\chi$$

ahora volteando la orientación del camino C_2 y C_3 :

$$\int_{C_1} e^{-\chi^2} d\chi = \oint e^{-\chi^2} d\chi + \int_{C_2^-} e^{-\chi^2} d\chi + \int_{C_3^-} e^{-\chi^2} d\chi - \int_{C_4} e^{-\chi^2} d\chi \quad (\text{A.16})$$

considerando que $e^{-\chi^2}$ es una función analítica en la región de integración (realmente es una función entera, al ser analítica en todo el espacio) la integración sobre un camino cerrado simple cualquiera será cero de acuerdo al teorema de Cauchy-Goursat:

$$\oint e^{-\chi^2} d\chi = 0 \quad (\text{A.17})$$

Ahora resolviendo las integrales de C_2^- y C_4 , se puede ver que ellas son:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\pm r\sqrt{kt}}^{\pm r\sqrt{kt} + i \frac{x_l}{2\sqrt{kt}}} e^{-\chi^2} d\chi, \quad (\text{A.18})$$

ahora probaré que éstas integrales tienden a cero cuando $r \rightarrow \infty$. Ésta integral llamémosla Γ debe poder ser escrita en su forma polar:

$$\Gamma = \int_{\pm r\sqrt{kt}}^{\pm r\sqrt{kt} + i \frac{x_l}{2\sqrt{kt}}} e^{-\chi^2} d\chi = |\Gamma| e^{i \arg \Gamma}$$

donde:

$$|\Gamma| = \left| \int_{\pm r\sqrt{kt}}^{\pm r\sqrt{kt} + i \frac{x_l}{2\sqrt{kt}}} e^{-\chi^2} d\chi \right| \leq \int_{\pm r\sqrt{kt}}^{\pm r\sqrt{kt} + i \frac{x_l}{2\sqrt{kt}}} |e^{-\chi^2}| |d\chi|. \quad (\text{A.19})$$

El siguiente paso es verificar si el módulo de $e^{-\chi^2}$ está acotado. para ello veamos que es $|e^{-\chi^2}|$:

$$|e^{-\chi^2}| = \sqrt{e^{-\chi^2} (e^{-\chi^2})^*}$$

donde se está usando la notación z^* para representar el complejo conjugado de z . Reescribiendo la expresión de arriba:

$$|e^{-\chi^2}| = \sqrt{e^{-(\chi^2 + \chi^{*2})}} = e^{-\frac{1}{2}(\chi^2 + \chi^{*2})} \quad (\text{A.20})$$

entonces si $\chi = |\chi|e^{i\theta + i2k\pi}$ entonces:

$$\begin{aligned} \chi^2 + \chi^{*2} &= |\chi|^2 e^{i2\theta + i4k\pi} + |\chi|^2 e^{-i2\theta - i4k'\pi} = |\chi|^2 [\cos(2\theta) + i \operatorname{sen} 2\theta + \cos(2\theta) - i \operatorname{sen} 2\theta] \\ &= 2|\chi|^2 \cos(2\theta) \end{aligned}$$

donde se puede verificar por la parametrización que está dada de forma implícita en los caminos que:

$$0 \leq \theta_+ \leq \tan^{-1}\left(\frac{x_l}{2rkt}\right), \quad \pi - \tan^{-1}\left(\frac{x_l}{2rkt}\right) \leq \theta_- \leq \pi$$

donde el θ^- indica que ese ángulo está dado en sentido inverso al que aparece en el límite de integración, ésto se colocó de ésta manera con la finalidad de que la desigualdad tenga sentido al momento de la integración se colocará de la forma apropiada. Siguiendo para ambos casos se puede verificar que:

$$\frac{1 - \left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2}{1 + \left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2} \leq \cos(2\theta) \leq 1 \quad \implies \quad |\chi|^2 - 2|\chi|^2 \left[\frac{\left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2}{1 + \left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2} \right] \leq \frac{\chi^2 + \chi^{*2}}{2} \leq |\chi|^2$$

volviendo a A.20:

$$e^{-|\chi|^2} \leq |e^{-\chi^2}| \leq e^{-|\chi|^2} \exp \left\{ 2|\chi|^2 \left[\frac{\left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2}{1 + \left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2} \right] \right\} \quad (\text{A.21})$$

con ésto verificamos que efectivamente la función $|e^{-\chi^2}|$ está acotada. Ahora estudiemos las cotas de $|\chi|$ para verificar si se puede simplificar un poco mas la expresión A.21:

$$\pm r\sqrt{kt} \leq \chi \leq \pm r\sqrt{kt} + i\frac{x_l}{2\sqrt{kt}} \quad \implies \quad r\sqrt{kt} \leq |\chi| \leq r\sqrt{kt} \sqrt{1 + \left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2}$$

de manera que (se puede ver gráficamente la región que describe los límites de $|\chi|$ en A.3):

$$2r^2kt \left[\frac{\left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2}{1 + \left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2} \right] \leq 2|\chi|^2 \left[\frac{\left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2}{1 + \left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2} \right] \leq 2r^2kt \left[1 + \left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2 \right] \left[\frac{\left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2}{1 + \left(\frac{x_l}{2rkt}\right)^2} \right]$$

es decir que con respecto a las cotas:

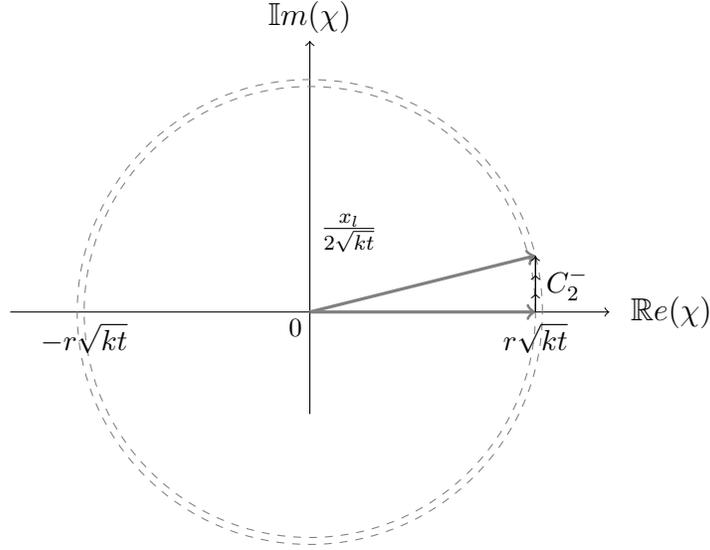


Figura A.3: Cotas para $|\chi|$

$$r^2 kt \leq |\chi|^2 \leq r^2 kt \left[1 + \left(\frac{x_l}{2rkt} \right)^2 \right] = r^2 kt + \frac{x_l^2}{4kt} \quad 2|\chi|^2 \left[\frac{\left(\frac{x_l}{2rkt} \right)^2}{1 + \left(\frac{x_l}{2rkt} \right)^2} \right] \leq \frac{x_l^2}{2kt}$$

entonces:

$$e^{-|\chi|^2} \exp \left\{ 2|\chi|^2 \left[\frac{\left(\frac{x_l}{2rkt} \right)^2}{1 + \left(\frac{x_l}{2rkt} \right)^2} \right] \right\} \leq e^{-ktr^2} e^{\frac{x_l^2}{2kt}}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} |\Gamma| &\leq \int_{\pm r\sqrt{kt}}^{\pm r\sqrt{kt} + i\frac{x_l}{2\sqrt{kt}}} |e^{-\chi^2}| d\chi \leq \int_{\pm r\sqrt{kt}}^{\pm r\sqrt{kt} + i\frac{x_l}{2\sqrt{kt}}} e^{-ktr^2} e^{\frac{x_l^2}{2kt}} |d\chi| \\ &= e^{-ktr^2} e^{\frac{x_l^2}{2kt}} \left| \pm r\sqrt{kt} + i\frac{x_l}{2\sqrt{kt}} \mp r\sqrt{kt} \right| = \frac{x_l}{2\sqrt{kt}} e^{\frac{x_l^2}{2kt}} e^{-ktr^2} \end{aligned}$$

es decir que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\Gamma| \leq \frac{x_l}{2\sqrt{kt}} e^{\frac{x_l^2}{2kt}} \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-ktr^2} = 0 \quad \implies \quad \lim_{r \rightarrow \infty} |\Gamma| = 0 \quad (\text{A.22})$$

siempre y cuando $k > 0$ y $t > 0$. Ésto es muy importante ya que nos indica que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\pm r\sqrt{kt}}^{\pm r\sqrt{kt} + i\frac{x_l}{2\sqrt{kt}}} e^{-\chi^2} d\chi = \lim_{r \rightarrow \infty} |\Gamma| e^{i \arg \Gamma} = 0 \quad (\text{A.23})$$

y por lo tanto las integrales C_2^- y C_4 en límite cuando $r \rightarrow \infty$ son idénticas a cero. Por lo tanto:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_1} e^{-\chi^2} d\chi = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_3^-} e^{-\chi^2} d\chi = \int_{\mathbb{R}} e^{-\chi^2} d\chi = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.24})$$

Esa integral es muy conocida y se puede resolver fácilmente al tratarla en \mathbb{R}^2 y cambiando a coordenadas polares. En resumen, de éste cálculo obtuvimos que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \exp \left[-kt \left(\bar{x}_l^2 + i \frac{x_l}{2kt} \right)^2 \right] d\bar{x}_l = \sqrt{\frac{\pi}{kt}}$$

Volviendo a la expresión para $h(x, t)$:

$$h(t, x) = \left(\frac{\pi}{kt} \right)^{n/2} \exp \left(-\frac{x^2}{4kt} \right) \quad (\text{A.25})$$

A.2.4. La Transformada y el Teorema de Convolución

Considerando que $u(t, x)$ es la transformada inversa espacial de $U(t, \bar{x})$, entonces:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^n} G(\bar{x}) H(t, \bar{x}) e^{-i\bar{x} \cdot \mathbf{x}} d\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \bar{x}) \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x') e^{i\bar{x} \cdot \mathbf{x}'} dx' \right] e^{-i\bar{x} \cdot \mathbf{x}} d\bar{x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x') \left[\int_{\mathbb{R}^n} H(t, \bar{x}) e^{-i\bar{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} d\bar{x} \right] dx' = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x') h(t, x - x') dx' \end{aligned}$$

Puede mostrarse sin ninguna dificultad que:

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x') h(t, x - x') dx' = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h(t, x') g(x - x') dx' \quad (\text{A.26})$$

usando la expresión de h en A.26, se obtiene:

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x') \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} \exp \left[-\frac{(x - x')^2}{4kt} \right] dx' \quad (\text{A.27})$$

A.3. Series de Fourier para la ECD

A.3.1. Ortogonalidad de la base

Partiendo de la solución como:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \psi_n(x) \quad (\text{A.28})$$

podemos reescribir la expresión usando la ortogonalidad de la base:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u(t, x)\psi_m(x)dx &= \int_0^1 u_n(t)\psi_n(x)\psi_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \int_0^1 \psi_n(x)\psi_m(x)dx \\
&= A^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x)dx \\
&= A^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \int_0^1 \left[\frac{\cos(n\pi x - m\pi x) - \cos(n\pi x + m\pi x)}{2} \right] dx \\
&= A^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \int_0^1 \left\{ \frac{\cos[(n - m)\pi x] - \cos[(n + m)\pi x]}{2} dx \right\} \\
&= \frac{A^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \left\{ \frac{\sin[(n - m)\pi x]}{(n - m)\pi} - \frac{\sin[(n + m)\pi x]}{(n + m)\pi} \right\} \Big|_0^1 \\
&= \frac{A^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \left\{ \frac{\sin[(n - m)\pi]}{(n - m)\pi} - \frac{\sin[(n + m)\pi]}{(n + m)\pi} \right\} \tag{A.29}
\end{aligned}$$

Acá usaremos la ortogonalidad de esta base escogida, es decir nóteses que con n y m pares la expresión da cero, que si n y m son impares, su suma o resta también será par y por lo tanto cero y que si uno es impar y el otro es par, o considere si uno de ellos es para y el otro es impar, los argumentos de los senos se podrán escribir como $[2(n' \pm m') \pm 1]\pi$, reescribiendo los senos con esto $\sin[[2(n' \pm m')\pi] \cos(\pi) \pm \cos[2(n' \pm m')\pi] \sin(\pi) = 0$.

Es decir de momento la integral es cero para todo n y m , falta sólo considerar el caso de $n = m$ el cual se puede extraer de la siguiente manera. Considerando que $\sin[(n + n)\pi]/(n + n)\pi = 0$, pero $\sin[(n - n)\pi]/(n - n)\pi$ está indeterminado. Pero esperamos que el comportamiento de $\sin[(n - m)\pi]/(n - m)\pi$ variando n hasta que $n = m$ sea similar al de $\sin(x - x_0)/(x - x_0)$, cuando $x \rightarrow 0$ y el valor de esta última lo conocemos y es 1 (es decir que esta base la podemos considerar ortonormal al fijar a $A^2/2 = 1$, o $A = \sqrt{2}$), con esto en mente entonces:

$$\int_0^1 u(t, x)\psi_m(x)dx = u_m(t) \tag{A.30}$$

A.3.2. Reescribiendo la solución

Reescribamos a $\dot{u}_n(t)$:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_n(t) &= (u''(t), \psi_n) = \int_0^1 u''(t, x)\psi_n(x)dx = u'(t, x)\psi_n(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 u'(t, x)\psi'_n(x)dx \\
&= -u(t, x)\psi'_n(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 u(t, x)\psi''_n(x)dx \tag{A.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 u(t, x)[- \sqrt{2}(n\pi)^2 \sin(n\pi x)]dx \\
&= -(n\pi)^2 \int_0^1 u(t, x)\sqrt{2} \sin(n\pi x)dx = -(n\pi)^2 u_n(t) \tag{A.32}
\end{aligned}$$

esta última expresión se puede resolver como:

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dt} = -(n\pi)^2 u_n &\implies \int \frac{du_n}{u_n} = -(n\pi)^2 \int dt \implies \ln u_n = -(n\pi)^2 t + C_1 \\ u_n = C_2 e^{-(n\pi)^2 t}, &\implies u_n(t) = u_n(0) e^{-n^2 \pi^2 t} = (u_0, \psi_n) e^{-n^2 \pi^2 t} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Es decir que la solución sería:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, \psi_n) e^{-n^2 \pi^2 t} \psi_n(x) \in L^2[0, 1] \quad (\text{A.34})$$

Apéndice B

Procesos Estocásticos

B.1. Espacios de Medida

Antes de definir lo que es una variable aleatoria, comencemos definiendo lo que es una σ -álgebra:

Definición B.1.1 (σ -álgebra). Sea Ω un conjunto dado, entonces una σ -álgebra \mathcal{F} en Ω es una familia \mathcal{F} de subconjuntos de Ω con las siguientes propiedades:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{F}$
- (b) $A \in \mathcal{F} \rightarrow A^C \in \mathcal{F}$, donde $A^C = \Omega - A$ es el complemento de A en Ω .
- (c) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

El par (Ω, \mathcal{F}) es llamado un espacio medible.

Definición B.1.2 (medida de probabilidad). Una medida de probabilidad P en un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) es una función $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ tal que:

- (a) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
- (b) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es disjunto (es decir $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

El triplete (Ω, \mathcal{F}, P) es llamado un espacio de probabilidad. Se dice que el espacio de probabilidad es un espacio de probabilidad completo si \mathcal{F} contiene a todos los subconjuntos de G de Ω con medida P -exterior cero, es decir:

$$P^*(G) := \inf\{P(F); F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = 0.$$

Cualquier espacio de probabilidad puede ser completado añadiendo a el, todos los conjuntos de medida 0 y redefiniendo P de acuerdo a ello. De ahora en adelante se asumirá que los espacios de probabilidad serán completos.

Los subconjuntos F de Ω que pertenecen a la σ -álgebra \mathcal{F} son llamados conjuntos \mathcal{F} -medibles. En el contexto de la teoría de probabilidad (como es nuestro caso), estos conjuntos son llamados eventos y adoptan la siguiente interpretación:

$$P(F) = \text{"la probabilidad de que el evento } F \text{ ocurra"}.$$

En particular si $P(F) = 1$ se dirá que F ocurre con probabilidad 1 o casi seguramente.

Otro concepto de importancia es el de la σ -álgebra generada por una familia de subconjuntos:

Teorema B.1.1 (σ -álgebra generada por \mathcal{U}). *Sea \mathcal{U} una familia cualquiera de subconjuntos de Ω , entonces existe una σ -álgebra más pequeña $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ que contiene a \mathcal{U} definida como:*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{U}} = \bigcap \{ \mathcal{H}; \mathcal{H} \text{ } \sigma\text{-álgebra de } \Omega, \mathcal{U} \subset \mathcal{H} \}.$$

Esto se puede probar con facilidad probando primero que la intersección de múltiples σ -álgebras es a su vez una σ -álgebra. Probemos esto:

Demostración. Sea $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in I}$ una familia de σ -álgebras en Ω y sea:

$$\mathcal{H} := \bigcap \{ \mathcal{H}_i, i \in I \}$$

entonces, sea $H \in \mathcal{H}$, sabemos que $\emptyset \in \mathcal{H}$ y que $\Omega \in \mathcal{H}$, además cada elemento H pertenece a cada una de las σ -álgebras así que H^C pertenecerá a cada una de las σ -álgebras y por lo tanto a \mathcal{H} también, además la unión contable de elementos de \mathcal{H} será la unión contable de intersecciones pertenecientes a las σ -álgebra \mathcal{H}_i , pero esta unión es cerrada en cada una de estas σ -álgebras y por lo tanto la unión contable de elementos de \mathcal{H} pertenecerá también a \mathcal{H} , es decir que \mathcal{H} es una σ -álgebra. \square

Con estas ideas, podemos introducir unos conceptos que serán de utilidad. Tomemos por ejemplo a la colección \mathcal{U} de todos los subconjuntos abiertos de un espacio topológico Ω (es decir $\Omega = \mathbb{R}^n$), entonces $\mathcal{B} = \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ es llamada la σ -álgebra de Borel en Ω y los elementos $B \in \mathcal{B}$ son llamados conjuntos de Borel. \mathcal{B} contiene a todos los conjuntos abiertos, a todos los conjuntos cerrados, todas las uniones contables de conjuntos cerrados, todas las intersecciones de estas uniones contables, etc.

Definición B.1.3 (función \mathcal{F} -medible). Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, entonces una función $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es llamada \mathcal{F} -medible si

$$Y^{-1}(U) := \{ \omega \in \Omega; Y(\omega) \in U \} \in \mathcal{F}$$

para todos los conjuntos abiertos $U \in \mathbb{R}^n$, es decir para todos los conjuntos de Borel $U \subset \mathbb{R}^n$.

Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función cualquiera, entonces la σ -álgebra \mathcal{H}_X generada por X es la σ -álgebra más pequeña en Ω que contiene a todos los conjuntos

$$X^{-1}(U); \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto.}$$

se puede mostrar que:

$$\mathcal{H}_X = \{ X^{-1}(B); B \in \mathcal{B} \}$$

donde \mathcal{B} es la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}^n . Es decir que X sería \mathcal{H}_X -medible y \mathcal{H}_X es la σ -álgebra más pequeña que tiene esta propiedad.

Lema B.1.2. Sean $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos funciones dadas, entonces se dirá que Y es \mathcal{H}_X -medible si y sólo si existe una función Borel medible $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$Y = g(X)$$

Habiendo definido estos elementos podemos introducir el concepto de una variable aleatoria

Definición B.1.4 (variable aleatoria). Una variable aleatoria X es una función \mathcal{F} -medible $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Si hay una probabilidad P en \mathcal{F} , entonces $X^{-1}(B) = F \in \mathcal{F}$, de manera que la variable aleatoria induce una medida de probabilidad μ_X en \mathbb{R}^n , definida por:

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

esta medida de probabilidad μ_X es llamada la distribución de X .

Pasemos a definir a definir la esperanza:

Definición B.1.5 (Esperanza). Si $\int_{\Omega} |X(\omega)| dP(\omega) < \infty$ entonces el número:

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} x d\mu_X(x)$$

es llamada la esperanza de X .

De forma mas general se puede extender el concepto para calcular la esperanza de una función f (la composición de f con X), sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función Borel medible y $\int_{\Omega} |f(X(\omega))| dP(\omega) < \infty$ entonces

$$\mathbb{E}[f(X)] := \int_{\Omega} f(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu_X(x).$$

Con la finalidad de formalizar algunos conceptos, introduciremos la idea de la norma de una variable aleatoria

Definición B.1.6. Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una variable aleatoria y $p \in [1, \infty)$ es una constante. Se define la normal L^p de X , como:

$$\|X\|_p = \|X\|_{L^p(P)} = \left(\int_{\Omega} |X(\omega)|^p dP(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$ entonces

$$\|X\|_{\infty} = \|X\|_{L^{\infty}(P)} = \sup\{|X(\omega)|; \omega \in \Omega\}$$

Esto nos permite definir los espacios L^p como:

$$L^p(P) = L^p(\Omega) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n; \|X\|_p < \infty\}.$$

Nótese como la esperanza de X está definida en L^1 , es decir en un espacio en el cual $\|X\|_1 < \infty$. Con la norma definida como en la expresión de arriba, estos espacios L^p son a su vez espacios de Banach, es decir espacio lineal normado y completo. El caso de $L^2(P)$ es el espacio de Hilbert, es decir un espacio completo con producto interno.

Con estas ideas podemos pasar a definir matemáticamente el modelo de independencia:

Definición B.1.7 (independencia). Dados dos subconjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ son llamados independientes si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Usando esta noción sean $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dos variables aleatorias independientes, entonces

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Siempre y cuando $E\|X\| < \infty$ y $E\|Y\| < \infty$. Con estas herramientas se puede definir lo que sería un proceso estocástico.

B.2. Proceso de Wiener

Lema B.2.1. *Existe un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y variables aleatorias ξ_0, ξ_1, \dots , definidas en el espacio, cada una de las cuales está uniformemente distribuídas en $[0, 1]$, esto es que $P\{\xi_n \in B\} = \lambda(B \cap [0, 1])$ para cualquier conjunto de Borel $B \subset (-\infty, \infty)$ y $n \geq 0$.*

Usando este lema y la siguiente definición

Definición B.2.1. Sea ξ un vector aleatorio d -dimensional en (Ω, \mathcal{F}, P) . Entonces ξ se dice que es la distribución normal estándar, o que es un vector normal aleatorio d -dimensional, si la densidad de ξ es

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}$$

podemos probar que

Lema B.2.2. *En el espacio de probabilidad del lema B.2.1 existe una secuencia de variables aleatorias independiente η_0, η_1, \dots cada una de las cuales tiene una distribución normal estándar*

Demostración. Sea:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \quad (\text{B.1})$$

una función $F(t)$ continua en \mathbb{R} y monótonamente creciente de 0 a 1 sin tomar los valores 0 y 1:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^t e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \implies \left(\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right)^2$$

pero:

$$\begin{aligned} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) \right)^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} dudv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr d\theta = \frac{2\pi}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr \\ &= -e^{-\frac{1}{2}r^2} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1 \end{aligned}$$

esto indica que $F^{-1}(x) \in (-\infty, \infty)$ y $x \in (0, 1)$. Ahora usando el lema B.2.1, sabemos que existen variables aleatorias uniformemente distribuídas en $[0, 1]$, así que sea:

$$\eta_n(\omega) = \begin{cases} F^{-1}(\xi_n(\omega)), & \text{si } \xi_n(\omega) \in (0, 1) \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

estas variables aleatorias $\eta_n(\omega)$ son variables independientes, esto se puede verificar de la siguiente manera, nótese que

$$\eta_n(\omega)\eta_m(\omega) = \begin{cases} F^{-1}(\xi_n(\omega)) \cdot F^{-1}(\xi_m(\omega)), & \text{si } \xi_n(\omega) \text{ y } \xi_m(\omega) \in (0, 1) \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

entonces:

$$P[\eta_n(\omega)\eta_m(\omega)] = \begin{cases} P[F^{-1}(\xi_n(\omega)) \cdot F^{-1}(\xi_m(\omega))], & \text{si } \xi_n(\omega) \text{ y } \xi_m(\omega) \in (0, 1) \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

donde se usó que $P\{\xi_n(\omega) \notin (0, 1)\} = 0$. Considerando que los ξ_n son variables aleatorias, entonces los $F^{-1}(\xi_i(\omega))$ son \mathcal{F} -medibles, además estas son independientes por lo tanto $P[F^{-1}(\xi_n(\omega)) \cdot F^{-1}(\xi_m(\omega))] = P[F^{-1}(\xi_n(\omega))] \cdot P[F^{-1}(\xi_m(\omega))]$ si $\xi_n(\omega)$ y $\xi_m(\omega) \in (0, 1)$, así que:

$$\begin{aligned} P[\eta_n(\omega)\eta_m(\omega)] &= P[F^{-1}(\xi_n(\omega)) \cdot F^{-1}(\xi_m(\omega))] = P[F^{-1}(\xi_n(\omega))] \cdot P[F^{-1}(\xi_m(\omega))] \\ &= P[\eta_n(\omega)] \cdot P[\eta_m(\omega)] \end{aligned}$$

es decir que las variables aleatorias $\eta_n(\omega)$ son independientes, sea $x \in \mathbb{R}$:

$$P[\eta_n < x] = P[F^{-1}(\xi_n) < x, \xi_n \in (0, 1)] = P[\xi_n < F(x)] = F(x).$$

Finalmente, considerando la definición B.2.1 para el caso unidimensional, es decir que ξ es una variable aleatoria normal estándar, entonces $F(x) = P(\xi < x)$ y además como $P(\eta_n < x) = P(\xi < x)$ implica que las distribuciones de η_n y de ξ coinciden, es decir que la distribución de η_n es normal estándar. \square

B.2.1. Prueba de la existencia del proceso de Wiener

Para probar la existencia del proceso de Wiener necesitaremos un lema adicional, el cual se probará acá mismo:

Lema B.2.3. *Sea $p \geq 1$, $\alpha > p^{-1}$ números. Entonces existe una constante N tal que para cualquier función $f(t)$ continua en $[0, \pi]$ y para todo $t, s \in [0, \pi]$*

$$|f(t) - f(s)|^p \leq N|t - s|^{p\alpha-1} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+p\alpha}} dx dy \quad (\text{B.2})$$

Demostración. Primero asumamos que f es continuamente diferenciable en $[0, \pi]$. Podemos asumir que la integral

$$I = \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+p\alpha}} dx dy, \quad I \text{ es finita y } f \text{ no es una constante}$$

El integrando puede ser reescrito, fijando un $y \in [0, \pi]$, el integrando se puede escribir para $x \rightarrow y$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow y} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+p\alpha}} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|f(y + \Delta x) - f(y)|^p}{|y + \Delta x - y|^{1+p\alpha}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|f(y + \Delta x) - f(y)|^p}{|\Delta x|^{1+p\alpha}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|f(y + \Delta x) - f(y)|^p}{|\Delta x|^p} \cdot \frac{|\Delta x|^p}{|\Delta x|^{1+p\alpha}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|f(y + \Delta x) - f(y)|^p}{|\Delta x|^p} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x|^{p-1-p\alpha} \\ &= \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(y + \Delta x) - f(y)}{\Delta x} \right|^p \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x|^{p-1-p\alpha} \\ &= |f'(y)|^p \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x|^{p-\alpha p-1} \end{aligned}$$

pero $x = y + \Delta x$ entonces $\Delta x = x - y$, $\Delta x \rightarrow 0$, $x - y \rightarrow 0$, $x \rightarrow y$, es decir que

$$\lim_{x \rightarrow y} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+p\alpha}} = |x - y|^{p(1-\alpha)} |f'(y)|^p, \quad \text{para } x \rightarrow y$$

La integral de esta expresión diverge si $f'(y) \neq 0$ y $p(1 - \alpha) - 1 \leq 0$, $\alpha \geq 1$. Por lo tanto, si pedimos que I sea finito, entonces $\alpha < 1$. Por consiguiente, definamos:

$$K := \sup_{t,s \in [0,\pi]} |f(t) - f(s)| \cdot |t - s|^{\frac{1}{p} - \alpha} < \infty$$

Ahora sea $0 \leq s < t \leq \pi$. Ahora usando la desigualdad triangular

$$|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f(u)| + |f(u) - f(v)| + |f(v) - f(s)|$$

con respecto a $u \in [t - \epsilon, t]$, $v \in [s, s + \epsilon]$, donde $0 < \epsilon \leq t - s$, integrando la desigualdad de arriba

$$\begin{aligned} \int_s^{s+\epsilon} \int_{t-\epsilon}^t |f(t) - f(s)| dudv &\leq \int_s^{s+\epsilon} \int_{t-\epsilon}^t |f(t) - f(u)| dudv + \int_s^{s+\epsilon} \int_{t-\epsilon}^t |f(u) - f(v)| dudv + \dots \\ &\dots + \int_s^{s+\epsilon} \int_{t-\epsilon}^t |f(v) - f(s)| dudv \end{aligned}$$

donde

$$\int_s^{s+\epsilon} \int_{t-\epsilon}^t |f(t) - f(s)| dudv = (t - t + \epsilon)(s + \epsilon - s)|f(t) - f(s)| = \epsilon^2 |f(t) - f(s)|$$

entonces

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \left[\int_s^{s+\epsilon} \int_{t-\epsilon}^t |f(t) - f(u)| dudv + \int_s^{s+\epsilon} \int_{t-\epsilon}^t |f(u) - f(v)| dudv + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \int_s^{s+\epsilon} \int_{t-\epsilon}^t |f(v) - f(s)| dudv \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_{t-\epsilon}^t |f(t) - f(u)| du \int_s^{s+\epsilon} dv + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{t-\epsilon}^t \int_s^{s+\epsilon} |f(t) - f(u)| dudv + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{\epsilon^2} \int_s^{s+\epsilon} |f(v) - f(s)| dv \int_{t-\epsilon}^t du \\ &= \frac{(s + \epsilon - s)}{\epsilon^2} \int_{t-\epsilon}^t |f(t) - f(u)| du + \frac{t - t + \epsilon}{\epsilon^2} \int_s^{s+\epsilon} |f(v) - f(s)| dv + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{t-\epsilon}^t \int_s^{s+\epsilon} |f(u) - f(v)| dudv \end{aligned}$$

considerando que $0 < \epsilon < t - s$, entonces la región de integración será mayor para $\epsilon = t - s$, entonces

$$\int_{t-\epsilon}^t \int_s^{s+\epsilon} |f(u) - f(v)| dudv \leq \int_{t-t+s}^t \int_s^{s+t-s} |f(u) - f(v)| dudv = \int_s^t \int_s^t |f(u) - f(v)| dudv$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_{t-\epsilon}^t |f(t) - f(u)| du + \frac{1}{\epsilon} \int_s^{s+\epsilon} |f(v) - f(s)| dv + \frac{1}{\epsilon^2} \int_s^t \int_s^t |f(u) - f(v)| dudv \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_{t-\epsilon}^t |f(t) - f(u)| du + \frac{1}{\epsilon} \int_s^{s+\epsilon} |f(v) - f(s)| dv + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{\epsilon^2} \int_s^t \int_s^t \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|^{\frac{1}{p} + \alpha}} |u - v|^{\frac{1}{p} + \alpha} dudv \end{aligned}$$

Nótese que para la última integral

$$\int_s^t \int_s^t \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|^{\frac{1}{p} + \alpha}} |u - v|^{\frac{1}{p} + \alpha} dudv = \int_s^t \int_s^t \left| \left[\frac{f(u) - f(v)}{(u - v)^{\frac{1}{p} + \alpha}} \right] (u - v)^{\frac{1}{p} + \alpha} \right| dudv$$

usando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_s^t \left| \left[\frac{f(u) - f(v)}{(u - v)^{\frac{1}{p} + \alpha}} \right] (u - v)^{\frac{1}{p} + \alpha} \right| dudv &\leq \left(\int_s^t \int_s^t \left| \frac{f(u) - f(v)}{(u - v)^{\frac{1}{p} + \alpha}} \right|^p dudv \right)^{\frac{1}{p}} \times \dots \\ &\dots \times \left(\int_s^t \int_s^t |u - v|^{(\frac{1}{p} + \alpha) \frac{p}{p-1}} dudv \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

ahora como $u \in [t - \epsilon, t]$, $v \in [s, s + \epsilon]$ y $0 \leq s < t \leq \pi$, entonces

$$|u - v| \leq \left| \sup_{u \in [t - \epsilon, t]} \{u : u \in [t - \epsilon, t]\} - \inf_{v \in [s, s + \epsilon]} \{v : v \in [s, s + \epsilon]\} \right| = |t - s|$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_s^t \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|^{\frac{1}{p} + \alpha}} |u - v|^{\frac{1}{p} + \alpha} dudv &\leq \left(\int_s^t \int_s^t \frac{|f(u) - f(v)|^p}{|u - v|^{1 + p\alpha}} \right)^{\frac{1}{p}} \times \dots \\ &\dots \times \left(\int_s^t \int_s^t |t - s|^{(\frac{1}{p} + \alpha) \frac{p}{p-1}} dudv \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= I^p \left(|t - s|^{(\frac{1}{p} + \alpha) \frac{p}{p-1}} \int_s^t \int_s^t dudv \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= I^p \left(|t - s|^{(\frac{1}{p} + \alpha) \frac{p}{p-1}} |t - s|^2 \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= I^p |t - s|^{(\frac{1}{p} + \alpha) \frac{p}{p-1} \left(\frac{p-1}{p} \right) + \frac{2(p-1)}{p}} = I^p |t - s|^{\frac{1}{p} + \alpha + \frac{2(p-1)}{p}} \\ &= I^p |t - s|^{\frac{1}{p} + \alpha + 2 - \frac{2}{p}} = I^p |t - s|^{2 + \alpha - \frac{1}{p}} \end{aligned}$$

por otro lado para estimar las primeras integrales

$$|f(t) - f(u)| = \frac{|f(t) - f(u)| \cdot |t - u|^{\frac{1}{p} - \alpha}}{|t - u|^{\frac{1}{p} - \alpha}}$$

pero recordemos de la ecuación B.2.1, entonces:

$$|f(t) - f(u)| \leq \frac{K}{|t - u|^{\frac{1}{p} - \alpha}} = K |t - u|^{\alpha - \frac{1}{p}}$$

ahora haciendo el cambio de variable $r = t - u$:

$$\begin{aligned} \int_{t-\epsilon}^t |f(t) - f(u)| du &\leq \int_{t-\epsilon}^t K |t - u|^{\alpha - \frac{1}{p}} du = - \int_{\epsilon}^0 K |r|^{\alpha - \frac{1}{p}} dr = K \int_0^{\epsilon} |r|^{\alpha - \frac{1}{p}} dr \\ &= K \left. \frac{|r|^{\alpha - \frac{1}{p} + 1}}{\alpha - \frac{1}{p} + 1} \right|_0^{\epsilon} = \frac{\epsilon^{\alpha - \frac{1}{p} + 1}}{\alpha - \frac{1}{p} + 1} \end{aligned}$$

pero sabemos que $p > \alpha^{-1} > 1$, entonces $p^{-1} < \alpha < 1$, siguiendo $0 < \alpha - p^{-1} < 1 - p^{-1}$ es decir que $1 < \alpha - p^{-1} + 1 < 2 - p^{-1}$, así que

$$\frac{1}{2 - \frac{1}{p}} < \frac{1}{\alpha - \frac{1}{p} + 1} < 1$$

por lo tanto

$$\int_{t-\epsilon}^t |f(t) - f(u)| du \leq K \epsilon^{\alpha - \frac{1}{p} + 1}, \quad \int_s^{s+\epsilon} |f(v) - f(s)| dv \leq K \epsilon^{\alpha - \frac{1}{p} + 1}$$

es decir que

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\leq \frac{K \epsilon^{\alpha - \frac{1}{p} + 1}}{\epsilon} + \frac{|t - s|^{2 + \alpha - \frac{1}{p}} I_p^{\frac{1}{p}}}{\epsilon^2} + \frac{K \epsilon^{\alpha - \frac{1}{p} + 1}}{\epsilon} \\ &= 2K \epsilon^{\alpha - \frac{1}{p}} + \epsilon^{-2} |t - s|^{2 + \alpha - \frac{1}{p}} I_p^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

sea $\delta \in (0, 1)$ una constante, t y s puntos arbitrarios de $[0, \pi]$ y $\epsilon = \delta |t - s|$

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\leq 2K \delta^{\alpha - \frac{1}{p}} |t - s|^{\alpha - \frac{1}{p}} + \delta^{-2} |t - s|^2 |t - s|^{2 + \alpha - \frac{1}{p}} I_p^{\frac{1}{p}} \\ &= 2K \delta^{\alpha - \frac{1}{p}} |t - s|^{\alpha - \frac{1}{p}} + \delta^{-2} |t - s|^{\alpha - \frac{1}{p}} I_p^{\frac{1}{p}} \\ &= |t - s|^{\alpha - \frac{1}{p}} \left(2K \delta^{\alpha - \frac{1}{p}} + \delta^{-2} I_p^{\frac{1}{p}} \right) \end{aligned}$$

es decir que

$$\frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^{\alpha - \frac{1}{p}}} = |f(t) - f(s)| \cdot |t - s|^{\frac{1}{p} - \alpha} \leq 2\delta^{\alpha - \frac{1}{p}} K + \delta^{-2} I_p^{\frac{1}{p}}$$

por lo tanto

$$K = \sup_{t, s \in [0, \pi]} |f(t) - f(s)| \cdot |t - s|^{\frac{1}{p} - \alpha} \leq 2\delta^{\alpha - \frac{1}{p}} K + \delta^{-2} I_p^{\frac{1}{p}}$$

escojamos ahora $2\delta^{\alpha - \frac{1}{p}} = 1/2$, entonces

$$K \leq \frac{1}{2} K + \delta^{-2} I_p^{\frac{1}{p}} \implies \frac{1}{2} K \leq \delta^{-2} I_p^{\frac{1}{p}} \implies K \leq 2\delta^{-2} I_p^{\frac{1}{p}}$$

esto quiere decir que

$$\sup_{t, s \in [0, \pi]} |f(t) - f(s)| \cdot |t - s|^{\frac{1}{p} - \alpha} \leq 2\delta^{-2} I_p^{\frac{1}{p}}$$

entonces también es válido

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| \cdot |t - s|^{\frac{1}{p} - \alpha} &\leq 2\delta^{-2} I_p^{\frac{1}{p}} \\ |f(t) - f(s)| &\leq 2\delta^{-2} |t - s|^{\alpha - \frac{1}{p}} I_p^{\frac{1}{p}} \\ |f(t) - f(s)|^p &\leq 2^p \delta^{-2p} |t - s|^{\alpha p - 1} I_p \end{aligned}$$

por lo tanto

$$|f(t) - f(s)|^p \leq N |t - s|^{\alpha p - 1} \int_s^t \int_s^t \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1 + \alpha p}} dx dy$$

Nótese que la longitud del intervalo $[0, \pi]$ no fue usado en la deducción, de manera que la misma N es válida cuando $0, \pi$ es sustituido por a, b , es decir que $t, s \in [a, b]$ y que f sea suave en $[a, b]$. De manera que si f es continuamente diferenciable en $[s, t]$ se cumple la expresión de arriba. \square

Cuando este lema vaya a ser aplicado, $f(t)$ será también una función de ω , es decir $f = f(\omega, t)$ será alguna variable aleatoria para algún t . Además al calcular la esperanza del lado derecho de la ecuación B.2.3, se intercambiará el orden de la esperanza y la integral con respecto a $dx dy$. Esto se puede asegurar por el teorema de Fubini y el hecho de que $|f(x) - f(y)|^p$, $|x - y|^p$, $I_{x \neq y}$ son funciones medibles de (ω, x, y) con respecto a $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

B.2.2. Elementos Necesarios para la Construcción

Teorema B.2.4. Sean $\xi(1), \xi(2), \dots$ vectores d -dimensionales Gaussianos, ξ un vector aleatorio d -dimensional en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(n)$ (casi seguramente). Entonces ξ es un vector Gaussiano

$$\mathbb{E}\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\xi(n), \quad R_\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{\xi(n)}$$

donde $R_\xi, R_{\xi(n)}$ son las matrices de covarianza de $\xi, \xi(n)$.

Definición B.2.2. Los vectores aleatorios ξ_1, \dots, ξ_k de dimensiones d_1, \dots, d_k , respectivamente en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) se dice que son independientes (conjuntamente) sí, para cualquier conjunto de Borel $B_j \subset \mathbb{R}_{d_j}$, $j = 1, \dots, k$, tenemos

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_k \in B_k) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_k \in B_k)$$

el lado izquierdo se extiende como

$$P(\{\omega : \xi_1(\omega_1) \in B_1, \dots, \xi_k(\omega_k) \in B_k\})$$

B.2.3. La desigualdad de Hölder

Definición B.2.3 (desigualdad de Hölder). Sean ξ y η variables aleatorias no-negativas en un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $p \in (1, \infty)$, $q = \frac{p}{p-1}$, entonces

$$\int_{\Omega} \xi \eta \mu(d\omega) \leq \left(\int_{\Omega} \xi^p \mu(d\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} \eta^q \mu(d\omega) \right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{B.3})$$

Bibliografía

- Agranovich, M. S. (1994). *Partial Differential Equations VI: Elliptic and Parabolic Operators*. 1.^a ed. Encyclopaedia of Mathematical Sciences N°63. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Baliyan, Vinit et al. (2016). “Diffusion weighted imaging: technique and applications”. En: *World journal of radiology* 8.9, pág. 785.
- Brassesco, Stella (2012). *Perturbaciones estocásticas de la ecuación de Allen–Cahn*. Ediciones IVIC.
- Callen, Herbert B. (1985). *Thermodynamics And An Introduction To Thermostatistics*. 2.^a ed. Wiley. ISBN: 9780471862567.
- Cialenco, Igor (feb. de 2018). “Statistical inference for SPDEs: an overview”. En: *Statistical Inference for Stochastic Processes*.
- Durrett, Richard (1996). *Stochastic calculus: a practical introduction*. 1.^a ed. Probability and stochastics series. CRC Press.
- Evans, Lawrence C. (1998). *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, V. 19 GSM/19. American Mathematical Society.
- Frankignoul, Claude (1985). “Sea surface temperature anomalies, planetary waves, and air-sea feedback in the middle latitudes”. En: *Reviews of Geophysics vol. 23 iss. 4* 23 (4).
- Gabriel J. Lord Catherine E. Powell, Tony Shardlow (2014). *An Introduction to Computational Stochastic PDEs*. 1.^a ed. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press.
- Hairer, Martin (2009). *An Introduction to Stochastic PDEs*. arxiv. URL: <https://arxiv.org/pdf/0907.4178.pdf>.
- Hans Petter Langtangen, Svein Linge (2017). *Finite Difference Computing with PDEs. A Modern Software Approach*. Springer.
- Hasselmann, Klaus (1976). “Stochastic climate models part I. Theory”. En: *tellus* 28.6, págs. 473-485.
- Higham, Desmond J. (2001). “An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations”. En: *SIAM Review* 43 (3).
- Huebner, M, R Khasminskii y BL Rozovskii (1993). “Two examples of parameter estimation for stochastic partial differential equations”. En: *Stochastic processes*. Springer, págs. 149-160.
- Khalifi, Mohammad (2021). “On experimental estimation of molecular diffusion coefficient of gaseous solvents in bitumen”. En: *Fuel* 302, pág. 121126. ISSN: 0016-2361. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2021.121126>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001623612101005X>.
- Khoshnevisan, D. (2014). *Analysis of stochastic partial differential equations*. Conference Board of the Mathematical Sciences 119. AMS.
- Khoshnevisan, Davar (2016). *An Introduction to Parabolic SPDES*. Lectures in Probability & Stochastic Processes XI. Indian Statistical Institute, Delhi Center, New Delhi, India.
- Krylov, N.V. et al. (1995). *Introduction to the Theory of Diffusion Processes*. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Society. ISBN: 9780821846001. URL: <https://books.google.co.ve/books?id=mHs52w0vWNIC>.
- Lawrence C., Evans (1997). *Partial Differential Equations*. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society.

- Lototsky, S. V. (2009). “Statistical inference for stochastic parabolic equations: a spectral approach”. En: *Publicacions Matemàtiques* 53.1, págs. 3 -45.
- Lototsky, Sergey V y Boris L Rozovsky (2017). *Stochastic partial differential equations*. Springer.
- Piterbarg, A.G. Ostrovskii; L.I. (1997a). “A New Method for Obtaining Velocity and Diffusivity from Time-Dependent Distributions of a Tracer via the Maximum Likelihood Estimator for the Advection–Diffusion Equation”. En: *Journal of Computational Physics 1997-may vol. 133 iss. 2* 133 (2).
- Piterbarg Leonid I.; Ostrovskii, Alexander G. (1997b). “Advection and Diffusion in Random Media - Advection and Diffusion Inferred from SST Anomaly Time Series”. En: (Chapter 10).
- Prato, Giuseppe Da (2014). *Introduction to Stochastic Analysis and Malliavin Calculus*. Edizioni della Normale.
- R. S. Liptser, A. N. Shiriyayev (auth.) (1978). *Statistics of Random Processes II: Applications*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer.
- Richard C. Aster, Brian Borchers y Clifford H. Thurber (Eds.) (2005). *Parameter Estimation and Inverse Problems*. International geophysics series; 90. Elsevier Academic Press.
- Ruel, Brown Ward James & Churchill V. (2009). *Complex Variables and Applications*. 8va. McGraw-Hill Inc.
- Vercauteren, Nikki et al. (2011). “Evolution of superficial lake water temperature profile under diurnal radiative forcing”. En: *Water resources research* 47.9.
- Wiener, Norbert (1976). *Norbert Wiener: Collected Works*. Cambridge, Mass., MIT Press.
- Øksendal, Bernt (2010). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. 6th ed. Universitext. Springer. ISBN: 9783540047582.